PACS 42.65.Ky; 42.65.Re; 52.38.–r

О влиянии электронного переноса тепла на генерацию третьей гармоники лазерного излучения в скин-слое плотной плазмы

В.А.Исаков, А.П.Канавин, С.А.Урюпин

Определена плотность потока излучения, идущего из плазмы на утроенной частоте ультракороткого лазерного импульса, который порождает малые высокочастотные модуляции температуры электронов в скин-слое плазмы. Показано, что вынос тепла из скин-слоя может приводить к уменьшению высокочастотных модуляций температуры и к снижению нелинейного отклика плазмы. Выявлены условия, оптимальные для генерации третьей гармоники.

***Ключевые слова**: ультракороткий импульс, генерация гармоник, перенос тепла, скин-эффект.*

При взаимодействии ультракоротких лазерных импульсов с твердыми телами на их поверхности образуется плазма высокой плотности, границы которой остаются резкими в течение времени воздействия импульса (см., напр., [1 – 4]). Вследствие высокой плотности электронов весьма просто реализуются такие условия, при которых взаимодействие импульса с плазмой происходит в режиме нормального скин-эффекта [2, 4]. Как известно, при нормальном скин-эффекте особенности поглощения и отражения излучения в значительной мере определяются столкновениями электронов с ионами. Вместе с тем электрон-ионные столкновения являются причиной генерации нечетных гармоник высокочастотного поля [5]. Генерация третьей гармоники поля в скин-слое плотной плазмы, обусловленная столкновениями электронов с ионами, рассмотрена в работах [6, 7]. Предложенное в [6, 7] описание излучения плазмы на утроенной частоте лазера применимо тогда, когда частота излучения ω больше частоты электрон-электронных столкновений ν_{ee}.

В настоящей работе излагается теория генерации третьей гармоники, пригодная при $\nu_{\mathrm{ee}} \gg \omega$. Благодаря частым электрон-электронным столкновениям функция распределения электронов в скин-слое остается близкой к максвелловской, что позволяет описывать явление генерации третьей гармоники, базируясь на уравнении для температуры электронов. Поскольку это уравнение учитывает отвод тепла из скин-слоя, то используемый далее подход позволяет описать влияние переноса тепла на генерацию третьей гармоники, для чего, как и в работах [8, 9], используется система связанных уравнений для поля и температуры электронов. В [8, 9] получено численное решение этих уравнений и найден спектр излучения плазмы в условиях, когда под действием лазерного импульса происходит быстрый нагрев электронов в скин-слое.

В отличие от [8, 9], ниже получено приближенное аналитическое решение уравнений для поля и температуры, которое применимо при сравнительно малых плотностях потока лазерного излучения и небольших длительностях импульса, когда импульс порождает малые возмущения температуры электронов в скин-слое. Такое аналитическое решение позволило установить явные зависимости эффективности генерации третьей гармоники от параметров плазмы и лазерного импульса. Показано, что отвод тепла из скин-слоя приводит к уменьшению амплитуды высокочастотных модуляций возмущения температуры и, как следствие, к уменьшению интенсивности излучения плазмы на утроенной частоте лазера. Эффект уменьшения особенно велик, когда длина свободного пробега электронов составляет более 6 % от отношения скорости света к плазменной частоте электронов. При меньших длинах свободного пробега имеет место сравнительно эффективная генерация третьей гармоники.

Рассмотрим взаимодействие ультракороткого лазерного импульса с плотной плазмой, имеющей резкую границу и занимающей область пространства $z > 0$. Предположение о резкой границе плазмы означает, что за время приготовления и изучения плазмы разлетом вещества можно пренебречь. При изучении оптических явлений, обусловленных электронами скин-слоя, разлетом вещества можно пренебречь на временах, меньших отношения глубины скин-слоя к скорости гидродинамического разлета вещества, которая имеет порядок скорости звука. В частности тогда, когда реализуются условия нормального скин-эффекта, разлет твердотельной плазмы несуществен на временах менее или порядка 100 фс. Будем считать, что импульс имеет резкий передний фронт, который приходит на границу плазмы в момент времени $t = 0$. Тогда напряженность электрического поля падающего импульса

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(z,t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{p}} \sin(\omega t - kz)\eta(\omega t - kz), \quad z < 0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}} = (E_{\mathrm{p}}, 0, 0)$; ω – частота; k – волновое число; $\omega = kc$; c – скорость света; $\eta(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда. Описываемое ступенчатой функцией Хэвисайда скачкообразное включение импульса позволяет упростить дальнейшее рассмотрение, но не является необходимым. Дело в том, что наибольший интерес представляют

В.А.Исаков, А.П.Канавин, С.А.Урюпин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: uryupin@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 15 февраля 2005 г.

закономерности, не зависящие от эффекта включения. В случае скачкообразного включения импульса такие закономерности реализуются на временах $t > 1/\omega$. Именно их выявлению посвящена настоящая работа. Вместе с тем способом включения и выключения ультракороткого лазерного импульса в значительной мере определяется спектральный состав падающего и отраженного излучения. В эксперименте обычно имеют дело с импульсами, включающимися и выключающимися сравнительно плавно. Например, при включении импульса по закону вида $\propto \exp[-(t/\tau_{\rm p})^2]$, где $\tau_{\rm p}$ – характерная длительность импульса, эффективная спектральная ширина импульса $\Delta\omega$ составляет $\sqrt{2}/\tau_{\rm p}$. При этом, как показано в [8, 9], влияние длительности импульса на коэффициент поглощения проявляется лишь при $\tau_{\rm p} \leqslant 1/\omega$, а третья гармоника в отраженном излучении хорошо различима на фоне экспоненциально спадающего хвоста от уширенного сигнала на основной частоте.

При $t > 0$ лазерный импульс отражается от поверхности $z = 0$ и частично проникает в глубь плазмы. Поле отраженного импульса имеет вид

$$\boldsymbol{E}_{\rm r}(z,t) = \boldsymbol{E}_{\rm r}(z+ct)\eta(z+ct), \quad z < 0. \tag{2}$$

Примем, что взаимодействие импульса с плазмой происходит в условиях нормального скин-эффекта, когда частота ω много меньше частоты столкновений электронов с ионами ν, а длина свободного пробега тепловых электронов $l = \upsilon_T/\nu$ много меньше глубины скин-слоя d (υ_T – тепловая скорость электронов). В режиме нормального скин-эффекта эволюция температуры электронов $T = T(z,t)$ и напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}(z,t) = (E(z,t),0,0)$ в плазме описывается системой связанных уравнений [8, 9]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[\sigma(z,t)E(z,t)], \tag{3}$$

$$\frac{3}{2}nk_{\rm B}\frac{\partial}{\partial t}T(z,t) = \sigma(z,t)E^2(z,t) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z,t)\frac{\partial}{\partial z}T(z,t)\right], \tag{4}$$

где $\sigma(z,t) = [32/(2\pi)^{1/2}]e^2n/m\nu(z,t)$ – проводимость плазмы; e, m и n – заряд, масса и плотность электронов соответственно; $\nu = \nu(z,t) = 4\pi Ze^4n\Lambda/\sqrt{m}[k_{\rm B}T(z,t)]^{3/2}$; Z – кратность ионизации ионов; $k_{\rm B}$ – постоянная Больцмана; Λ – кулоновский логарифм; $\lambda = \lambda(z,t) = [128/(2\pi)^{1/2}]\times nk_{\rm B}^2T(z,t)/m\nu(z,t)$ – коэффициент теплопроводности Спитцера – Харма.

Для системы уравнений (3), (4) имеют место начальные,

$$E(z,t=0) = 0, \quad T(z,t=0) = T_0, \tag{5}$$

и граничные,

$$E(z\to\infty,t) = 0, \quad T(z\to\infty,t) = T_0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\bigg|_{z=0} = -2\frac{\omega}{c}E_{\rm p}\cos\omega t, \quad \frac{\partial}{\partial z}T(z,t)\bigg|_{z=0} = 0, \tag{7}$$

условия, где T_0 – начальная температура электронов. Граничное условие при $z = 0$ для производной температуры отвечает отсутствию источника тепла на поверхности плазмы, а граничное условие для производной поля является следствием непрерывности электрического и магнитного полей при $z = 0$.

Вследствие поглощения поля в скин-слое происходит нагрев электронов. Примем, что возникающее при таком нагреве возмущение начальной температуры электронов $\delta T = \delta T(z,t)$ сравнительно мало:

$$\delta T \ll T_0. \tag{8}$$

Помимо условия (8) будем считать выполненным неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln E\right| \gg \frac{3}{2}\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln T\right| \simeq \frac{3}{2}\left|\frac{1}{T_0}\frac{\partial}{\partial t}\delta T\right|, \tag{9}$$

которое означает, что изменение поля в скин-слое происходит быстрее, чем изменение температуры. Тогда при выполнении неравенств (8), (9) решение системы уравнений (3), (4) можно искать по теории возмущений. В первом приближении, пренебрегая изменением температуры электронов, из (3) имеем линейное уравнение для поля в плазме, которое удовлетворяет граничным условиям (6), (7) и начальному условию (5). Решение соответствующего линейного уравнения имеет вид

$$E_0(z,t) = 2\frac{d}{c}\omega E_{\rm p}\int_0^{\omega t}\frac{{\rm d}\tau}{(2\pi\tau)^{1/2}}\cos(\omega t-\tau) \times\exp\left(-\frac{z^2}{2d^2\tau}\right), \tag{10}$$

где

$$d = \frac{(2\pi)^{1/4}}{4}\frac{c}{\omega_{\rm L}}\left(\frac{\nu_0}{\omega}\right)^{1/2}; \tag{11}$$

ν_0 – частота столкновений электронов с ионами при температуре T_0; $\omega_{\rm L}$ – ленгмюровская частота. При $\omega t \gg 1$ из (10) приближенно имеем

$$E_0(z,t) \simeq \sqrt{2}\frac{d\omega}{c}E_{\rm p}\exp\left(-\frac{z}{d}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{d} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{12}$$

Из (9) и (12) следует, что решение (12) имеет место, если температура электронов изменяется за время, большее $1/\omega$.

В свою очередь для малого возмущения температуры из (4) получаем линейное уравнение вида

$$\frac{3}{2}nk_{\rm B}\frac{\partial}{\partial t}\delta T(z,t) - \lambda\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta T(z,t) = \sigma E_0^2(z,t), \tag{13}$$

$$\delta T(z,t=0) = 0, \ \delta T(z\to\infty,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\delta T(z,t)\bigg|_{z=0} = 0, \tag{14}$$

где проводимость σ и коэффициент теплопроводности λ зависят от температуры T_0. В уравнения (4), (13) входит плотность электронов, которая удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial n/\partial t + {\rm div}(\boldsymbol{j}/e) = 0$, где $\boldsymbol{j}$ – плотность тока. В рассматриваемых условиях ток вдоль направления неоднородности отсутствует, т. к. ответственный за явление термодиффузии вклад в ток из-за градиента температуры компенсируется вкладом в ток от амбиполярного электрического поля. Это положение составляет основу описания теплопереноса в рамках подхода Спитцера – Харма (см., напр., [10]). Отличная от нуля компонента плотности тока вдоль поверхности зависит лишь от координаты z. В итоге имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$, или $\partial n/\partial t=0$, что позволяет не учитывать возмущение плотности. Отметим также, что не учитываемое в излагаемом подходе относительное возмущение плотности электронов из-за высокочастотных модуляций пондеромоторной силы в рассматриваемых условиях нормального скин-эффекта существенно меньше, чем описываемое уравнением (13) относительное возмущение температуры электронов из-за их джоулева нагрева. Из (13), (14) находим приращение температуры

$$\delta T(z,t)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{2\omega}{nk_{\mathrm{B}}\pi\sqrt{\pi}}\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z'}{Ld[\omega(t-t')]^{1/2}}$$
$$\times\left[\frac{c}{2d\omega}\,E_0(z',t')\right]^2\left\{\exp\left[-\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{(z-z')^2}{L^2d^2\omega(t-t')}\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{(z+z')^2}{L^2d^2\omega(t-t')}\right]\right\}, \tag{15}$$

где использовано обозначение

$$L=\frac{64}{(2\pi)^{1/2}}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{c}\,l_0\simeq 70l_0\,\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{c}; \tag{16}$$

$l_0=(k_{\mathrm{B}}T_0/m)^{1/2}/v_0$ – длина свободного пробега при $T=T_0$. Используя распределение поля (12) на временах, много больших $1/\omega$, из (15) находим возмущение температуры при $z=0$:

$$\frac{\delta T(z=0,t)}{T_0}=\frac{I}{cnk_{\mathrm{B}}T_0}\left\{\frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{\omega t}}{L}\right.$$
$$\times\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\left[1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\right]\exp\left[-\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4L}\right)^2\frac{x^2}{\omega t}\right]$$
$$\left.-\frac{4\cos(2\omega t)}{3+6L/\left(3+\sqrt{3}\right)}\right\},\quad \omega t\gg 1, \tag{17}$$

где $I=cE_{\mathrm{p}}^2/8\pi$ – плотность потока падающего излучения. Соотношение (17) позволяет записать условия (8), (9) в явном виде. При малом отводе тепла, когда $L\ll 1$, на временах, удовлетворяющих неравенствам

$$1\ll\omega t\ll\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{16L^2}, \tag{18}$$

приращение температуры электронов мало, если

$$\frac{8I}{3cnk_{\mathrm{B}}T_0}\,\omega t\ll 1. \tag{19}$$

Поскольку $\omega t\gg 1$, то из неравенства (19) автоматически следует условие (9). Неравенство (19) налагает ограничение как на плотность потока излучения, так и на длительность импульса.

Тогда, когда плотность потока достаточно мала,

$$I\ll cnk_{\mathrm{B}}T_0L^2\,\frac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}, \tag{20}$$

возможен выход за рамки временного интервала (18). Действительно, если

$$\omega t\gg\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{16L^2}, \tag{21}$$

то приращение температуры остается малым до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\frac{8I}{\sqrt{\pi}cnk_{\mathrm{B}}T_0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{\omega t}}{L}\ll 1. \tag{22}$$

Так как $\omega t\gg 1$, то условие (22) обеспечивает выполнение неравенства (9).

При сравнительно большом отводе тепла $L\gg 1$. В этом случае отношение $\delta T/T_0$ остается малым, если выполнено неравенство (22), в котором $\omega t\gg 1$. При этом неравенство (9) выполняется автоматически.

Возмущение температуры приводит к изменению электрического поля в скин-слое. Для малых поправок к полю из (3) имеем линейное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta E(z,t)-\frac{1}{2}\,\omega d^2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\delta E(z,t)$$
$$=\frac{3}{2}\,E_0(z,t)\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\delta T(z,t)}{T_0}\right] \tag{23}$$

со следующими граничными и начальным условиями:

$$\delta E(z,t=0)=0,\ \ \delta E(z\to\infty,t)=0,\ \ \frac{\partial}{\partial z}\,\delta E(z,t)\Big|_{z=0}=0. \tag{24}$$

Поле $E_0(z,t)$ в правой части уравнения (23) описывается соотношением (10), а возмущение температуры $\delta T(z,t)$ – соотношением (15). Из (23), (24) находим

$$\delta E(z,t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{[2\pi\omega(t-t')]^{1/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}z'}{d}\left\{\exp\left[-\frac{(z-z')^2}{2d^2\omega(t-t')}\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{(z+z')^2}{2d^2\omega(t-t')}\right]\right\}E_0(z',t')\frac{\partial}{\partial t'}\left[\frac{3\delta T(z',t')}{2T_0}\right]. \tag{25}$$

Возмущение поля на границе плазмы $\delta E(z=0,t)$ определяет поправки к полю отраженного сигнала $\delta E_{\mathrm{r}}(z=0,t)=\delta E(z=0,t)$. Рассмотрим возмущение поля $\delta E(z=0,t)$ при $\omega t\gg 1$. На таких временах при вычислении интегралов по t' и z' в (25) можно использовать выражения для $E_0(z',t')$ и $\delta T(z',t')$, отвечающие моментам времени $\omega t'\gg 1$. Кроме того, интересуясь генерацией излучения на частоте 3ω, в формуле (15) оставим лишь те слагаемые, которые при $\omega t\gg 1$ изменяются с частотой 2ω. С учетом этих замечаний из (12), (15) и (25) найдем напряженность поля на частоте 3ω при $z=0$:

$$\delta E(z=0,t)=-\frac{2\sqrt{2}}{3\left(1+\sqrt{3}\right)}\,\frac{d\omega}{c}\,E_{\mathrm{p}}\,\frac{I}{cnk_{\mathrm{B}}T_0}\,F(L)$$
$$\times\cos\left(3\omega t-\frac{\pi}{4}\right). \tag{26}$$

Здесь функция $F(L)$ описывает влияние отвода тепла из скин-слоя на процесс генерации третьей гармоники лазерного излучения:

$$F(L) = \left[1 + \frac{2L^2}{3(1+\sqrt{3})(1+L)}\right]^{-1}. \tag{27}$$

В вакууме напряженности электрического и магнитного полей волны на частоте 3ω одинаковы, а плотность потока $\boldsymbol{I}_{\mathrm{r}}(3\omega) = (0, 0, -I_{\mathrm{r}}(3\omega))$ и не зависит от координаты:

$$I_{\mathrm{r}}(3\omega) = \int_0^{T(3\omega)} \frac{c\mathrm{d}t}{4\pi T(3\omega)}[\delta E_{\mathrm{r}}(z=0,t)]^2, \tag{28}$$

где $T(3\omega) = 2\pi/3\omega$. В соответствии с определением $I_{\mathrm{r}}(3\omega) = I\eta(3\omega)$ из соотношений (26)–(28) находим эффективность генерации третьей гармоники

$$\eta(3\omega) = \frac{4}{9(2+\sqrt{3})}\left(\frac{\omega d}{c}\right)^2\left(\frac{I}{cnk_{\mathrm{B}}T_0}\right)^2 F^2(L). \tag{29}$$

Если длина свободного пробега электронов мала настолько, что $L \ll 4$ или $l_0 \ll 0.06c/\omega_{\mathrm{L}}$, то $F(L) \simeq 1$. В этом случае функция $\eta(3\omega)$ (29) зависит от параметров плазмы и излучения так же, как и $\eta_k(3\omega)$, полученная в работе [6] с использованием приближенного решения кинетического уравнения для функции распределения электронов. В [6] генерация третьей гармоники изучена в предположении, что электрон-электронные столкновения слабо влияют на движение электронов в высокочастотном поле лазерного импульса. Такое предположение оправданно, если частота электрон-электронных столкновений $v_{\mathrm{ee}} = v/Z$ меньше ω. Напротив, если $v_{\mathrm{ee}} \gg \omega$, то частые электрон-электронные столкновения поддерживают распределение электронов близким к максвелловскому и применимо описание, базирующееся на использовании уравнения для температуры электронов. Вследствие частых электрон-электронных столкновений эффективность генерации третьей гармоники $\eta(3\omega)$ (29) оказывается в $(315\pi/512)^2 \simeq 3.7$ раз меньше, чем $\eta_k(3\omega)$, найденная в [6] в рамках кинетического подхода.

Если же $l_0 \gg 0.06c/\omega_{\mathrm{L}}$, то $L \gg 4$ и из (27) приближенно имеем

$$F^2(L) \simeq \frac{9(2+\sqrt{3})}{2L^2} = \left(\frac{3\sqrt{\pi}c}{64\sqrt{2}l_0\omega_{\mathrm{L}}}\right)^2 \simeq \left(\frac{0.06c}{l_0\omega_{\mathrm{L}}}\right)^2 \ll 1. \tag{30}$$

Согласно (30) при $l_0 \gg 0.06c/\omega_{\mathrm{L}}$ имеет место относительное уменьшение эффективности генерации третьей гармоники, которое характеризуется коэффициентом $F^2(L) \ll 1$. Относительное уменьшение функции $\eta(3\omega)$ (29) возникает из-за отвода тепла из скин-слоя, который приводит к уменьшению высокочастотных модуляций возмущения температуры, являющихся причиной генерации поля на частоте 3ω. Как видно из (30), ослабление генерации тем сильнее, чем больше длина свободного пробега. Вместе с тем следует помнить, что (29), (30) получены в предположении о классическом переносе тепла в соответствии с законом Спитцера – Харма. Такое предположение оправданно, если длина свободного пробега много меньше пространственного масштаба неоднородности возмущений температуры, который в рассматриваемых условиях соизмерим с размером скин-слоя d (11), т. е. $l_0 \ll d = (\pi/128)^{1/4}(v_0/\omega)^{1/2}c/\omega_{\mathrm{L}} \simeq 0.16(v_0/\omega)^{1/2}c/\omega_{\mathrm{L}}$, где $v_0 \gg \omega$.

Установленные выше закономерности влияния переноса тепла на величину функции $\eta(3\omega)$ (29) позволяют определить оптимальные условия для генерации третьей гармоники излучения ультракороткого лазерного импульса. Приведем пример таких условий. Для оценок будем считать, что плазма состоит из полностью ионизованных атомов бериллия с $Z = 4$ и электронов, имеющих плотность $n = 5 \times 10^{23}$ см$^{-3}$ и температуру $T_0 = 100$ эВ. В такой плазме $v_0 \sim 0.5\omega_{\mathrm{L}} \simeq 2 \times 10^{16}$ с$^{-1}$, $l_0 \sim 3 \times 10^{-8}$ см, $L \sim 3$ и $F(L) \sim 0.7$. Основную частоту лазерного импульса ω примем равной 2×10^{15} с$^{-1}$, а его длительность $\sim 2\pi/\omega \sim 3$ фс. В этих условиях $v_0 \gg \omega$, $d_0 \sim 10^{-6}$ см $\gg l_0$. Возмущение температуры электронов остается малым в течение действия импульса, если в соответствии с неравенством (22) плотность потока излучения удовлетворяет условию $I/cnk_{\mathrm{B}}T_0 \leqslant 0.15$, или $I \leqslant 4 \times 10^{16}$ Вт/см^2. В случае максимально допустимой плотности потока из (29) находим $\eta(3\omega) \sim 6 \times 10^{-6}$, что отвечает плотности потока на частоте 3ω, высвечиваемого плазмой, $I_{\mathrm{r}}(3\omega) \sim 2 \times 10^{11}$ Вт/см^2.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Фемтосекундная оптика и физика сверхсильных лазерных полей», ФНЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» (научное направление «Фемтосекундная лазерная физика»).

1. Price D.F., More R.M., Walling R.S., Guethlein G., Shepherd R.L., Stewart R.E., White W. E. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 252 (1995).
2. Лосев Л.Л., Сосков В.И. *Квантовая электроника*, **25**, 467 (1998).
3. Schnurer M., Nolte R., Rousse A., Grillon G., Cheriaux G., Kalashnikov M.P., Nickles P.V., Sandner W. *Phys. Rev. E*, **61**, 4394 (2000).
4. Лосев Л.Л., Сосков В.И. *Квантовая электроника*, **30**, 901 (2000).
5. Силин В.П. *ЖЭТФ*, **47**, 2254 (1964).
6. Ferrante G., Zarcone M., Uryupin S.A. *Phys. Lett. A*, **315**, 378 (2003).
7. Ferrante G., Zarcone M., Uryupin S.A. *Phys. Rev. E*, **70**, 016403 (2004).
8. Isakov V.A., Kanavin A.P., Uryupin S.A. *J. Russ. Laser Res.*, **25**, 401 (2004).
9. Isakov V.A., Kanavin A.P., Uryupin S.A. *Laser Part. Beams* (in press).
10. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979, § 44).