PACS 42.55.Wd; 42.545.Rz; 42.60.Lh

Температурная зависимость длины волны излучения волоконного лазера

М.Ю.Вяткин, С.П.Грабарник, О.А.Рябушкин

Предложена модель волоконного лазера, которая позволяет получить аналитическую формулу, связывающую длину волны излучения генерации с его основными параметрами. Анализ показал, что существуют области неоднозначной зависимости длины волны излучения генерации от температуры и длины активной среды. Результаты эксперимента количественно согласуются с теоретической моделью в широком спектральном диапазоне излучения волоконного лазера. Впервые теоретически предсказана и экспериментально продемонстрирована двухволновая генерация излучения без селектирующего элемента в резонаторе лазера.

Ключевые слова: волоконные лазеры, длина волны излучения лазера, сечение люминесценции, сечение поглощения, температура.

Волоконные поперечно-одномодовые лазеры на кварцевом стекле, легированном ионами редкоземельных элементов, являются источниками излучения с высокой выходной мощностью при многомодовой накачке в широком диапазоне длин волн [1]. Развитие технологии элементной базы волоконной оптики стимулирует создание новых, более точных физических и математических моделей, описывающих различные процессы в таких лазерах [1-4].

Одна из основных целей развития технологии мощных волоконных лазеров – это эффективное преобразование многомодового излучения накачки лазерных диодов в излучение волоконного лазера с высоким качеством пучка. Поскольку энергия излучаемого кванта меньше энергии поглощенного кванта излучения накачки, то часть мощности накачки уходит в тепло, что приводит к разогреву активной среды волоконного лазера. В [2] был рассмотрен тепловой режим работы волоконного лазера, и было показано, что при мощностях его излучения до 100 Вт влиянием разогрева сердцевины активного световода за счет различия энергий квантов накачки и лазера можно пренебречь.

В настоящее время мощность излучения наиболее эффективного из всех волоконных лазеров — Yb³⁺-лазера — в режиме генерации одной поперечной моды достигла 400 Вт [5], при этом возможности создания еще более мощных лазеров далеко не исчерпаны [6–8]. Актуальность исследований тепловых эффектов в волоконных лазерах определяется тем, что при мощности одномодового лазера свыше 300 Вт температура в активном волокне может превышать температуру окружающей среды более чем на 100 °C [3]. Повышение температуры ак-

М.Ю.Вяткин, С.П.Грабарник. НТО «ИРЭ – Полюс», Россия, 141190 Фрязино, Московская обл., пл. акад. Введенского, 1;

e-mail: mvyatkin@ipgphotonics.com

О.А.Рябушкин. Институт радиотехники и электроники РАН, Россия, 141120 Фрязино, Московская обл., пл. акад. Введенского, 1; e-mail: roa228@mail.ru

Поступила в редакцию 27 августа 2004 г., после доработки – 20 января 2005 г.

тивной среды может существенно влиять на характеристики Yb^{3+} -лазера. Экспериментально было показано [4], что при изменении температуры активного волокна от 0 °C до 100 °C порог генерации может возрасти на 25 %. Возможность перестройки длины волны излучения волоконного лазера посредством изменения температуры также была продемонстрирована в эксперименте [4].

Общепринятый физический подход, который предлагает модель стационарной генерации твердотельного лазера на активных ионах (известный как теория Мак-Камбера [9]), позволяет вычислять длину волны генерации лазера. В рамках данного подхода для нахождения коэффициента усиления активной среды используются сечения поглощения и люминесценции активных ионов, а длина волны излучения генерации определяется максимумом коэффициента усиления на данной длине волны при достижении порога генерации. Теория Мак-Камбера использовалась в работе [1] для численного расчета длины волны излучения волоконного Yb³⁺-лазера. Насколько нам известно, в настоящее время в литературе отсутствует физико-математическая модель, позволяющая определять длину волны генерации, которая учитывала бы температуру активных ионов наряду с другими парамет-

В настоящей работе предложена модель лазера, основанная на подходе Мак-Камбера и описывающая активную среду в резонаторе с помощью балансных уравнений.

В качестве лазерной среды рассматриваются активные ионы редкоземельных элементов, энергетические уровни которых расщеплены на подуровни в результате взаимодействия с окружающими их атомами. Как показано в [9], для такой системы могут быть введены сечения поглощения и люминесценции, описывающие процессы возбуждения и релаксации активных ионов между двумя любыми уровнями, при условии, что межуровневый переход сопровождается поглощением или излучением фотона.

Рассмотрим двухуровневую модель активных ионов лазерной среды в резонаторе (заметим, что анализ трех-

уровневой или четырехуровневой системы может быть сведен к анализу двухуровневой с помощью введения сечений межуровневых переходов аналогично тому, как это сделано ниже для двухуровневой системы). Пусть уровни 1 и 2 лазерного перехода имеют населенности N_1 и N_2 и сечения перехода $\sigma_{12}(\lambda, T)$ и $\sigma_{21}(\lambda, T)$ с уровня 1 на уровень 2 (сечение поглощения) и с уровня 2 на уровень 1 (сечение люминесценции) соответственно. Мы предполагаем, что в лазерном резонаторе возбуждается излучение с множеством продольных мод и только с одной поперечной модой, причем коэффициент пространственного перекрытия этой моды с активной средой равен 1. Среда возбуждается светом от внешнего источника накачки мощностью Р. Пусть ось симметрии световода z параллельна направлению распространения излучения. Коэффициент усиления в активной среде за один проход излучения на длине волны λ задается формулой

$$G = \exp g,$$

$$g(\lambda) = \int_{0}^{L} (N_2 \sigma_{21} - N_1 \sigma_{12}) dz,$$
(1)

где L – длина активной среды. Концентрация активных ионов в среде $N=N_1+N_2$, тогда

$$g = (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \int_0^L N_2(z) dz - \sigma_{12} NL.$$

Населенность верхнего уровня и плотность фотонов накачки зависят от времени в приближении малого сигнала (ниже порога генерации):

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = -N_2 \sigma_{21p} S_p v + N_1 \sigma_{12p} S_p v - \frac{N_2}{\tau},$$

$$\frac{\partial S_{\mathbf{p}}}{\partial t} = N_2 \sigma_{21\mathbf{p}} S_{\mathbf{p}} v - N_1 \sigma_{12\mathbf{p}} S_{\mathbf{p}} v,$$

где $S_{\rm p}$ — плотность фотонов накачки (число фотонов накачки в единице объема активной среды); τ — время жизни возбужденного иона; v=c/n — скорость света в среде; n — коэффициент преломления; $\sigma_{\rm 12p}$, $\sigma_{\rm 21p}$ — сечения перехода на длине волны накачки.

В стационарном случае $\partial N_2/\partial t=0$, поэтому $\partial S_{\rm p}/\partial t=-N_2/ au$ или $\partial S_{\rm p}/\partial z=-N_2/(\upsilon au)$, отсюда

$$\int_{0}^{L} N_{2} dz = v\tau \int_{0}^{L} dS_{p} = v\tau [S_{p}(L) - S_{p}(0)], \tag{2}$$

где $S_p(0)$ и $S_p(L)$ – плотности фотонов накачки в начале и конце активной среды соответственно. Таким образом,

$$\int_{0}^{L} N_{2} dz = f(P_{a}),$$

$$g = (\sigma_{12} + \sigma_{21}) f(P_{a}) - \sigma_{12} NL,$$
(3)

где $f(P_{\rm a})$ – функция, которая зависит только от поглощенной мощности накачки $P_{\rm a}$.

Отметим, что для иттербиевого волоконного лазера $f(P_a)$ определяется выражением (2). Очевидно, что не вся поглощенная мощность накачки участвует в создании инверсии и, следовательно, выражение (2) не может быть

использовано напрямую, однако вывод о том, что интегральная по длине активной среды инверсия является функцией поглощенной мощности излучения накачки, верен в общем случае.

Введем функцию $\varphi(\lambda) = g(\lambda) - g_0(\lambda)$, где $g(\lambda)$ – коэффициент усиления активной среды, задаваемый формулой (2), а $g_0(\lambda)$ – потери в резонаторе, которые в общем случае зависят от длины волны. Тогда условия возникновения генерации на длине волны λ_0 могут быть сформулированы следующим образом:

$$\varphi(\lambda_0) = 0, \tag{4}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} = 0. \tag{5}$$

Условие (5) означает наличие максимума функции $\varphi(\lambda)$ на длине волны излучения генерации, а условие (4) соответствует достижению порога генерации. Связь сечений поглощения и люминесценции активных ионов можно выразить с помощью формулы Мак-Камбера [9]:

$$\sigma_{12}(\lambda, T) = \sigma_{21}(\lambda, T) \exp\left[\frac{hc\lambda^{-1} - \mu(T)}{kT}\right]. \tag{6}$$

Здесь $\mu(T)$ — потенциал возбуждения; k — постоянная Больцмана; T — температура активной среды; h — постоянная Планка. Потенциал возбуждения $\mu(T)$ равен энергии, необходимой для возбуждения одного иона при условии, что температура системы активных ионов поддерживается постоянной [9]. Величина $\mu(T)$ также определяет распределение населенностей N_1 и N_2 в состоянии теплового равновесия.

Решив совместно уравнения (3)-(6), можно получить выражение, определяющее длину волны излучения генерации как неявную функцию от основных параметров лазера и температуры активных ионов:

$$g_0 = \left\{ -\sigma_{21}^2 L N \frac{hc}{\lambda^2 k T} \exp\left(\frac{hc\lambda^{-1} - \mu}{kT}\right) \right\}$$

$$+\frac{\partial g_0}{\partial \lambda} \left[1 + \exp\left(\frac{hc\lambda^{-1} - \mu}{kT}\right) \right] \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \lambda} \right] \right\}$$

$$+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \lambda} \exp\left(\frac{hc\lambda^{-1} - \mu}{kT}\right) - \sigma_{21} \frac{hc}{\lambda^2 kT} \exp\left(\frac{hc\lambda^{-1} - \mu}{kT}\right)\right]^{-1}. (7)$$

Формула (7) существенно упрощается, если потери в резонаторе не зависят от длины волны, т. е. при отсутствии в резонаторе селектирующего элемента. Кроме того, мы можем пренебречь в последнем сомножителе в квадратных скобках (7) вторым членом по сравнению с первым. Действительно, из формулы (6) видно, что в тех областях спектра, где возможна генерация (т. е. при тех длинах волн, для которых $\sigma_{12}(\lambda,T) < \sigma_{21}(\lambda,T)$), выполняется условие: $(hc\lambda^{-1}-\mu)/(kT) < 0$. При генерации излучения на длине волны λ , удовлетворяющей условию $|hc\lambda^{-1}-\mu| > kT$ (наиболее типичный случай), имеем $\exp[(hc\lambda^{-1}-\mu)/(kT)] \ll 1$.

В результате после простых преобразований получим

$$g_0 = \sigma_{21} L N \left[1 - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \lambda} \frac{\lambda^2 k T}{\sigma_{21} h c} \exp\left(-\frac{h c \lambda^{-1} - \mu}{k T} \right) \right]^{-1}. \quad (8)$$

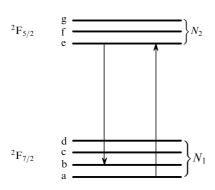


Рис.1. Схема уровней иона Yb^{3+} в кварцевом световоде.

Решение (7) или (8) при известных параметрах лазера и температуре активной среды позволяет определить длину волны излучения лазера. Эти уравнения являются трансцендентными относительно λ и не решаются аналитически, однако они разрешимы относительно L и N, что позволяет проанализировать зависимость длины волны излучения генерации от данных параметров. Как видно, в выражение (8) не входит $f(P_a)$.

До сих пор наши рассуждения ограничивались двухуровневой средой, которая описывается с помощью сечений поглощения и люминесценции. Ниже мы используем полученные уравнения для описания волоконного лазера на кварцевом стекле, легированном ионами Yb^{3+} . Рассмотрим систему уровней (рис.1) с сечениями поглощения и люминесценции иона Yb^{3+} в кварцевом световоде (рис.2), измеренными при комнатной температуре для активного волокна, которое использовалось нами в экспериментальной части работы. Заметим, что хотя сечения поглощения и люминесценции зависят от химического состава сердцевины волокна, для изложения результатов работы это не существенно.

Активные уровни иона Yb^{3+} представляют собой две группы уровней, а точнее — два уровня ${}^2F_{5/2}$ и ${}^2F_{7/2}$, расщепленных на подуровни в результате эффекта Штарка. Переход с подуровня а на подуровень е соответствует фотону на длине волны 975 нм [1], а энергия этого перехода равна потенциалу возбуждения $\mu(T)$. Время жизни на верхнем уровне много больше времени установления теплового равновесия внутри системы подуровней уровней ${}^2F_{5/2}$ и ${}^2F_{7/2}$. Поэтому можно считать, что внут-

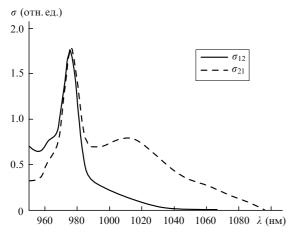


Рис.2. Сечения поглощения σ_{12} и люминесценции σ_{21} иона Yb³⁺ в кварцевом световоде. Абсолютные значения сечений на длине волны $\lambda=0.975$ мкм составляют 1.8×10^{-24} м².

ри систем подуровней ${}^2F_{5/2}$ и ${}^2F_{7/2}$ из-за тепловой релаксации ионы всегда распределены согласно закону Больцмана. Заметим, что время установления теплового равновесия следует сравнивать с обратной скоростью съема инверсии путем индуцированных переходов. Однако для достижения их равенства потребуются нереализуемые на практике мощности накачки. Сечение люминесценции для длин волн больше 975 нм соответствует переходам с уровня е на уровни b, c, d [1]. В диапазоне температур 200-400 К существенного изменения сечения люминесценции для длин волн больше 975 нм не происходит, т. к. изменение количества ионов на возбужденном уровне е вследствие изменения температуры мало согласно закону теплового распределения [4]. Температурное изменение однородного уширения сечения люминесценции и потенциала возбуждения в данном диапазоне температур также мало́ [10]. Поэтому в (7) и (8) σ_{21} является величиной, зависящей только от λ . Таким образом, температура входит в данные уравнения в явном виде, что позволяет проанализировать зависимость длины волны излучения лазера от температуры активной среды.

Итак, полученные формулы учитывают тепловое распределение активных ионов внутри штарковских подуровней. Повышение температуры приводит к увеличению тепловой населенности подуровней b и с и, как следствие, к изменению поглощения на длине волны излучения генерации (это видно из формулы (6)). В результате спектр коэффициента усиления активной среды сдвигается в длинноволновую область, и длина волны излучения генерации увеличивается.

Рассмотрим волоконный одномодовый Yb³⁺-лазер с широкополосным резонатором (без селектирующего элемента). Неявная функция, определяющая длину волны излучения такого лазера, задается формулой (8). На рис.3 сплошной линией показана расчетная зависимость длины волны излучения генерации от температуры при следующих параметрах системы: молярная концентрация активных ионов иттербия $N = 8 \times 10^{-4}$, длина активного волокна $L\sim 2.0$ м. Резонатор образован зеркалом с коэффициентом отражения $R_1 \simeq 100 \,\%$ и торцом волокна с $R_2 = 4 \%$. На рис.4 показаны характерные зависимости длины активного волокна от длины волны излучения генерации лазера при температурах 200, 300 и 400 К и указанных выше значениях N, R_1 и R_2 . Как видно из рис.3 и 4, зависимости длины волны излучения генерации от длины активного волокна и температуры имеют S-образные особенности. Из расчетов следует, что при $L\simeq 0.5\,\mathrm{M}$ возможна генерация на длине волны 980 нм. Заметим, что мощное одномодовое излучение на $\lambda = 980$ нм пред-

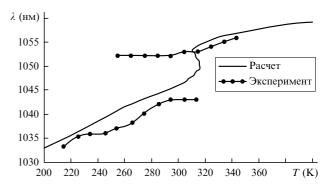


Рис.3. Расчетная и экспериментальная зависимости длины волны излучения лазера от температуры.

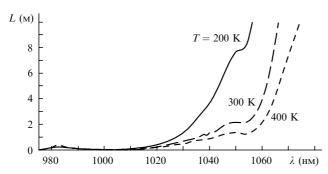


Рис.4. Зависимость длины активной среды от длины волны излучения лазера при различных температурах.

ставляет исключительный интерес для применения в телекоммуникациях, медицине и промышленности.

В формулу (8) не входит в явном виде поглощенная мощность накачки, поэтому существуют области параметров на зависимостях на рис.3 и 4, в которых одной точке могут соответствовать различные пороговые мощности накачки. Рассмотрим случай, когда входящая в (8) $\partial \sigma_{21}/\partial \lambda = 0$ (график производной сечения люминесценции показан на рис.5), что соответствует локальному максимуму сечения на длине волны 1015 нм и минимуму на длине волны 995 нм (рис.2). Тогда (8) принимает вид

$$g_0 = \sigma_{21} LN$$
,

т.е. g_0 равен коэффициенту усиления полностью инвертированной системы. В спектральном диапазоне 995—1015 нм $\partial \sigma_{21}/\partial \lambda > 0$, следовательно, $g_0 > \sigma_{21}LN$. Поэтому в диапазоне 995—1015 нм или, другими словами, там, где производная сечения люминесценции неотрицательна, невозможно получить генерацию без использования в резонаторе селектирующих элементов.

Особенности в поведении зависимостей на рис.3 и 4 объясняются формой сечения люминесценции и производной сечения по длине волны. В формуле (8) присутствует дробь, в числителе которой стоит производная сечения люминесценции, а в знаменателе – сечение поглощения, выраженное по формуле Мак-Камбера через сечение люминесценции. При увеличении длины волны, начиная с 975 нм, сечение поглощения монотонно умень-

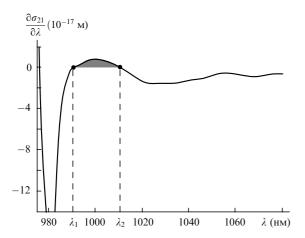


Рис.5. Производная сечения люминесценции иона Yb $^{3+}$ в кварцевом световоде; в диапазоне длин волн $\lambda_1-\lambda_2$ невозможно получить генерацию излучения без использования в резонаторе селектирующего элемента.

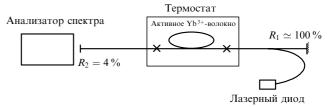


Рис.6. Схема экспериментальной установки. Крестами помечены точки сварки.

шается, но еще быстрее идет уменьшение по абсолютной величине производной сечения люминесценции. Таким образом, поочередное доминирование уменьшения сечения поглощения и производной сечения люминесценции (рис.5) приводит к тому, что дробь в целом при изменении длины волны изменяется немонотонно. Данным процессом объясняется возникновение неоднозначностей в зависимостях на рис.3 и 4. Из рис.4 следует, что температура не влияет на положение характерных особенностей в зависимости $L(\lambda)$, хотя форма зависимости может изменяться

Для экспериментальной проверки рассмотренной модели использовался иттербиевый волоконный лазер с параметрами $L\simeq 2.0$ м и $N=8\times 10^{-4}$. Резонатор был образован торцом волокна с коэффициентом отражения $R_2=4$ % и напыленным на торец диэлектрическим зеркалом с $R_1\simeq 100$ %. Спектр излучения лазера имел ширину около 3 нм, при этом максимум спектра считался длиной волны излучения лазера.

Схема экспериментальной установки показана на рис.6. Активное волокно лазера помещалось в термостат, где его температура могла изменяться от 200 до 400 К. Внешний разогрев активной среды моделировал процессы, возникающие в мощном волоконном лазере в результате саморазогрева сердцевины активного волокна. При этом мы пренебрегли градиентом температуры в волокне в направлении сердцевина - оболочка, который имеет место в случае саморазогрева сердцевины, поскольку данный градиент мал вблизи ее центра и составляет около 1 К на 10 мкм [3] (диаметр сердцевины около 7 мкм). Для торцевой накачки активного волокна использовался лазерный диод. Температурная зависимость длины волны излучения генерации (см. рис.3) измерялась с помощью анализатора спектра со спектральным разрешением 0.1 нм. Неоднозначность зависимости $\lambda(T)$, предсказываемая моделью, в эксперименте проявилась в существовании генерации на двух длинах волн, при этом температурный диапазон двухволновой генерации шире, чем область неоднозначной зависимости, даваемая моделью. При изменении температуры процесс генерации на двух длинах волн протекает следующим образом. Пусть температура уменьшается с 320 до 310 К. Тогда наряду с основным пиком на $\lambda = 1052.5$ нм в спектре излучения возникает дополнительный небольшой пик на $\lambda = 1043$ нм. При дальнейшем понижении температуры мощность основного пика падает, а дополнительного пика – растет, и при температуре 293 К мощности обоих пиков сравниваются. Далее мощность пика продолжает падать на $\lambda = 1052.5$ нм и расти на $\lambda = 1043$ нм, и при температуре 250 К в спектре излучения генерации остается только пик на длине волны 1043 нм. Вне области двухволновой генерации длина волны излучения зависит от температуры по линейному закону с коэффициентом 0.1 нм/К, что хорошо согласуется с теорией.

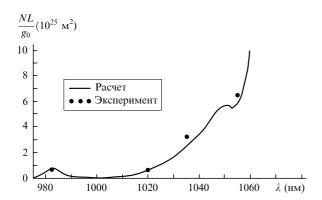


Рис.7. Зависимость комбинации параметров волоконного лазера NL/g_0 от длины волны излучения генерации.

Такие параметры лазера, как длина активной среды, концентрация активных ионов и потери в резонаторе входят в формулу (8) в виде комбинации NL/g_0 . Поэтому имеет смысл построить график, по осям которого будут отложены значения данной комбинации параметров и длины волны излучения генерации (рис.7). Расчетная кривая и все экспериментальные точки были получены при комнатной температуре, однако каждой точке соответствуют различные значения g_0 и L. Как следует из графика, модельные расчеты хорошо согласуются с экспериментом.

Таким образом, предложенная модель лазера позволила получить аналитическую формулу, связывающую длину волны излучения генерации с основными параметрами лазера и температурой активной среды. Впервые исследована экспериментально и теоретически зависимость длины волны излучения генерации иттербиевого волоконного лазера от температуры, имеющая область неоднозначности S-образного вида. Такая же неоднозначность присутствует в зависимости длины волны излучения генерации от длины активной среды. Поведение данных зависимостей определяется формой сечения люминесценции и производной сечения по длине волны. Модель предсказывает, что с помощью широкополосного резонатора невозможно получить лазерную генерацию в диапазоне длин волн, где производная сечения люминесценции по длине волны неотрицательна. В случае иттербиевого лазера это диапазон от 995 до 1015 нм.

Полученные экспериментальные результаты качественно соответствуют расчетным. В области температур,

где, согласно модели, длина волны излучения зависит от температуры по S-образному закону, в эксперименте наблюдалась генерация на двух длинах волн. Возникновение двухволновой генерации в резонаторе без селекции по длине волны наблюдалось нами впервые. Полученная экспериментально область двухволновой генерации значительно шире, чем предсказывает модель. Вне области двухволновой генерации длина волны излучения зависит от температуры линейно с коэффициентом 0.1 нм/К.

Следует отметить, что основные уравнения, полученные в рамках предложенной в данной работе модели, могут быть использованы для любой активной лазерной среды, которая описывается с помощью сечений люминесценции и поглощения. Модель также может быть использована для анализа зависимости пороговой мощности накачки от параметров активной среды и резонатора и позволяет количественно определить параметры лазера с целью получения излучения генерации с заданной длиной волны [11, 12].

Авторы выражают благодарность В.П.Гапонцеву и Н.С.Платонову (IPG-Photonics, США), С.В.Попову (Imperial College, Великобритания) и И.Э.Самарцеву (НТО «ИРЭ-Полюс», Россия) за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

- Pask H.M., Carman R.J., Hanna D.C., Tropper A.C., Mackechnie C.J., Barber P.R., Dawes J.M. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 1, 2 (1995).
- Gapontsev V.P., Samartsev I.E. Techn. Dig. Conf. «Advanced Solid State Lasers» (Hilton Head, South Carolina, USA, 1991) WC1-2/214.
- Brown D.C., Hoffman H.J. IEEE J. Quantum Electron., 37, 207 (2001).
- 4. Brilliant N.A., Lagonik K. Opt. Lett., 26, 1669 (2001).
- Gapontsev V.P., Platonov N.S., Shkurihin O., Zaitsev I. Postdeadline Papers Book, CLEO 2003 (Baltimore, USA, 2003) CThPDB9.
- Gapontsev V.P. Techn. Dig. Conf. «Photonics West, LASER 2004» (San Jose, USA, 2004) 5335-32.
- Barannikov Yu., Oussov A., Scherbina F., Yagodkin R., Gapontsev V., Platonov N. *Techn. Dig. CLEO 2004* (San Francisco, 2004).
- Nilsson J., Sahu J.K., Jeong Y., Clarkson W.A., Selvas R., Grudinin A.B., Alam S.U. Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng., 4974, 50 (2003).
- McCumber D.E. Phys Rev., 134, A299 (1964).
- Lei G., Anderson J.E., Buchwald M.I., Edwards B.C., Epstein R.I. Phys. Rev. B, 57, 7673 (1998).
- 11. Vyatkin M., Grabarnik S., Ryabushkin O., Gapontsev V. Techn. Dig. «2nd Intern. Symp. on High Power Fiber Lasers and Their Applications» (St. Petersburg, 2003) Paper 2.8.
- Грабарник С. Выпускная квалификационная работа на степень магистра (М.: МФТИ, 2003).