

Изменение формы фемтосекундного импульса во времени при фокусировке

М.К.Лебедев, Ю.А.Толмачев, М.В.Фроленкова, А.В.Кытманов

Импульсным методом исследована дифракция сходящейся сферической волны на отверстии. Для круглого отверстия получены простые соотношения, описывающие влияние краевой волны на временную форму сигнала на оси симметрии системы. Изучена пространственно-временная структура в окрестности точки фокуса. Установлено, что независимо от величины телесного угла освещенного сектора в фокусе формируется сигнал, пропорциональный первой производной амплитуды входного импульса по времени.

Ключевые слова: фемтосекундный импульс, дифракция, фокусировка, дифференцирование импульса.

Расчет распределения амплитуды поля волны вблизи фокуса объектива является начальным этапом решения любой задачи взаимодействия фемтосекундных сигналов с линейной или нелинейной физической системой. Для решения задачи преобразования пространственно-временной формы импульса, имеющего практически произвольную структуру, может быть применен предложенный нами в работах [1–3] метод анализа. Этот метод предполагает исследование дифракции скалярного волнового возмущения, имеющего δ -образную форму во времени. В частности, в данной работе, используя приближение Кирхгофа, мы анализируем формирование поля в окрестности фокальной точки скалярной, однородной по амплитуде сферической волны, ограниченной круглой диафрагмой. Сформированная картина развития поля допускает значительно более простую и наглядную интерпретацию, чем картины, полученные другими методами. Исследование ведется в линейном приближении, взаимодействие с веществом не рассматривается. Выводы настоящей работы вполне соответствуют классической теории дифракции, однако найденные соотношения по форме более удобны для описания дифракции поля именно ультракоротких (в частности – предельно коротких) импульсов. Полученные результаты точно совпадают с данными работы [4] для области перед фокальной точкой. Найденные соотношения позволяют вычислить сигналы не только в освещенной (в приближении геометрической оптики) области пространства, но и в области тени. При этом аналитическое решение для самой фокальной точки имеет новую форму. Существует качественное согласие с результатами работы [5], полученными совершенно иным методом, а также точное соответствие данным классической теории дифракции монохроматических сходящихся сферических волн [6] в приближении Кирхгофа.

М.К.Лебедев, Ю.А.Толмачев, М.В.Фроленкова, А.В.Кытманов. Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет, Россия, 198504 С.-Петербург, Старый Петергоф, ул. Уляновская, 1; e-mail: Yuri.Tolmach@rambler.ru

Поступила в редакцию 4 октября 2004 г.

Воспользуемся соотношением работы [3], описывающим дифракцию δ -образной во времени плоской волны на точечном отверстии в начале координат в поглощающем экране. Пусть экран находится в плоскости $xу$, а направление распространения волны принимаем за ось z , т. е. волновое возмущение имеет вид $f(t, z) = \delta(t - z/c)$. Согласно [3] для произвольной точки наблюдения P в пространстве за экраном с координатами x_0, z_0 (в сферической системе координат, начало которой совмещено с отверстием, она имеет координаты r, ψ, φ) для амплитуды поля получаем выражение

$$h_0(r, t) = \frac{z_0}{r^3} \delta(t - r/c) + \frac{1}{cr} (1 + z_0/r) \delta_t(t - r/c), \quad (1)$$

где

$$z_0 = r \cos \psi; \quad \delta_t(t - r/c) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - r/c).$$

Соотношение (1) является точным решением задачи дифракции в приближении Кирхгофа.

Используя (1), можно вычислить отклик отверстия любой формы, освещенного произвольным во времени сигналом (в частности, монохроматической волной). Для этого необходимо провести интегрирование (1) по поверхности отверстия, учитывая исходное направление распространения волны и ее амплитуду в данной точке, а затем вычислить свертку реального сигнала с полученным на первом этапе импульсным откликом. Подобная процедура легко реализуется численными методами, а в некоторых случаях можно получить простые аналитические соотношения и сделать общие выводы о структуре поля.

В частности, решение нескольких задач дифракции плоской волны [7–12] показало, что в приближении δ -образного волнового возмущения, освещающего апертуру конечного размера, за экраном существует участок исходной волны, форма и размеры которого совпадают с формой и размерами отверстия и не зависят от расстояния от экрана, а также волна, которую на основании геометрических соображений можно считать излучаемой краем отверстия. Этот вывод полностью совпадает с

выводами классической теории дифракции [6] и успешно используется при расчетах взаимодействия УКИ с оптическими системами в работах Бора с сотрудниками (см. [5] и приведенные там ссылки). В дальнейшем мы будем называть эту волну краевой.

Рассмотрим теперь сферическую δ -волну, поле которой

$$V(\rho, t) = \frac{1}{\rho} \delta\left(t - \frac{R - \rho}{c}\right), \tag{2}$$

где ρ – текущий радиус волны; R – исходный радиус волны. При $t < R/c$ соотношение (2) описывает сходящуюся волну с центром в точке фокуса F , принятой в данном случае за начало координат. Дифракция такой волны на круглом отверстии является основным предметом настоящего исследования.

При решении задачи Кирхгофа в качестве замкнутой поверхности интегрирования S возьмем сферу радиусом R , совпадающую с начальным положением волны; радиус прозрачного отверстия в сфере положим равным a ($a < R$). Проведем через центры сферы и отверстия ось z , направленную от отверстия к фокусу, и обозначим через r расстояние от текущей точки интегрирования на фронте волны до точки наблюдения P . В соответствии с рис.1 оно определяется соотношением

$$r^2 = R^2 + (R - \zeta)^2 - 2R(R - \zeta) \cos \vartheta, \tag{3}$$

где ζ – расстояние от точки наблюдения до ближайшей к ней точки поверхности S по нормали к фронту волны; ϑ – угол между направлением на точку наблюдения и направлением на текущую точку интегрирования с вершиной в точке фокуса F .

Выражения для «запаздывающих» величин, входящих в интеграл Кирхгофа [6], для сферической волны имеют вид

$$\begin{aligned} [V] &= \frac{\delta(t - r/c)}{R}, \\ \left[\frac{\partial V}{\partial t}\right] &= \frac{\delta_t(t - r/c)}{R}, \\ \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] &= \frac{\delta(t - r/c)}{R^2} - \frac{\delta_t(t - r/c)}{cR}. \end{aligned} \tag{4}$$

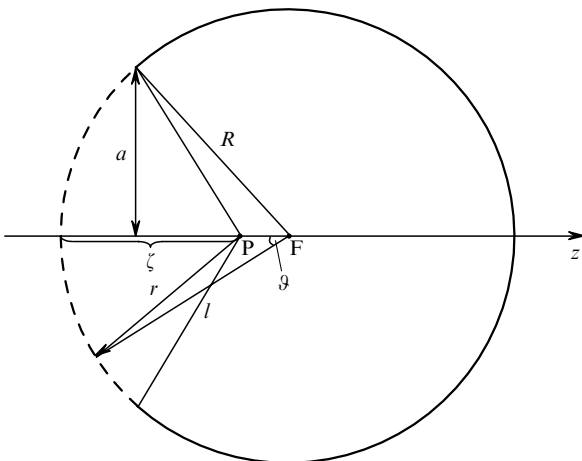


Рис.1. Система координат.

Перейдем к координатам r, φ , где φ – угол поворота вокруг прямой, проходящей через точку наблюдения P и точку фокуса F . Введем также аналогично [2, 3, 13] функцию $\Phi(r) \equiv \int_0^{2\pi} T(r, \varphi) d\varphi$, где T – амплитудное пропускание экрана в пределах отверстия. Вычислив интеграл Кирхгофа, получаем

$$\begin{aligned} V(P, t) &= \frac{(ct + 2R - \zeta)(ct + \zeta)}{8\pi t R(R - \zeta)} \frac{d\Phi(ct)}{d(ct)} \{ \Theta(t - \zeta/c) \\ &- \Theta[t - (2R - \zeta)/c] \} + \frac{1}{2\pi(R - \zeta)} \Phi(\zeta) \delta(t - \zeta/c) \\ &- \frac{1}{2\pi(R - \zeta)} \Phi(2R - \zeta) \delta[t - (2R - \zeta)/c]. \end{aligned} \tag{5}$$

Первое слагаемое в этом выражении описывает краевую волну. Множитель, содержащий разность функций Хевисайда Θ , определяет временные границы, в которых возможно, в принципе, существование в заданной точке наблюдения P отличного от нуля возмущения, вызванного краевой волной. Реальные значения этого временного интервала определяются не только граничными расстояниями от точки P до ближайшего к ней и самого удаленного от нее краев отверстия, но и видом функции $d\Phi(ct)/d(ct)$.

Физический смысл второго и третьего слагаемого установить проще всего, если предположить, что имеется однородно пропускающее прозрачное круглое отверстие, т.е. $T = 1$ в пределах отверстия и $T = 0$ на остальной поверхности экрана. Внутреннее пространство сферы разделим на две половины плоскостью, проходящей через центр сферы нормально к оси z . Пусть точка наблюдения P расположена в левой, ближайшей к отверстию, половине области пространства, охватываемой поверхностью S , и находится в освещенной зоне (рис.1). Проведенный из фокуса через точку наблюдения луч всегда пересекает исходный фронт волны, следовательно $\Phi(\zeta) = 2\pi$. В наиболее удаленной от P точке сферы сигнал равен нулю, $\Phi(2R - \zeta) = 0$ и третье слагаемое в (5) обращается в нуль. Таким образом, второе слагаемое описывает пропущенную экраном часть исходной волны, сходящейся к фокусу.

Из рис.1 видно, что $\Phi(\zeta) = 2\pi$ тогда и только тогда, когда точка наблюдения находится в пределах конуса с вершиной в точке F , опирающегося на края отверстия, т.е. лежит в пределах зоны, освещенной исходной сходящейся δ -волной. Полная форма импульсного отклика в такой точке определяется суммой исходной волны и краевой. Если точка P расположена в правой полусфере, то нетрудно видеть, что ситуация меняется на противоположную: в нуль обращается множитель при втором слагаемом, а $\Phi(2R - \zeta) = 2\pi$. Таким образом, третье слагаемое описывает расходящуюся δ -волну, уже прошедшую через фокус. Из (5) видно, что знак поля этой волне противоположен знаку поля волны, падающей на отверстие. Такое изменение знака совпадает с данными работы [5] и соответствует изменению на π фазы монохроматической волны при прохождении ее через фокальную точку [6]. В свободном пространстве для однородной замкнутой сферической волны $\Phi(ct) = 2\pi$ и $d\Phi(ct)/d(ct) = 0$ при всех $ct \in [\zeta, 2R - \zeta]$. Отличны от нуля только второе и третье слагаемое в (5), краевая волна отсутствует.

Характер полученных решений для левой полусферы качественно схож с характером решений для дифракции плоской волны на круглом отверстии: за экраном распространяется «вырезанный» отверстием участок падающей волны, в данном случае – сходящейся сферической. Эта волна распространяется внутри конуса с вершиной в точке F, опирающегося на края отверстия. Конус играет роль границы свет – тень и для плоской волны соответствует цилиндру, опирающемуся на границы отверстия. Одновременно в пространстве имеется волна, рассеянная краем. Рассчитанная форма распределения амплитуд в этой волне для нескольких моментов времени показана на рис.2. Как и в рассмотренном ранее случае плоской волны, длительность отклика краевой волны в любой точке наблюдения определяется расстояниями от этой точки до наиболее удаленного и наиболее близкого к ней краев отверстия. Более детальное исследование показывает, что знак поля изменяется на границе свет – тень.

На рис.2 хорошо видно наличие особенности поля краевой волны на оси симметрии системы, где пространственная область существования соответствующего сигнала обращается в точку. Эта точка движется со скоростью, большей c [1, 9], перед фокусом она «догоняет», а после него – «опережает» исходную волну. Выражение для импульсного отклика круглого отверстия на оси z имеет вид

$$V(\zeta, t) = \frac{1}{R - \zeta} \delta(t - \zeta/c) - \frac{1}{2(R - \zeta)} \times \left[1 + \frac{R}{l} - \frac{(R^2 - a^2)^{1/2}}{l} + \frac{(R^2 - a^2)^{1/2}}{Rl} \zeta \right] \delta(t - l/c), \quad (6)$$

где l – расстояние от точки наблюдения до края отверстия. Вновь имеется аналогия со случаем дифракции плоской волны [1, 2, 3]: сигнал состоит из двух δ -функций разного знака, которые соответствуют прошедшей и краевой волнам.

Нетрудно видеть, что если точка наблюдения P находится на оси z по отношению к экрану ближе, чем фокус, то вначале в нее приходит вырезанный отверстием сегмент падающей сходящейся сферической волны (в нашем случае – положительный δ -импульс), а затем – отрицательный δ -импульс краевой волны. В области правой полусферы (за точкой фокуса) расстояние от края отверстия до точки наблюдения, лежащей на оси z , становится меньше, чем расстояние вдоль оси, и картина меняется на обратную. Однако суммарный импульсный

отклик вновь имеет вид последовательности положительной и отрицательной δ -функций. Следовательно, обе волны – как проходящая, так и краевая – изменяют знак, пройдя через центр кривизны.

Вблизи фокуса стоящая в квадратных скобках в (6) сумма стремится к 2, а

$$V(\zeta, t) \xrightarrow{\zeta \rightarrow F} \frac{a^2}{2Rc} \delta(t - R/c). \quad (7)$$

Воздействие оператора δ_t на реальный входной сигнал соответствует его дифференцированию по времени, т. е. в точке фокуса должна наблюдаться первая производная по времени исходного сигнала. В теории дифракции сложных по форме плоских волн с ограниченным спектром подобная особенность временной структуры сигнала при больших расстояниях от точки наблюдения до отверстия хорошо известна [14]. К такому же (качественно) заключению мы придем, взяв за исходные выводы работы [1–3] и вспомнив, что фокус линзы есть изображение бесконечно удаленной точки.

Сопоставим полученный результат с данными теории дифракции монохроматической сферической волны [6]. Упростим выражение (6) для отклика круглого отверстия на δ -образную волну в непосредственной окрестности точки фокуса. Введем линейную координату z' , отсчитываемую от точки F, и проведем замену переменной времени, отсчитывая время τ от $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ – середины интервала между моментами времени t_1 и t_2 последовательного появления двух δ -функций. Тогда $\tau = t - t_0$ и вместо (6) получаем выражение

$$V(z', \tau) \approx \frac{1}{x} \left[\delta\left(\tau + \frac{z'}{c} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - \delta\left(\tau - \frac{z'}{c} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \right], \quad (8)$$

$$-\frac{t_2 - t_1}{2} < \tau < +\frac{t_2 - t_1}{2},$$

где α – апертурный угол между осью z и краем отверстия.

Вычислив фурье-образ (8) и опустив фазовый множитель, описывающий задержку волны относительно ее исходного положения, имеем

$$A(z', \lambda) = 4\pi i \frac{\sin^2(\alpha/2)}{\lambda} \times \left[\sin\left(2\pi \frac{z'}{\lambda} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) / \left(2\pi \frac{z'}{\lambda} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \right], \quad (9)$$

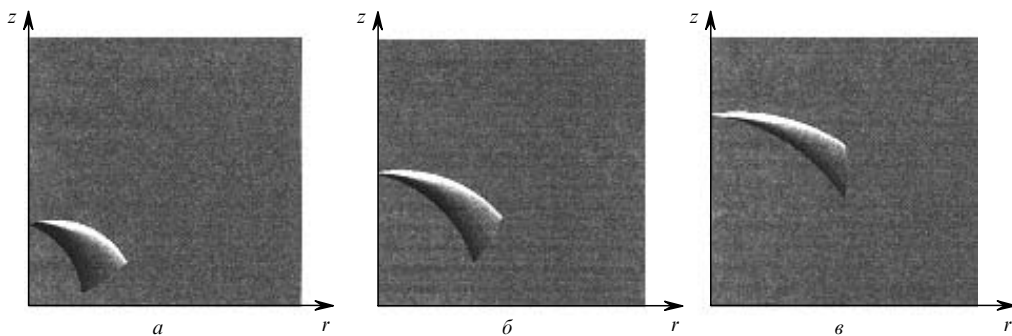


Рис.2. Развитие во времени краевой волны при освещении круглого отверстия сходящейся сферической δ -волной: распределения поля в плоскости, проходящей через центр сферы (серый фон – нулевые значения амплитуды, более светлые пиксели – положительные значения амплитуды, более темные – отрицательные, поле существует только внутри сферы), в моменты времени, когда возбуждающая волна находится перед фокусом (а), в фокусе (б) и после него (в).

где $A(z', \lambda)$ – спектральная плотность амплитуды волны. Соотношение (9) совпадает с известным распределением амплитуд вблизи фокуса монохроматической сферической волны [6].

Таким образом, импульсный метод позволил установить, что причины формирования в окрестности фокуса двух одинаковых по амплитуде δ -импульсов на оси симметрии различны. В левой полусфере (перед фокусом) первый импульс является элементом падающей волны, а второй – дифрагировавшей, чья структура соответствует излучению края отверстия и несколько «запаздывает» относительно первичной. В правой полусфере (после фокуса) оба импульса меняют знак, теперь уже краевая волна опережает первичную, перемещаясь вдоль оси z везде, за исключением точки фокуса, со скоростью, большей c . Внешне это выглядит как сохранение формы полного импульсного отклика. Лишь при неоднородном пропускании отверстия два импульса становятся различимыми по форме зависимости амплитуды от времени (как это проявляется, например, при изучении дифракции на гауссовой диафрагме [8]).

Дополнительной иллюстрацией правильности полученного результата являются данные численного расчета пространственно-временной структуры сигнала. Для удобства расчета скорость света c была положена равной единице ($c = 1$), а форма импульса взята в виде $f(t) = \exp[-(t/0.3)^2] \cos 2(t/0.3)$. Она приближенно соответствует модели УКИ, использованной в [15], и результатам измерений, приведенным в обзоре [16]. Эффективная пространственная протяженность такого сигнала намного меньше радиуса сферы, т. е. сигнал может рассматриваться как состоятельная модель δ -импульса. Сигнал задавался на поверхности сферы радиусом $R = 10c = 10$ в момент времени $t = 0$, и за направление распространения принималось направление к центру сферы. Предполагалось, что относительная апертура круглого отверстия равна 0.2.

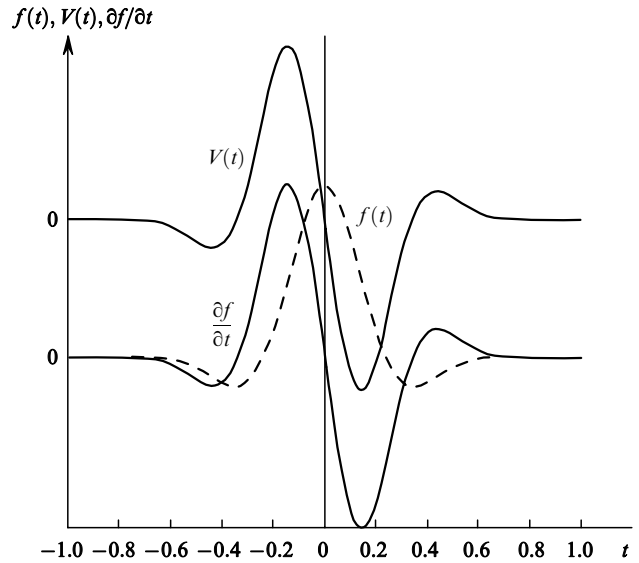


Рис.3. Форма импульса (амплитуды сигналов нормированы на значение в максимуме) на поверхности сферы $f(t)$ и в центре сферы (для удобства сдвинутом по оси ординат) $V(t)$, а также форма первой производной сигнала df/dt .

С целью ускорения расчетов на сферическом секторе было размещено случайным образом $N = 2500$ точечных источников, излучавших волну с амплитудой, описываемой выражением (1). Отметим, что уже при $N > 2000$ форма полученного в расчетах сигнала вблизи центра сферы практически переставала зависеть от N . На рис.3 показаны исходная функция $f(t)$, ее первая производная df/dt и сигнал в фокусе. Сравнение результатов численного эксперимента с производной df/dt подтверждает справедливость найденного нами преобразования формы исходного импульса. Численный расчет показал также совпадение структуры импульсного отклика в точках, симметрично расположенных относительно фокуса на

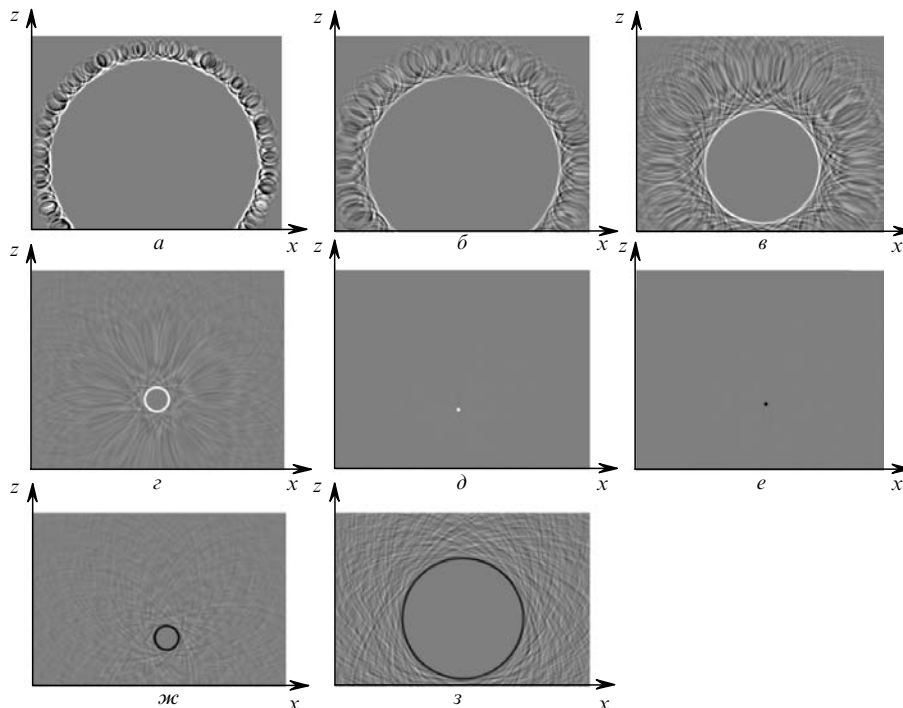


Рис.4. Результаты моделирования поля импульсной волны внутри сферы в моменты времени $t = 1$ (а), 2 (б), 5 (в), 9 (г), 9.92 (д), 10.08 (е), 11 (ж) и 15 (з).

оси z , как это и следует из (8). Таким образом, выполненное моделирование полностью подтверждает выводы об изменении знака амплитуды прошедшей и краевой волн при прохождении их через точку фокуса.

Следующим шагом стало моделирование распространения замкнутой сферической волны (очевидно, что краевая волна при этом отсутствует). На поверхности сферы радиусом $R = 10$ вновь размещались случайным образом точечные источники, общее число которых было увеличено до 10000. Начальная форма импульса на этот раз была выбрана гауссовой: $f(t) = \exp[-(t/0.3)^2]$. Отсутствие отрицательных экстремумов позволяет упростить качественную интерпретацию результатов расчета. Скорость распространения опять равна единице. Импульс излучается точками поверхности сферы в момент $t = 0$ по направлению к центру.

Изменение во времени распределения поля в плоскости, проведенной через центр сферы, демонстрирует серия «кадров фильма», приведенная на рис.4. Хорошо видно формирование сходящейся сферической волны, которая после прохождения через фокус становится расходящейся, причем одновременно изменяется знак ее амплитуды. Результаты расчета вновь подтверждают вывод об изменении полярности импульса при прохождении через фокус и о преобразовании его формы в первую производную по времени непосредственно в фокальной точке. Амплитуда волны, как и следовало ожидать, обратно пропорциональна времени ее распространения до центра (рис.5). Координаты излучающих точек на поверхности в этом расчете менялись во времени по случайному закону, что позволяло оценить точность расчета амплитуды импульса, число излучающих точек было увеличено до 180000.

В момент прохождения центра гауссова импульса через точку фокуса наблюдается особенность, хорошо видная на рис.5: амплитуда поля обращается в нуль. То же происходит и во всем пространстве внутри сферы (флуктуации амплитуды поля, хорошо заметные на рис.4 в этот момент времени, обусловлены конечной плотностью излучающих точек на поверхности). Данное обстоятельство с очевидностью указывает на проблемы, которые могут возникнуть, если при изучении вопросов, связанных с законом сохранения энергии, исключить слагаемое, которое определяется производной амплитуды по времени [17].

В заключение отметим, что рассмотренная в настоящей работе δ -образная сферическая волна (как и введенная нами ранее δ -образная плоская волна), подобно гармонической, не существует в природе и является идеальным математическим образом, удобным для исследования распространения импульсных волн в линейном приближении. Обычно при описании сложного волнового процесса с помощью монохроматических волн приходится рассматривать взаимодействие с оптической системой каждой из его гармонических составляющих, учитывать пространственно-временную фильтрацию волн системой и после этого выполнять обратное преобразование

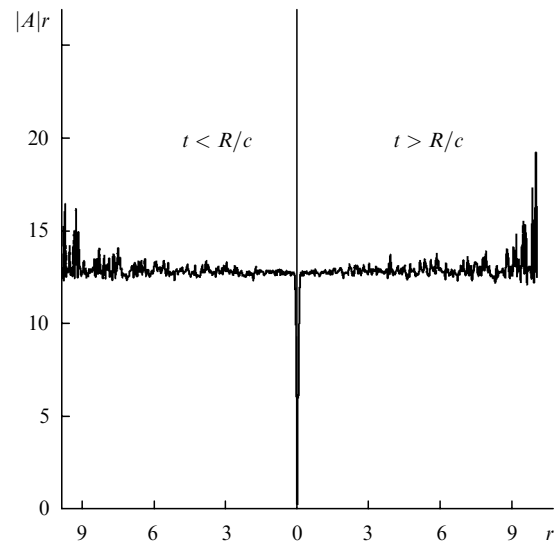


Рис.5. Зависимость амплитуды импульса $|A|r$ от его положения внутри сферы.

Фурье. В нашем случае на первом этапе необходимо найти импульсный отклик, для чего проводится интегрирование соотношения (1) по площади отверстия, а на заключительном — вычислить свертку отклика с реальным входным сигналом. Простота полученных в наших работах конечных соотношений показывает, что в применении к фемтосекундным, а также к любым другим предельно коротким сигналам развитый подход более предпочтителен, чем традиционный.

1. Сулейменов И.Э., Лебедев М.К., Толмачев Ю.А. *Оптика и спектроскопия*, **88** (1), 104 (2000).
2. Lebedev M.K., Tolmachev Yu.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4071**, 184 (2000).
3. Лебедев М.К., Толмачев Ю.А. *Оптика и спектроскопия*, **90** (3), 457 (2001).
4. Sherman G.C. *J. Opt. Soc. Am. A*, **6** (9), 1382 (1989).
5. Horvath Z.L., *Bor Zs. Phys. Rev. E*, **63**, 026601-1 (2001).
6. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970).
7. Лебедев М.К., Толмачев Ю.А. *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 4*, вып. 4 (№ 28), 83 (2002).
8. Лебедев М.К., Толмачев Ю.А. *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 4*, вып. 3 (№ 20), 15 (2003).
9. Лебедев М.К., Толмачев Ю.А., Антипов А.Г., Разманова М.В. *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 4*, вып. 4 (№ 28), 44 (2002).
10. Разманова М.В., Толмачев Ю.А. *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 4*, вып. 1 (№ 4), 22 (2003).
11. Лебедев М.К., Толмачев Ю.А. *Физическая мысль России*, вып.1/02, 59 (2002).
12. Frolenkova M.V., Tolmachev Yu.A. *Proc. Conf. LOYS-2003* (St. Petersburg, 2003, с. 7).
13. Levine H., Schwinger J. *Phys. Rev.*, **75** (9), 1423 (1949).
14. Гудмен Дж. *Введение в фурье-оптику* (М.: Мир, 1970).
15. Romallosa K.M., Bantang J., Saloma C. *Phys. Rev. A*, **68**, 033812 (2003).
16. Steinmeyer G. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **5**, R1 (2003).
17. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). *Теория звука. Т. 2* (М.: ГИТТЛ, 1955).