ПУЧКИ, МОДЫ

PACS 42.55.Px; 42.60.Da

Приближённое условие ортогональности для мод открытого резонатора

Д.В.Батрак, А.П.Богатов

Получено простое условие ортогональности для мод открытого резонатора в скалярном приближении для поля, являющееся прямым следствием волнового уравнения и граничных условий на зеркалах резонатора. Полученное условие применимо для широкого класса систем – резонатор может быть заполнен произвольно-неоднородной усиливающей средой со слабой дисперсией.

Ключевые слова: *открытый резонатор, мода резонатора, ортогональность.*

1. Введение

Исследование динамики лазерных систем является актуальной областью современной науки. В классическом приближении динамика поля в резонаторе лазера описывается уравнениями Максвелла. Непосредственное решение этой системы уравнений в частных производных даже для простых случаев затруднительно, поэтому для многих задач используют разложение поля по модам резонатора, что позволяет свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд мод. Существенным условием применимости этого метода является взаимная ортогональность мод резонатора. Для закрытого резонатора с идеально отражающими стенками, заполненного однородной средой, условие ортогональности обычно записывают в виде

$$\int U_m^*(\boldsymbol{r}) U_{m'}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V = 0 \quad \text{при} \quad m \neq m'. \tag{1}$$

Поскольку в данном случае моды резонатора $U_m(\boldsymbol{r})$, представляющие собой стоячие волны, всегда можно выбрать действительными, то комплексное сопряжение в этом условии можно опустить, записав его в виде [1]

$$\int U_m(\boldsymbol{r}) U_{m'}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V = 0 \quad \text{при} \quad m \neq m' \tag{2}$$

(здесь и далее мы будем пользоваться скалярным приближением для поля).

Резонатор лазера – принципиально открытая система, для вывода излучения одно или оба его зеркала делают частично пропускающими. Для мод такого резонатора условие (1) не выполняется. Чтобы обойти это обстоятельство, широко применялся следующий подход: потери на зеркалах заменялись потерями, равномерно распределёнными по объёму резонатора (см., напр., [1, 2]). Однако было показано, что для ряда задач такое рассмотрение приводит к неверным результатам в случае, когда коэффициенты отражения зеркал резонатора существенно меньше единицы. В частности, корректный учёт потерь, локализованных на зеркалах резонатора, даёт выражение для естественной ширины линии одночастотной генерации лазера, отличающееся от классической модифицированной формулы Шавлова – Таунса дополнительным множителем [3, 4]. Например, для лазера с коэффициентами отражения зеркал 100 % и 1 % этот множитель равен 4.6 [4]. Следует отметить, что столь низкое значение коэффициента отражения зеркал вполне реально для полупроводниковых лазеров, и данный вопрос актуален, в основном, именно для этого типа лазеров.

Вопрос ортогональности мод открытого резонатора рассматривался несколькими авторами. В работах [5, 6] используется подход, заключающийся во введении системы сопряжённых мод, биортогональной исходной системе мод. Также было предложено условие ортогональности для мод открытого резонатора в комплексной форме, не требующее определения сопряжённых мод [7]. Для большого количества лазерных систем, однако, с хорошей точностью применимо скалярное приближение для поля. В настоящей работе выводится аналогичное полученному в [7], но более простое условие ортогональности в скалярном приближении. Вывод базируется на скалярном волновом уравнении для поля. Предлагаемое условие применимо для широкого класса систем – резонатор может быть заполнен произвольно-неоднородной усиливающей средой со слабой дисперсией. В случае однородной среды это условие совпадает с (2).

Нужно отметить, что условие ортогональности, полученное нами, использовалось ранее в работе [8], а его векторный аналог – в работе [9], однако, насколько нам известно, вывод этого условия приводится впервые.

2. Вывод условия ортогональности

Рассмотрим объёмный резонатор, ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = L$, заполненный изотропной средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_\omega(\boldsymbol{r})$. Полагаем, что вне резонатора (т. е. при $z < 0$ или $z > L$) $\varepsilon_\omega(\boldsymbol{r}) = 1$.

Д.В.Батрак, А.П.Богатов. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53;
e-mail: bogatov@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 7 декабря 2004 г.

Моды такого резонатора в скалярном приближении – это решения волнового уравнения

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_\omega(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{3}$$

содержащие при $z < 0$ и $z > L$ только волны, уходящие от резонатора. Такие решения существуют лишь при дискретном наборе значений частоты ω. Эти значения и отвечающие им решения обозначим ω_m и $U_m(\boldsymbol{r})$ соответственно. Величины ω_m, вообще говоря, комплексны. Знак $\mathrm{Im}\omega_m$ связан с нарастанием ($\mathrm{Im}\omega_m > 0$) или убыванием ($\mathrm{Im}\omega_m < 0$) поля со временем, что соответствует временной зависимости поля $\sim\exp(-\mathrm{i}\omega_m t)$.

Запишем уравнение (3) для двух различных мод U_m и $U_{m'}$ (полагаем, что $\omega_m \neq \omega_{m'}$):

$$\begin{gathered} \Delta U_m + \frac{\omega_m^2}{c^2}\,\varepsilon_{\omega_m}U_m = 0, \\ \Delta U_{m'} + \frac{\omega_{m'}^2}{c^2}\,\varepsilon_{\omega_{m'}}U_{m'} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Умножая первое уравнение на $U_{m'}$, второе – на U_m, беря их разность и интегрируя по объёму резонатора, получаем

$$\int (U_{m'}\Delta U_m - U_m\Delta U_{m'})\mathrm{d}V + \int\left(\frac{\omega_m^2}{c^2}\,\varepsilon_{\omega_m} - \frac{\omega_{m'}^2}{c^2}\,\varepsilon_{\omega_{m'}}\right)U_mU_{m'}\mathrm{d}V = 0. \tag{5}$$

Вследствие тождества $U_{m'}\Delta U_m - U_m\Delta U_{m'} \equiv \nabla(U_{m'}\nabla U_m - U_m\nabla U_{m'})$ первый интеграл в этом равенстве сводится к интегралу по площади границ резонатора. При типичном условии, что функции U_m и $U_{m'}$ обращаются в нуль на боковых гранях резонатора, в этом интеграле остаются только вклады от выходных граней:

$$\int\left(U_{m'}\,\frac{\partial U_m}{\partial z} - U_m\,\frac{\partial U_{m'}}{\partial z}\right)_{z=L}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\left(U_{m'}\,\frac{\partial U_m}{\partial z} - U_m\,\frac{\partial U_{m'}}{\partial z}\right)_{z=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\left(\frac{\omega_m^2}{c^2}\,\varepsilon_{\omega_m} - \frac{\omega_{m'}^2}{c^2}\,\varepsilon_{\omega_{m'}}\right)U_mU_{m'}\mathrm{d}V = 0. \tag{6}$$

Теперь мы покажем, что интегралами по выходным граням можно также пренебречь с определенной точностью. Для кусочно-непрерывной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ выражение

$$\int\left(U_{m'}\,\frac{\partial U_m}{\partial z} - U_m\,\frac{\partial U_{m'}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

непрерывно по z, и в уравнении (6) первые два интеграла можно вычислять при $z = L + 0$ и $z = 0 - 0$ соответственно, т. е. вне резонатора. Вне резонатора функции U_m удовлетворяют волновому уравнению (3) с $\varepsilon = 1$. Рассмотрим, к примеру, правую грань и запишем фурье-разложение для функции U_m при $z = L$:

$$U_m(x, y, L) = \int\int B_m(k_x, k_y)\exp[\mathrm{i}(k_xx + k_yy)]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y. \tag{7}$$

Решение волнового уравнения для $z > L$, содержащее только волны, идущие от лазера, может быть записано в следующем виде:

$$U_m(x, y, z) = \int\int B_m(k_x, k_y)\exp\left\{\mathrm{i}\left[k_xx + k_yy + \left(\frac{\omega_m^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2\right)^{1/2}(z - L)\right]\right\}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y,\ z > L. \tag{8}$$

Используя (8) и аналогичное для функции $U_{m'}$ выражение, получим

$$\int\left(U_{m'}\,\frac{\partial U_m}{\partial z} - U_m\,\frac{\partial U_{m'}}{\partial z}\right)_{z=L}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{i}(2\pi)^2\,\frac{\omega_m - \omega_{m'}}{c} \times \int\int\frac{\left(\omega_m^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2\right)^{1/2} - \left(\omega_{m'}^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2\right)^{1/2}}{(\omega_m - \omega_{m'})/c} \times B_m(k_x, k_y)B_{m'}(-k_x, -k_y)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y. \tag{9}$$

Для удобства мы вынесли за интеграл множитель $(\omega_m - \omega_{m'})/c$. Теперь проведём оценку полученного интеграла, заменив дробь в подынтегральном выражении единицей. Такое приближение даст правильный порядок величины интеграла, если хотя бы одна из функций $B_m(k_x, k_y)$, $B_{m'}(k_x, k_y)$ мала при значениях $k_\perp \equiv (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, близких к $k_{0m,m'} \equiv \omega_{m,m'}/c$ (а также при $k_\perp > k_{0m,m'}$), или, иными словами, если излучение, выходящее из резонатора, хотя бы для одной из рассматриваемых мод не содержит сколько-нибудь значимых компонент, распространяющихся под углами к оси резонатора, близкими к 90° (а также компонент, испытывающих полное внутреннее отражение на зеркалах резонатора). Итак, в этом приближении можно записать:

$$\int\left(U_{m'}\,\frac{\partial U_m}{\partial z} - U_m\,\frac{\partial U_{m'}}{\partial z}\right)_{z=L}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim \mathrm{i}(2\pi)^2\,\frac{\omega_m - \omega_{m'}}{c} \times \int\int B_m(k_x, k_y)B_{m'}(-k_x, -k_y)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y. \tag{10}$$

С помощью преобразования, обратного (7), получим

$$\int\left(U_{m'}\,\frac{\partial U_m}{\partial z} - U_m\,\frac{\partial U_{m'}}{\partial z}\right)_{z=L}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim \mathrm{i}\,\frac{\omega_m - \omega_{m'}}{c} \times \int\int U_m(x, y, L)U_{m'}(x, y, L)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{11}$$

Используя аналогичные соображения для интеграла по левой грани в равенстве (6), приходим к выражению

$$\int\frac{\omega_m^2\varepsilon_{\omega_m} - \omega_{m'}^2\varepsilon_{\omega_{m'}}}{\omega_m^2 - \omega_{m'}^2}\,U_mU_{m'}\mathrm{d}V \sim \mathrm{i}\,\frac{c}{\omega_m + \omega_{m'}} \times \left[\int\int U_m(x, y, L)U_{m'}(x, y, L)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \right.$$

$$+\int\int U_m(x,y,0)U_{m'}(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]. \qquad (12)$$

Отсюда видно, что с точностью порядка λ/L (где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны излучения в вакууме) при $m \neq m'$ выполняется условие ортогональности

$$\int \frac{\omega_m^2 \varepsilon_{\omega_m} - \omega_{m'}^2 \varepsilon_{\omega_{m'}}}{\omega_m^2 - \omega_{m'}^2}\, U_m U_{m'} \mathrm{d}V = 0, \qquad (13)$$

т. е. для функций U_m и $U_{m'}$, нормированных условием $\int nn_{\mathrm{g}} U^2 \mathrm{d}V = 1$, интеграл (13) имеет порядок величины λ/L ($nn_{\mathrm{g}} = \lim_{\omega_m \to \omega_{m'}}[(\omega_m^2\varepsilon_{\omega_m} - \omega_{m'}^2\varepsilon_{\omega_{m'}})/(\omega_m^2 - \omega_{m'}^2)]$, где $n \equiv \sqrt{\varepsilon}$ – фазовый, а $n_{\mathrm{g}} \equiv n + \omega \times \partial n/\partial\omega$ – групповой показатели преломления).

Для среды со слабой дисперсией в случае $|\omega_m - \omega_{m'}| \ll \omega_{m,m'}$ условие (13) при $m \neq m'$ сводится к

$$\int nn_{\mathrm{g}} U_m U_{m'} \mathrm{d}V = 0. \qquad (14)$$

Для среды без дисперсии из (13) при $m \neq m'$ сразу следует

$$\int n^2 U_m U_{m'} \mathrm{d}V \equiv \int \varepsilon U_m U_{m'} \mathrm{d}V = 0, \qquad (15)$$

если же среда однородна, условие (13) сводится к (2).

При вычислении вклада спонтанного излучения в лазерную моду использование традиционного (1) или уточнённого (14) условия ортогональности приводит к соответствующему виду нормировочного множителя для амплитуды поля лазерной моды. В случае соотношения (1) амплитуда пропорциональна $[\int |U_m|^2 \mathrm{d}V]^{-1}$, а в случае (14) – $[\int U_m^2 \mathrm{dV}]^{-1}$ (если относительным изменением фазового и группового преломления в объёме резонатора в выражении (14) можно пренебречь). В подавляющем большинстве случаев конечным результатом расчёта излучательных характеристик лазера является интенсивность или спектральная плотность излучения, т. е. величины, квадратичные (по модулю) по амплитуде поля. При этом использование уточнённого соотношения (14) приводит к результату, который отличается от полученного при использовании соотношения (1) множителем $|\int |U_m|^2 \mathrm{d}V|^2 / |\int U_m^2 \mathrm{d}V|^2$. В частных случаях этот множитель может сводиться к фактору Петермана [10] и к фактору Генри [4]; если же зависимость поля от координаты z и от поперечных координат x, y факторизуется, данный множитель является произведением указанных факторов. Как было отмечено во Введении, количественное значение этого множителя для типичных полупроводниковых лазеров может быть в несколько раз больше единицы, что обуславливает необходимость использования условия ортогональности именно в виде (13), (14).

3. Заключение

В настоящей работе получены приближённые условия ортогональности (13) и (14) для мод открытого резонатора. Эти условия достаточно просты в использовании и в то же время позволяют учитывать в наиболее общем виде пространственную неоднородность активной среды. Так, условие (14) применялось в работе [11] для расчёта «естественной» ширины линии генерации и флуктуаций интенсивности РОС-лазера с наклонной решеткой, резонатор которого представляет собой сложную оптическую систему. Показано, что точность условия ортогональности определяется отношением λ/L и, следовательно, должна быть вполне адекватной для значительного класса резонаторов полупроводниковых лазеров.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Президиума РАН в рамках программ «Низкоразмерные квантовые структуры» и «Полупроводниковые лазеры».

1. Ярив А. *Квантовая электроника, изд-е 2-е* (М.: Сов. радио, 1980).
2. Chow W.W., Koch S.W., Sargent III M. *Semiconductor-Laser Physics* (New York: Springer-Verlag, 1994).
3. Ujihara K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **20**, 814 (1984).
4. Henry C. H. *J. Lightwave Technol.*, **4**, 288 (1986).
5. Siegman A.E. *Opt. Commun.*, **31**, 369 (1979).
6. Hamel W.A., Woerdman J.P. *Phys. Rev. A.*, **40**, 2785 (1989).
7. Wenzel H., Wünsche H.-J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 2073 (1994).
8. Baraff G.A., Smith R.K. *Phys. Rev. A.*, **61**, 043808 (2000).
9. Streiff M., Witzig A., Pfeiffer M., Royo P., Fichtner W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **9**, 879 (2003).
10. Streiff M., Witzig A., Pfeiffer M., Royo P., Fichtner W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **9**, 879 (2003).
11. Batrak D.V., Bogatov A.P., Drakin A.E., Stratonnikov A.A., Kamenets F.F. *J. Opt. A*, **6**, 557 (2004).