PACS 42.25.Bs

Поглощение электромагнитной волны неоднородной цилиндрической частицей

Э.В.Завитаев, А.А.Юшканов

Вычислено сечение поглощения энергии электромагнитной волны, электрическое поле которой направлено вдоль оси симметрии неоднородной цилиндрической частицы. Рассмотрен общий случай, когда отношение радиуса диэлектрического ядра к радиусу частицы может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренней и внешней поверхностей металлического слоя частицы. Рассмотрены также предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: *металлическая частица, электромагнитное излучение, сечение поглощения.*

1. Введение

Электромагнитные свойства мелких металлических частиц могут существенно отличаться от свойств массивных образцов металла [1]. Если линейный поперечный размер R образца металла будет примерно равен длине свободного пробега электронов Λ или меньше нее ($R < \Lambda$), то взаимодействие электронов с границей металлического образца начинает оказывать заметное влияние на их отклик на внешнее электромагнитное поле. Следствием этого и являются особые оптические свойства металлической частицы. Поэтому, когда выполняется условие $R < \Lambda$, одна из основных оптических характеристик – сечение поглощения – обнаруживает нетривиальную зависимость от отношения R/Λ. При комнатной температуре в металлах с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) длина свободного пробега электронов Λ лежит пределах 10 – 100 нм. Размеры же экспериментально исследуемых частиц достигают нескольких нанометров, т. е. реализуется условие $R < \Lambda$.

В качестве математического аппарата, способного описывать отклик электронов на внешнее электромагнитное поле с учетом взаимодействия электронов с границей образца, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [2]. В этом случае ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электронов и размером образца не накладываются.

Уравнения макроскопической электродинамики применимы лишь в случае «массивных» образцов, когда $R \gg \Lambda$. Поэтому известная теория Ми, которая описывает взаимодействие электромагнитной волны с металлическими телами в рамках макроскопической электродинамики, непригодна для описания указанного размерного эффекта.

В работах [3, 4] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей. Немного ранее в предельном случае $R \ll \Lambda$ для низких частот (дальний ИК диапазон) в [5, 6] получен результат, совпадающий с приведённым в [3]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. Альтернативный подход к проблеме предложен и развивается в работах [7, 8].

В последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [9]. Ряд работ ([10 – 13]) был посвящён описанию взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учёта квантово-механических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [14, 15]. В [3 – 6] и [10 – 13] теоретически описывалось только магнитное дипольное поглощение мелких металлических частиц. При этом во всех перечисленных выше работах, рассматривались только однородные частицы, т. е. не поднимался вопрос о внутренней структуре поглощающих частиц.

Однако в последнее время появились сообщения об экспериментальных исследованиях частиц со сложной внутренней структурой [16, 17]. Такие частицы состоят из диэлектрического (или металлического) ядра, окружённого металлической оболочкой, что, естественно, сказывается на оптических свойствах этих частиц. Важность рассмотрения частиц со сложной внутренней структурой отмечается, в частности, в работе [18]. Заметим, что задача о поглощении мелкими металлическими частицами электромагнитной волны является актуальной, например, при описании воздействия лазерного излучения на вещество.

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов проводимости в неоднородной цилиндрической частице (частица из металла с диэлектрическим ядром) на переменное электрическое поле плоской электромагнитной волны. По найденной функции распределения удаётся рассчитать зависимость сечения поглощения от радиуса частицы и частоты, а также от

Э.В.Завитаев, А.А.Юшканов. Московский государственный университет леса, Россия, 141005 Мытищи, Московская обл., ул. 1-я Институтская, 1; e-mail: yushkanov@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 3 ноября 2004 г., после доработки – 28 февраля 2005 г.

отношения радиуса ядра к радиусу частицы. Отдельно обсуждается важный случай низких частот внешнего поля и низких частот объёмных столкновений электронов в металлическом слое.

2. Математическая модель

Рассматривается цилиндрическая частица длиной L, состоящая из диэлектрического ядра радиусом R_1, окружённого оболочкой из немагнитного металла радиусом R_2 (считаем, что $L \gg R_2$), которая помещена в поле плоской электромагнитной волны с частотой ω, много меньшей частоты плазменного резонанса ω_p в металлах ($\omega_p \sim 10^{16}$ с$^{-1}$). Принимается, что направление электрического поля в электромагнитной волне совпадает с осью неоднородного цилиндра. Частица считается малой, что означает выполнение условия $R_2 \ll 2\pi c/\omega$ (c – скорость света в вакууме). Неоднородность внешнего поля волны и скин-эффект не учитываются (предполагается, что R_2 меньше глубины скин-слоя). В исследуемом диапазоне частот при данной ориентации электрического поля вклад токов дипольной электрической поляризации доминирует над вкладом вихревых токов, которые индуцируются внешним магнитным полем волны [3]. В связи с этим действие внешнего магнитного поля волны не учитывается.

Для достаточно длинного цилиндра электрическое поле волны в большей части объёма цилиндра остаётся неэкранированным. Для оценки параметров, при которых осуществляется этот режим, рассмотрим известное решение для вытянутого эллипсоида в электрическом поле [19]. Мы исходим из того, что достаточно длинный цилиндр можно аппроксимировать вытянутым эллипсоидом. Для этого воспользуемся результатами работы [19], в которой рассчитана напряжённость электрического поля внутри вытянутого эллипсоида вращения (фактически бесконечного цилиндра) с полуосями a, b, d ($a > b = d$), помещённого во внешнее однородное электрическое поле, направленное вдоль оси симметрии эллипсоида:

$$E_{\text{int}} = \frac{E_{\text{ext}}}{1 + (\varepsilon_{\text{int}} - 1)s(\beta)}, \quad s(\beta) = \frac{1-\beta^2}{2\beta^3}\left[\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 2\beta\right],$$

где E_{ext} – напряжённость внешнего электрического поля; E_{int} – напряжённость электрического поля в эллипсоиде; ε_{int} – диэлектрическая проницаемость эллипсоида; $s(\beta)$ – коэффициент, являющийся функцией эксцентриситета эллипсоида β ($\beta = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$). Если отсутствует экранировка, то $E_{\text{int}} \approx E_{\text{ext}}$ и, следовательно, $1 + (\varepsilon_{\text{int}} - 1)s(\beta) \approx 1$, что возможно при $|\varepsilon_{\text{int}} s(\beta)| \ll 1$ (единицей, стоящей в скобках, можно пренебречь, т. к. диэлектрическая проницаемость металлов очень велика).

Далее, воспользовавшись формулами Друде для частотной зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и проводимости металла $\Sigma(\omega)$ [20] (мы считаем, что частота внешнего поля мала по сравнению с частотой объёмных столкновений электронов внутри частицы, т. е. $\omega\tau \ll 1$)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \mathrm{i}\left[\frac{4\pi\Sigma(\omega)}{\omega}\right], \quad \Sigma(\omega) = \frac{\Sigma(0)}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}, \quad \Sigma(0) = e^2 n \frac{\tau}{m}$$

(где e и m – заряд и эффективная масса электрона в металле, n – концентрация электронов проводимости, τ – электронное время релаксации), а также определением эксцентриситета (полуоси b и a, если рассматривать вытянутый эллипсоид как бесконечный цилиндр, отождествляются с радиусом и полудлиной цилиндра: $b = R$, $a = L/2$; в случае вытянутого цилиндра $\beta \to 1$), методом последовательных приближений получаем искомое предельное соотношение между радиусом и длиной частицы ($\Gamma = R/L$):

$$\Gamma \ll \left[\frac{\omega}{2\pi\Sigma(0)}\right]^{1/2} \Big/ \left\{\ln\left[\frac{4\pi\Sigma(0)}{\omega}\right]\right\}^{1/2}.$$

Оценка по этой формуле для внешнего поля, частота которого, например, равна 10^9 с$^{-1}$, показывает, что в данном случае длина частицы должна превышать её радиус примерно в четыре раза (в случае больших частот внешнего поля экранировка практически отсутствует).

Нами используются также общепринятые физические допущения: электроны проводимости в металлической оболочке рассматриваются как вырожденный ферми-газ, и их отклик на внешнее переменное электрическое поле описывается с помощью уравнения Больцмана. В граничных условиях учитывается, что отражение электронов от внутренней поверхности металлической оболочки и поверхности ядра имеет диффузный характер.

Поглощение энергии электромагнитной волны неоднородной цилиндрической частицей можно описать следующим образом: однородное периодическое по времени электрическое поле волны

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1}$$

воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской функции f_0:

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = f_0(\mathscr{E}) + f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}), \quad \mathscr{E} = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2},$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ – радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы) и скорость электрона. Это приводит к возникновению высокочастотного тока с плотностью

$$\boldsymbol{j} = e\int \boldsymbol{v} f \frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2e\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \boldsymbol{v} f_1 d^3 v \tag{2}$$

(где h – постоянная Планка), а также к диссипации энергии в объёме частицы. Энергия, диссипируемая в единицу времени [19],

$$\bar{Q} = \int \overline{\operatorname{Re}\boldsymbol{E}\operatorname{Re}\boldsymbol{j}}\, d^3 r = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^* d^3 r. \tag{3}$$

Здесь чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой – комплексное сопряжение.

В формуле (2) используется стандартная нормировка функции распределения f, при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$. Для равновесной функции $f_0(\mathscr{E})$ далее используется ступенчатая аппроксимация [20]:

$$f_0(\mathscr{E}) = \theta(\mathscr{E}_F - \mathscr{E}) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_F, \\ 0, & \mathscr{E}_F < \mathscr{E}, \end{cases}$$

где $\mathscr{E}_\mathrm{F} = mv_\mathrm{F}^2/2$ – энергия Ферми (v_F – скорость Ферми). Предполагается, что ферми-поверхность имеет сферическую форму.

В настоящей работе используется предположение о непрерывности энергетического спектра электрона (квазиклассическое приближение). Это предположение справедливо в том случае, когда характерные размеры проводника превышают 3 – 4 нм, т. к. длина волны де Бройля для электрона на поверхности Ферми в оболочке частицы должна быть во много раз меньше соответствующего линейного размера частицы металла. Таким образом, будем считать, что толщина оболочки частицы превышает 3 – 4 нм.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной функции f_0, возникающего под действием поля (1). В линейном приближении по внешнему полю f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [2, 20]

$$-\mathrm{i}\omega f_1 + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}} + e(\boldsymbol{vE})\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} = -\frac{f_1}{\tau}, \tag{4}$$

где предполагается стационарная зависимость от времени, а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации:

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{f_1}{\tau}.$$

Решая уравнение (4) методом характеристик [21], получаем

$$f_1 = \frac{A[\exp(-\nu t') - 1]}{\nu}, \quad t' \geqslant 0, \tag{5}$$

где

$$\nu = \frac{1}{\tau} - \mathrm{i}\omega, \quad A = e(\boldsymbol{vE})\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}, \tag{6}$$

причём ν и A постоянны вдоль траектории (т. е. вдоль характеристики). Параметр t' в выражении (5) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки $\boldsymbol{r}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$.

Для однозначного определения функции f_1 необходимо задать для неё граничные условия на цилиндрических поверхностях металлической оболочки и диэлектрического ядра частицы. В качестве таковых используем условия диффузного отражения электронов от этих поверхностей [2]. Поскольку электроны могут отражаться от внутренней (R_1) и внешней (R_2) границ металлического слоя, то необходимо записать два граничных условия:

$$f_{11}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{r}_\perp| = R_1, \ \boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp > 0, \tag{7}$$

$$f_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{r}_\perp| = R_2, \ \boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp < 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{r}_\perp$ и $\boldsymbol{v}_\perp$ – соответственно компоненты радиуса-вектора электрона и его скорости $\boldsymbol{v}$ в плоскости, перпендикулярной оси неоднородного цилиндра. Случай $\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp > 0$ ($\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp < 0$) соответствует движению электронов от ядра (к ядру).

При отражении электрона от внутренней границы (R_1) параметр t' в формуле (5) определяется выражением

$$t' = t_1 = \frac{\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp - \left[(\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp)^2 + (R_1^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\right]^{1/2}}{v_\perp^2}, \tag{9}$$

а при отражении электрона от внешней границы (R_2) – выражением

$$t' = t_2 = \frac{\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp + \left[(\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp)^2 + (R_2^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\right]^{1/2}}{v_\perp^2}. \tag{10}$$

Это ясно из следующих геометрических соображений. Используя очевидное векторное равенство $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t'$, где $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор электрона в момент отражения от любой из границ металлического слоя, и проецируя его на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, имеем $\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r}_{0\perp} + \boldsymbol{v}_\perp t'$, где векторы $\boldsymbol{r}_\perp$, $\boldsymbol{r}_{0\perp}$ и $\boldsymbol{v}_\perp$ – компоненты исходных векторов в плоскости проекции. Возведя обе части последнего равенства в квадрат и разрешив полученное уравнение относительно t_1 или t_2, можно получить выражения (9) или (10).

Таким образом, уравнение (4) имеет два разных решения в зависимости от места отражения электрона проводимости внутри металлического слоя частицы. Соотношения (5), (6), (9) и (10) полностью определяют решения f_{11} и f_{12} уравнения (4) с граничными условиями (7) и (8), что позволяет рассчитать плотность тока (2) и мощность диссипации (3).

При вычислении интегралов (2) и (3) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат ($r_\perp$, φ, z; вектор $\boldsymbol{E}_0$ параллелен оси z), так и в пространстве скоростей ($v_\perp$, α, v_z; v_z – полярная ось). Ось цилиндра совпадает с осью z. Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z-компоненту:

$$\boldsymbol{E} = E_z\boldsymbol{e}_z, \quad E_z = E_0\exp(-\mathrm{i}\omega t). \tag{11}$$

Следовательно, и плотность тока (2) обладает лишь z-компонентой (линии тока являются прямыми, параллельными оси z):

$$j_z = \frac{3ne^2}{4\pi v_\mathrm{F}^3}\frac{E_z}{\nu}\int v_z^2\delta(\mathscr{E} - \mathscr{E}_\mathrm{F})[1 - \exp(-\nu t')]d^3v. \tag{12}$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов проводимости в металлах определяется выражением

$$n = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3\int f_0 d^3v = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3\frac{4}{3}\pi v_\mathrm{F}^3.$$

При интегрировании соотношения (12) следует иметь в виду, что место отражения электронов внутри частицы в пространстве скоростей определяется углом α ($0 < \alpha \leqslant 2\pi$):

1. Если выполняется неравенство $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi - \alpha_0$, где угол α_0 задаётся выражением

$$\alpha_0 = \arccos\left[\frac{(r_\perp^2 - R_1^2)^{1/2}}{r_\perp}\right], \tag{13}$$

то траектория электрона не пересекается с ядром и он претерпевает отражение от внешней границы металлического слоя частицы. Под функцией f_1 в этом случае понимается $f_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ ($t' = t_2$).

2. Если $\pi - \alpha_0 < \alpha \leqslant \pi$, то электроны летят к ядру частицы и под функцией f_1 снова понимается $f_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ $(t' = t_2)$.

3. Наконец, если $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$, то электроны летят от ядра частицы и под функцией f_1 понимается $f_{11}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ $(t' = t_1)$.

Легко заметить, что в первых двух случаях интегралы можно объединить.

Сечение поглощения электромагнитного излучения σ находим, разделив среднюю диссипируемую мощность $\bar{Q}$ (3) на средний поток энергии в волне $cE_0^2/(8\pi)$:

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{cE_0^2}\mathrm{Re}\left(\int j_z E_z^* d^3 r\right)$$

или, учитывая (12), получаем

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{cE_0^2}\mathrm{Re}\left\{\int \frac{3ne^2 E_z}{4\pi v_{\mathrm F}^3 \nu}\left[\int v_z^2 \delta(\mathscr{E} - \mathscr{E}_{\mathrm F})[1 - \exp(-\nu t')]d^3 v\right]\right.$$

$$\left.\times E_z^* d^3 r\right\}.$$

Воспользовавшись свойствами δ-функции, имеем

$$\delta(\mathscr{E} - \mathscr{E}_{\mathrm F}) = \frac{2}{m}\delta\left(v_z^2 + v_\perp^2 - v_{\mathrm F}^2\right) = \frac{2}{m}\delta\left[v_z^2 - \left(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2\right)\right]$$

$$= \frac{2}{m}\delta\left\{\left[v_z - \left(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2\right)^{1/2}\right]\left[v_z + \left(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2\right)^{1/2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{m(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2)^{1/2}}\left\{\delta\left[v_z - \left(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2\right)^{1/2}\right]\right.$$

$$\left.+ \delta\left[v_z + \left(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2\right)^{1/2}\right]\right\}.$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону и результат удваивается, поэтому

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{8\pi}{cE_0^2}\mathrm{Re}\left\{\int \frac{3ne^2 E_z}{4\pi v_{\mathrm F}^3 \nu}\left[\frac{2}{m}\int \frac{v_z^2 \delta\left[v_z - (v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2)^{1/2}\right]}{(v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2)^{1/2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times[1 - \exp(-\nu t')]d^3 v\right] E_z^* d^3 r\right\}.$$

Затем, учитывая (11), имеем

$$\sigma = \mathrm{Re}\left\{\frac{12\pi ne^2 L}{mcv_{\mathrm F}^3 \nu}\int_{R_1}^{R_2} r_\perp \mathrm{d}r_\perp \int_0^{v_{\mathrm F}}\int_0^{2\pi} v_\perp (v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times[1 - \exp(-\nu t')]\mathrm{d}v_\perp \mathrm{d}\alpha\right\}. \tag{14}$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов сложное выражение (14), по которому определяется сечение поглощения, удобно представить в виде

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{15}$$

где

$$\sigma_1 = \mathrm{Re}\left\{\frac{24\pi ne^2 L}{mcv_{\mathrm F}^3 \nu}\int_{R_1}^{R_2} r_\perp \mathrm{d}r_\perp \int_0^{v_{\mathrm F}}\int_{\alpha_0}^{\pi} v_\perp (v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2)^{1/2} \times\right.$$

$$\left.\times[1 - \exp(-\nu t_2)]\mathrm{d}v_\perp \mathrm{d}\alpha\right\}, \tag{16}$$

$$\sigma_2 = \mathrm{Re}\left\{\frac{24\pi ne^2 L}{mcv_{\mathrm F}^3 \nu}\int_{R_1}^{R_2} r_\perp \mathrm{d}r_\perp \int_0^{v_{\mathrm F}}\int_0^{\alpha_0} v_\perp (v_{\mathrm F}^2 - v_\perp^2)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times[1 - \exp(-\nu t_1)]\mathrm{d}v_\perp \mathrm{d}\alpha\right\}. \tag{17}$$

(Движение электронов симметрично относительно любой диаметральной плоскости, в которой лежит точка их положения на траектории, поэтому можно считать, что угол α в пространстве скоростей изменяется от 0 до π, и удваивать результат интегрирования по этой переменной.)

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{r_\perp}{R_2},\ \rho = \frac{v_\perp}{v_{\mathrm F}},\ z = \nu\frac{R_2}{v_{\mathrm F}} = \left(\frac{1}{\tau} - \mathrm{i}\omega\right)\frac{R_2}{v_{\mathrm F}} = x - \mathrm{i}y,\ K = \frac{R_1}{R_2}$$

и преобразуем выражения (9), (10) и (13):

$$t_1 = \frac{R_2}{v_\perp}\psi, \quad \psi = \left[\xi\cos\alpha - (K^2 - \xi^2\sin^2\alpha)^{1/2}\right],$$

$$t_2 = \frac{R_2}{v_\perp}\eta, \quad \eta = \left[\xi\cos\alpha + (1 - \xi^2\sin^2\alpha)^{1/2}\right],$$

$$\alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{K^2}{\xi^2}\right)^{1/2}.$$

Здесь мы учли, что $\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}_\perp = r_\perp v_\perp\cos\alpha$ (все электроны на поверхности Ферми внутри металлического слоя частицы движутся со скоростями, равными $v_{\mathrm F}$). Тогда формулы (16) и (17) принимают следующий вид:

$$\sigma_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{24\pi ne^2 R_2^3 L}{mcv_{\mathrm F}}\int_K^1 \xi\mathrm{d}\xi\int_0^1\int_{\alpha_0}^{\pi}\rho(1 - \rho^2)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\frac{1 - \exp(-z\eta/\rho)}{z}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\right],$$

$$\sigma_2 = \mathrm{Re}\left[\frac{24\pi ne^2 R_2^3 L}{mcv_{\mathrm F}}\int_K^1 \xi\mathrm{d}\xi\int_0^1\int_0^{\alpha_0}\rho(1 - \rho^2)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\frac{1 - \exp(-z\psi/\rho)}{z}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\right].$$

Сечение поглощения (15) представим в виде

$$\sigma = \sigma_0(F_1 + F_2),$$

где

$$\sigma_0 = \frac{24\pi ne^2 R_2^3 L}{mcv_{\mathrm F}};$$

$$F_1 = \mathrm{Re}\left[\int_K^1 \xi\mathrm{d}\xi\int_0^1\int_{\alpha_0}^{\pi}\rho(1 - \rho^2)^{1/2}\frac{1 - \exp(-z\eta/\rho)}{z}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\right]; \tag{18}$$

$$F_2 = \mathrm{Re}\left[\int_K^1 \xi\mathrm{d}\xi\int_0^1\int_0^{\alpha_0}\rho(1 - \rho^2)^{1/2}\frac{1 - \exp(-z\psi/\rho)}{z}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\right]. \tag{19}$$

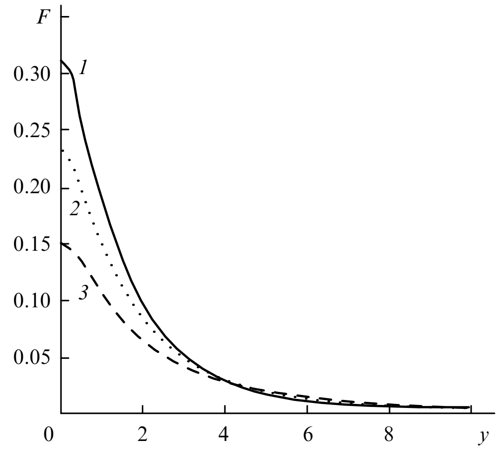

Рис.1. Зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты $y = R_2\omega/v_F$ при $x = 0.3$, $K = 0.5$ (*1*), 0.6 (*2*) и 0.7 (*3*).

Формулы (18) и (19) позволяют рассчитать безразмерное сечение поглощения неоднородной цилиндрической частицы

$$F(x,y,K) = F_1(x,y,K) + F_2(x,y,K) \tag{20}$$

и сечение поглощения электромагнитного излучения

$$\sigma = \sigma_0 F(x,y,K). \tag{21}$$

Когда $K \to 0$ ($\alpha_0 \to 0$) из (20) следует, что

$$F(x,y) = \mathrm{Re}\left[\int_0^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^1 \int_0^\pi \rho(1-\rho^2)^{1/2}\,\frac{1-\exp(-z\eta/\rho)}{z}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\right].$$

Это выражение совпадает с выражением для поглощения электромагнитной волны однородной вытянутой цилиндрической частицей металла. Результаты численного расчёта $F(x,y,K)$ представлены на рис.1 и 2.

3. Поглощение в низкочастотном и высокочастотном режимах

Подробно остановимся на случае, когда частота внешнего поля ω и частота столкновений электронов в объёме металла $(1/\tau)$ малы по сравнению с частотой столкновения электронов с поверхностями цилиндрического металлического слоя частицы. Другими словами, рассмотрим случай $|z| \ll 1$. Тогда экспоненты, входящие в выражения (18) и (19), можно разложить по известной формуле Тейлора, ограничиваясь первыми двумя членами разложения. В результате получаем

$$F_1 = \int_K^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^1 \int_{\alpha_0}^\pi (1-\rho^2)^{1/2}\left[\xi\cos\alpha + (1-\xi^2\sin^2\alpha)^{1/2}\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha,$$

$$F_2 = \int_K^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^1 \int_0^{\alpha_0} (1-\rho^2)^{1/2}\left[\xi\cos\alpha - (K^2-\xi^2\sin 2\alpha)^{1/2}\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha.$$

Проинтегрировав по переменной ρ, имеем

$$F_1 = \frac{\pi}{4}\int_K^1 \xi\mathrm{d}\xi \int_{\alpha_0}^\pi \left[\xi\cos\alpha + (1-\xi^2\sin^2\alpha)^{1/2}\right]\mathrm{d}\alpha, \tag{22}$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4}\int_K^1 \xi\mathrm{d}\xi \int_0^{\alpha_0} \left[\xi\cos\alpha - (K^2-\xi^2\sin^2\alpha)^{1/2}\right]\mathrm{d}\alpha. \tag{23}$$

Выражения (22) и (23) удаётся частично рассчитать аналитически. Приведём окончательный результат:

$$F_1 = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{4}{3} - \frac{3}{2}K + \frac{1}{6}K^3 - \frac{1}{2}\int_{1-K}^{(1-K^2)^{1/2}} \left[2K^2 - K^4 - 1 - \eta^4 + 2\eta^2(1+K^2)\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta\right\},$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}K(1-K^2) - \frac{1}{2}\int_{1-K}^{(1-K^2)^{1/2}} \left[2K^2 - K^4 - 1 - \psi^4 + 2\psi^2(1+K^2)\right]^{1/2}\mathrm{d}\psi\right\}.$$

Тогда для сечения поглощения получаем следующее выражение:

$$\sigma = \sigma_0\frac{\pi}{4}\left\{\frac{4}{3} - K - \frac{1}{3}K^3 - \int_{1-K}^{(1-K^2)^{1/2}} \left[2K^2 - K^4 - 1 - \eta^4 + 2\eta^2(1+K^2)\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta\right\}. \tag{24}$$

Рассмотрим возможные предельные случаи.

Если внутри частицы имеется диэлектрическое ядро, радиус которого во много раз меньше радиуса частицы, т. е. $K \ll 1$, то можно найти поправку к поглощению, отбросив в формуле (24) слагаемые, пропорциональные K^3 (вклад интеграла пренебрежимо мал):

$$\sigma \approx \sigma_0\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{3}{4}K\right). \tag{25}$$

Для металлической частицы без ядра ($K \to 0$) из (25) следует, что

$$\sigma = \frac{8\pi^2 ne^2 R_2^3 L}{mcv_F}.$$

Это выражение совпадает с результатом для низкочастотного электрического поглощения однородной вытянутой цилиндрической частицы металла.

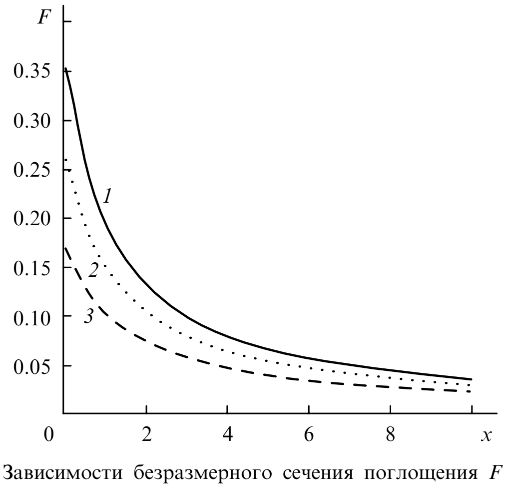

Рис.2. Зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x = R_2/(\tau v_F)$ при $y = 0.3$, $K = 0.5$ (*1*), 0.6 (*2*) и 0.7 (*3*).

В случае тонкой металлической оболочки, когда $K \to 1$, для нахождения поправки к поглощению по формуле (24) необходимо выполнить разложение в ряд по параметру $(1-K) \ll 1$, а также воспользоваться формулами приближенного вычисления. В этом случае (вклад интеграла доминирует) сечение поглощения

$$\sigma \approx \sigma_0 \frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{2}(1-K)\right]^{1/2}.$$

Если $|z| \gg 1$, существует асимптотика выражения (20). Пренебрегая членами с экспонентами в виду их быстрого затухания и выполнив алгебраические преобразования, приходим к следующему выражению для безразмерного сечения поглощения $F(z)$:

$$F(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{z}\int_K^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^1 \int_0^{\pi} \rho(1-\rho^2)^{1/2}\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\alpha\right].$$

Оно легко интегрируется:

$$F(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{z(x,y)}\frac{\pi}{6}(1-K^2)\right]. \tag{26}$$

В результате проведённых преобразований для сечения поглощения (21) получаем выражение

$$\sigma(z) = \sigma_0 \mathrm{Re}\left[\frac{1}{z(x,y)}\frac{\pi}{6}(1-K^2)\right]$$

$$= \sigma_0 \frac{\pi}{6}(1-K^2)\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{27}$$

Для металлической частицы без ядра ($K \to 0$) это выражение соответствует классическому результату (формуле Друде) [20] для однородной цилиндрической частицы из металла:

$$\sigma(z) = \sigma_0 \frac{\pi}{6}\frac{z}{x^2+y^2}.$$

В случае тонкой металлической оболочки, когда $K \to 1$, для нахождения поправки к поглощению по формуле (26) удобно сделать подстановку $K = 1-\delta$, где δ – малая величина ($\delta \to 0$), а также воспользоваться формулами приближенного вычисления. Действительно, поскольку $1-K^2 = 1-(1-\delta)^2 \approx 1-(1-2\delta) = 2\delta = 2(1-K)$, сечение поглощения определяется в этом случае по формуле

$$\sigma \approx \sigma_0 \frac{\pi}{3}\frac{x}{x^2+y^2}(1-K).$$

Наконец, если цилиндрическая частица является диэлектрической ($K = 1$), то её сечение поглощения равно нулю, т. к. в таких частицах не происходит диссипации энергии внешнего электромагнитного поля.

4. Обсуждение результатов

Безразмерное сечение поглощения F зависит от комбинации трёх безразмерных величин: x, y, K. Учёт того обстоятельства, что в вытянутой цилиндрической частице есть диэлектрическое ядро (напомним, что $L \gg R_2$), естественно, приводит к результатам, отличающимся от полученных для однородной цилиндрической частицы из металла. Это связано с тем, что, кроме отражения электронов от внешней поверхности частицы, имеет место и их рассеяние на цилиндрическом ядре, а также с тем, что в ядре не происходит диссипации энергии внешнего электромагнитного поля.

На рис.1 представлены зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты внешнего поля y при фиксированной безразмерной обратной длине свободного пробега электронов x. Из анализа кривых следует, что при малых y ($y < 3$) максимальное безразмерное сечение поглощения имеют частицы, металлическая оболочка которых содержит больше металла (это означает, что для такой частицы параметр K минимален). При больших безразмерных частотах внешнего поля ($y > 3$) все три зависимости сливаются, т. к. имеет место макроскопическая асимптотика.

На рис.2 показаны зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x. Если постоянна безразмерная частота внешнего поля y, то при любых x сечение F больше для частиц, у которых линейный размер ядра минимален (рассматриваются частицы с одинаковыми радиусом и длиной).

В данной работе, кроме зависимостей безразмерного сечения поглощения F от x и y, исследуется зависимость F от отношения радиуса ядра к радиусу частицы K. Для анализа этой зависимости воспользуемся рис.3, на котором приведено безразмерное удельное сечение поглощения цилиндрической металлической частицы с диэлектрическим ядром

$$G(K) = \frac{F(K)}{1-K^2}.$$

Из рис.3 видно, что удельное сечение поглощения (при любых K) больше для частиц, находящихся во внешнем электрическом поле с наименьшей частотой. Такое поведение удельного сечения поглощения легко объяснимо: в высокочастотных полях более разогнанными являются электроны, находящиеся под действием внешнего поля с относительно большим периодом колебаний.

На рис.4 и 5 приведены результаты расчётов безразмерного сечения поглощения неоднородной цилиндрической частицы по формуле (20), полученной в данной работе, и по формуле Друде для неоднородного цилиндра

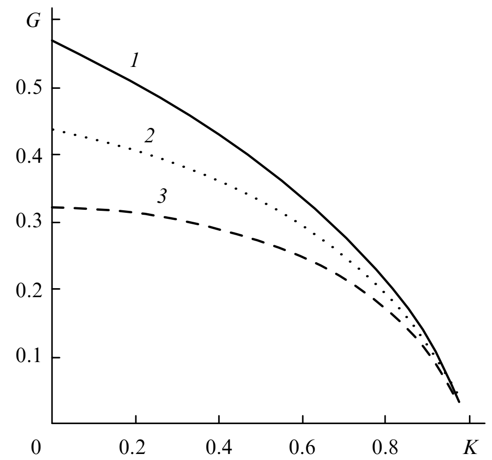

Рис.3. Зависимости безразмерного удельного сечения поглощения G от отношения радиуса ядра к радиусу частицы K при $x = 0.3$, $y = 0.3$ (*1*), 0.6 (*2*) и 0.9 (*3*).

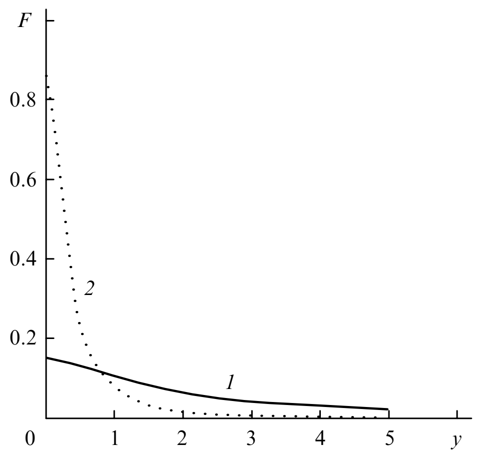

Рис.4. Зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты $y = R_2\omega/v_F$, полученные при точном кинетическом расчёте (*1*) и расчёте по формуле Друде ($x = 0.3$, $K = 0.7$) (*2*).

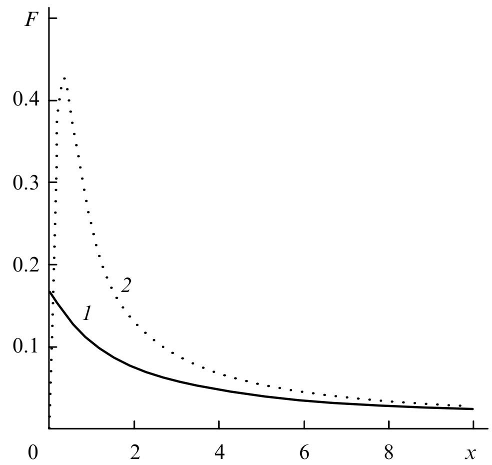

Рис.5. Зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x = R_2/(\tau v_F)$, полученные при точном кинетическом расчёте (*1*) и расчёте по формуле Друде ($y = 0.3$, $K = 0.7$) (*2*).

(её легко получить из (27)). Анализ этих зависимостей выявляет заметное различие между результатами точного кинетического расчёта и вычисления по классической формуле Друде.

1. Петров Ю.И. *Физика малых частиц* (М.: Наука, 1984, гл. 7).
2. Займан Дж. *Электроны и фононы* (М.: ИЛ, 1962, гл. 11).
3. Лесскис А.Г., Пастернак В.Е., Юшканов А.А. *ЖЭТФ*, **83**, 310 (1982).
4. Лесскис А.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. *Поверхность*, № 11, 115 (1987).
5. Trodahl H.J. *Phys. Rev. B*, **19**, 1316 (1979).
6. Trodahl H.J. *J. Phys. C: Sol. St. Phys.*, **15**, 7245 (1982).
7. Бондарь Е.А. *Оптика и спектроскопия*, **75** (4), 837 (1993).
8. Бондарь Е.А. *Оптика и спектроскопия*, **80** (1), 89 (1996).
9. Томчук П.М., Томчук Б.П. *ЖЭТФ*, **112** (2), 661 (1997).
10. Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. *ЖТФ*, **71** (11), 114 (2001).
11. Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. *Оптика и спектроскопия*, **92** (5), 851 (2002).
12. Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. *ЖТФ*, **73** (3), 16 (2003).
13. Завитаев Э.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. *ЖЭТФ*, **124** (5), 1112 (2003).
14. Kubo R.J. *Phys. Soc. Japan*, **17**, 975 (1962).
15. Маныкин Э.А., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г. *ЖЭТФ*, **70** (6), 2117 (1976).
16. Averitt R.D., Westcott S.L., Halas N.J.J. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16** (10), 1824 (1999).
17. Henglein A.J. *Phys. Chem. B*, **104** (10), 2201 (2000).
18. Сидоров А.И. *Оптический журн.*, **70** (2), 9 (2003).
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1992, с. 664).
20. Харрисон У. *Теория твердого тела* (М.: Мир, 1972).
21. Курант Р. *Уравнения с частными производными* (М.: Мир, 1964, гл. 2).