

Измерение искажений волнового фронта методом апертурного зондирования с пространственным разделением каналов

Б.В.Прилепский, А.Н.Алиханов, Е.А.Берченко, В.Ю.Киселев, Э.А.Нарусбек, А.С.Филатов

Рассмотрены особенности формирования сигналов в датчиках волнового фронта с модуляцией фазы световой волны на одной частоте и пространственным разделением каналов. Анализ проведен для датчиков, в которых модуляция фазы задается управляемым элементом, расположенным в зрачке оптической системы датчика или в фокальной плоскости объектива этой системы. Отдельно рассмотрены особенности формирования сигналов при наличии наклонов волнового фронта для внутренних точек выходного зрачка и модуляции фазы световой волны в зрачке. Показано, что в этих датчиках волнового фронта сигнал на частоте модуляции для точек, расположенных далеко от границ зрачка, определяется кривизной волнового фронта.

Ключевые слова: датчики волнового фронта, апертурное зондирование, кривизна волнового фронта, наклон волнового фронта.

1. Введение

Весьма вероятно, что одними из первых адаптивных оптических систем, продемонстрировавших возможности адаптивной оптики для коррекции искажений волнового фронта в реальном времени, были передающие когерентные адаптивные оптические системы, использующие многоканальную модуляцию фазы световой волны [1–3]. Датчик волнового фронта в этих системах представлял собой одноэлементный приемник света, устанавливаемый за диафрагмой, размер которой был согласован с дифракционным кружком для излучающей апертуры. При размещении диафрагмы в фокусе приемного объектива датчика волнового фронта сигнал с приемника определялся интенсивностью части светового сигнала, отраженного от мишени и проходящего через фокус объектива.

Если модуляции фазы световой волны для отдельных частей излучающей апертуры отвечает своя частота, то в выходном сигнале приемника можно выделить сигнал, за который ответствен определенный участок излучающей апертуры и который можно без промежуточных вычислений использовать для управления фазой световой волны на этом участке, например с помощью гибкого зеркала. Когда сигнал на частоте модуляции равен нулю, данный участок апертуры дает максимальный вклад в интенсивность излучения на оптической оси.

В настоящее время на основании результатов многочисленных теоретических и экспериментальных работ сложилось мнение, что такой способ измерений искажений волнового фронта обладает рядом существенных недостатков, основными из которых являются следующие [3–5]:

1. Существование локальных экстремумов ($2\pi N$ -проблема) при управлении гибким зеркалом, обусловленные особенностями формы гибкого зеркала при его деформациях.

2. Ограниченное (небольшое) число каналов управления.

3. Низкое отношение сигнал/шум и, как следствие, требуемая большая яркость объектов, с которыми данный тип датчика может работать.

В связи с этим полагается, что, по крайней мере в астрономии, такие датчики волнового фронта использовать нельзя [4]. В то же время этот метод представляется весьма привлекательным с точки зрения простоты реализации.

В настоящее время исследуется и разрабатывается несколько типов датчиков волнового фронта, в некотором смысле аналогичных ранним системам апертурного зондирования [4, 6]. В этих системах сигнал с выхода датчика волнового фронта без какой-либо дополнительной обработки можно использовать для управления фазой поля световой волны во входном зрачке. Для реализации такой возможности матрицу из одноэлементных приемников устанавливают в выходном зрачке датчика так, что каждый его элемент является изображением определенного участка входного зрачка датчика, т. е. используется пространственное разделение каналов управления. В работе [6] датчик волнового фронта такого типа называют оптическим процессором.

В данной статье мы рассмотрим особенности формирования сигналов в датчиках волнового фронта с модуляцией фазы световой волны на одной частоте и пространственным разделением каналов.

2. Принцип действия датчиков волнового фронта в системах апертурного зондирования с пространственным разделением каналов

На рис. 1 точке p с координатами ξ, η входного зрачка соответствует точка p' с координатами ξ', η' . Введем в фокальной плоскости свою систему координат x, y . По-

Б.В.Прилепский, А.Н.Алиханов, Е.А.Берченко, В.Ю.Киселев, Э.А.Нарусбек, А.С.Филатов. ЗАО «Институт лазерных оптических технологий», Россия, 129164 Москва, Ярославская ул., 8/3; тел.: 217 60 31, факс: 217 60 59, e-mail: boris@ilotech.biz

Поступила в редакцию 17 февраля 2004 г., после доработки – 23 мая 2005 г.

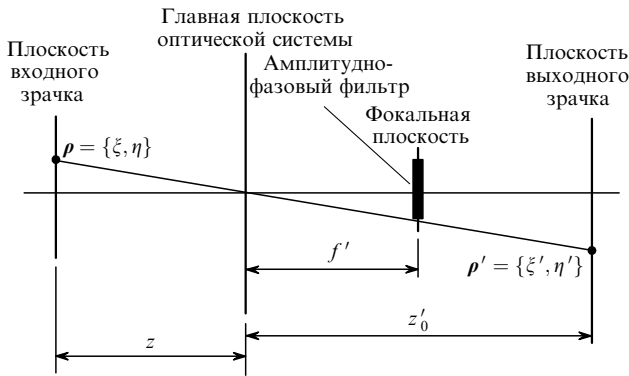


Рис. 1. Обобщенная оптическая схема датчика волнового фронта.

ложим, что в фокальной плоскости оптической системы датчика волнового фронта установлен амплитудно-фазовый фильтр с функцией пропускания $T(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = \{x, y\}$.

Распределение поля световой волны в выходном зрачке для точечного источника света, находящегося на бесконечности, с точностью до несущественных фазовых множителей может быть рассчитано по формуле

$$E_{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}') = \frac{\beta}{\lambda^2 f'^2} \int_{\boldsymbol{\rho}} E_{\text{in}}(\boldsymbol{\rho}) H(\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}') d^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (1)$$

где λ – длина волны излучения; f' – эквивалентное фокусное расстояние оптической системы датчика волнового фронта; $1/\beta$ – увеличение оптической системы датчика в зрачках;

$$H(\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}') = \int_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{ik}{f'} \mathbf{r}(\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}') \right] d^2 \mathbf{r} \quad (2)$$

– функция рассеяния точки (ФРТ) оптической системы датчика волнового фронта; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Если $T(\mathbf{r}) = 1$, то рассчитанная по формуле (2) ФРТ

$$H(\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}') = (\lambda f')^2 \delta(\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}'),$$

где $\delta(\boldsymbol{\rho})$ – дельта функция. Поэтому для всех точек, находящихся внутри выходного зрачка, имеем $E_{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}') = \beta E_{\text{in}}(\beta \boldsymbol{\rho}')$. Отсюда следует, что в данном случае интенсивность излучения для точек, находящихся внутри выходного зрачка, не зависит от фазы световой волны.

Однако если ФРТ отличается от δ -функции, связь между полем световой волны в выходном и входном зрачках становится более сложной и интенсивность световой волны в выходном зрачке начинает зависеть от ее фазы во входном зрачке. Например, если в фокальной плоскости установлен амплитудный фильтр с функцией пропускания по амплитуде светового поля

$$T(\mathbf{r}) = \exp \left(-\frac{r^2}{2r_0^2} \right), \quad (3)$$

то ФРТ может быть рассчитана по формуле

$$H(\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}') = 2\pi r_0^2 \exp \left(-\frac{k^2 r_0^2}{2f'^2} |\boldsymbol{\rho} + \beta \boldsymbol{\rho}'|^2 \right). \quad (4)$$

Отсюда следует, что в сигнал приемника, чувствительная площадка которого находится в точке $\boldsymbol{\rho}'$ выходного зрачка, дает вклад не одна точка входного зрачка, как было выше, а целая область, для которой передаточная функция существенно отличается от нуля. Эту область мы будем называть зоной влияния фильтра датчика волнового фронта. Для фильтра с функцией пропускания (3) размер зоны влияния r_z по порядку величины определяется выражением

$$r_z \approx \frac{f'}{kr_0}. \quad (5)$$

Если в пределах зоны влияния поле световой волны пространственно когерентно (например, размер зоны соответствует радиусу Фрида при наблюдениях в турбулентной атмосфере), то интерференция вкладов поля от различных точек входного зрачка приведет к тому, что сигнал с выхода приемника в точке наблюдения будет зависеть от фазы световой волны во входном зрачке.

Предположим, что, как и в когерентных оптических системах с многоканальной фазовой модуляцией, поле световой волны во входном зрачке может быть представлено в виде

$$E_{\text{in}}(\boldsymbol{\rho}, t) = \exp \{ ik[A(\boldsymbol{\rho}) + \Delta_m(\boldsymbol{\rho}) \sin(\omega t)] \}, \quad (6)$$

где $A(\boldsymbol{\rho})$ – волновая aberrация, обусловленная искажениями световой волны, которые необходимо измерить; $\Delta_m(\boldsymbol{\rho}) \sin(\omega t)$ – функция модуляции волнового фронта с частотой ω (апертурное зондирование), которая специально вносится для того, чтобы выделить сигнал, связанный с искажениями; $\Delta_m(\boldsymbol{\rho})$ – амплитуда модуляции. Основное отличие от традиционных систем апертурного зондирования состоит в том, что частота модуляции волнового фронта для всех точек выходного зрачка одна и та же.

Можно показать, что переменная составляющая интенсивности излучения на частоте ω в точке наблюдения $\boldsymbol{\rho}'$ выходного зрачка может быть рассчитана по формуле

$$I_s(\boldsymbol{\rho}') = 2C^2 i \iint_{\boldsymbol{\rho}} E(\boldsymbol{\rho}_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2) J_1(k[\Delta_m(\boldsymbol{\rho}_1) - \Delta_m(\boldsymbol{\rho}_2)]) \times H(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}') H^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}') d^2 \boldsymbol{\rho}_1 d^2 \boldsymbol{\rho}_2, \quad (7)$$

где $C = \beta/(\lambda^2 f'^2)$; $J_1(x)$ – функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка; $E \equiv E_{\text{in}}$. Из этой формулы следует, что если передаточная функция фильтра датчика волнового фронта комплексна, то даже при отсутствии искажений волнового фронта на частоте модуляции будет наблюдаться сигнал, отличный от нуля.

Если передаточная функция фильтра действительна, то последнюю формулу можно привести к виду, который удобно использовать при численных расчетах (см. Приложение 1):

$$I_s(\boldsymbol{\rho}') = 4C^2 \left\{ -A_0^s(\boldsymbol{\rho}') A_1^c(\boldsymbol{\rho}') + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s(\boldsymbol{\rho}') \times [A_{n-1}^c(\boldsymbol{\rho}') - A_{n+1}^c(\boldsymbol{\rho}')] \right\}, \quad (8)$$

где

$$A_n^c(\rho') = \int_{\rho} \cos[k\Delta(\rho)]H(\rho, \rho')J_n(k\Delta_m(\rho))d^2\rho; \quad (9)$$

$$A_n^s(\rho') = \int_{\rho} \sin[k\Delta(\rho)]H(\rho, \rho')J_n(k\Delta_m(\rho))d^2\rho.$$

Отсюда следует, что в этом случае при отсутствии искажений ($\Delta(\rho) = 0$) сигнал на частоте модуляции будет равен нулю ($A_n^s(\rho') = 0$ для всех n).

Дальнейший анализ будем проводить, считая, что поле световой волны во входном зрачке можно описать следующей формулой:

$$E_{in}(\rho) = \exp[ik\Delta(\rho)],$$

$$\Delta(\rho) = \left\{ -\alpha_x(\xi - \xi_0) - \alpha_y(\eta - \eta_0) + \Delta_{max} \left[1 - \frac{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{\rho_0^2} \right] \right\}, \quad (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 \leq \rho_0^2, \quad (10)$$

$$\Delta(\rho) = 0, \quad (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 > \rho_0^2,$$

где $\mathbf{a} = \{\alpha_x, \alpha_y\}$ – локальный угол наклона волнового фронта; ρ_0 – пространственный масштаб искажений волнового фронта. Аналогичным образом будем описывать и функцию модуляции $\Delta_m(\rho)$, но со своим пространственным масштабом ρ_m и $\mathbf{a} = 0$.

3. Датчик волнового фронта с модуляцией фазы, задаваемой управляемым элементом, расположенным в зрачке оптической системы датчика

Если размер зоны влияния фильтра датчика значительно меньше, чем $\min(\rho_0, \rho_m)$, и точки выходного зрачка, для которых рассчитывается сигнал, находятся далеко от его края – в области, где справедлива формула (10), то в выражении (1) при интегрировании можно не учитывать размеры входного зрачка. В этом случае для интенсивности поля может быть получена следующая простая формула ($\mathbf{a} = 0$):

$$I(\xi', \eta') = \frac{\beta^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \times \exp \left\{ - \left(\frac{f'q}{r_0} \right)^2 \frac{(\xi_0 + \beta\xi')^2 + (\eta_0 + \beta\eta')^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\}, \quad (11)$$

где $q(\Delta_{max}, \omega t) = q_0 + q_m \sin(\omega t)$; $q_0 = 2\Delta_{max}/\rho_0^2$ – локальная кривизна волнового фронта, связанная с внешними искажениями; $q_m = 2\Delta_m/\rho_m^2$ – максимальная кривизна волнового фронта, связанная с фазовой модуляцией (см. формулу (10)).

Обозначим радиус чувствительной площадки приемника через ρ'_{fd} . Если ее центр находится в точке с координатами ξ_0, η_0 , то выражение для мощности оптического сигнала, попадающего на чувствительную площадку приемника, будет иметь вид

$$P(\Delta_{max}, \omega t) = \pi \left(\frac{r_0}{f'q} \right)^2 \times$$

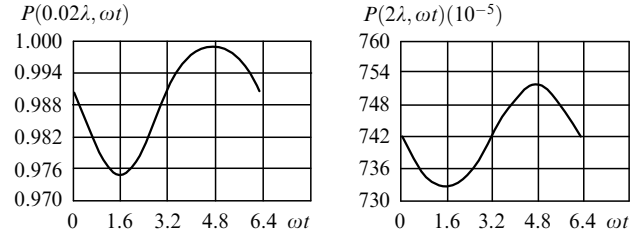


Рис.2. Зависимость мощности сигнала $P(\Delta_{max}, \omega t)$ от ωt при гармонической модуляции фазы световой волны в зрачке оптической системы. В фокальной плоскости системы установлен амплитудный транспарант с гауссовой функцией пропускания.

$$\times \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{f'q\rho'_{fd}}{r_0} \right)^2 \frac{\beta^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right] \right\}. \quad (12)$$

На рис.2 показаны зависимости мощности сигнала $P(\Delta_{max}, \omega t)$ от ωt , построенные по формуле (12). Видно, что при небольших искажениях форма сигналов сильно отличается от синусоидальной. Численные оценки показывают, что в этом случае она с хорошей точностью воспроизводится первыми двумя гармониками (косинусная и синусная составляющие) разложения (12) в ряд Фурье. При проведении расчетов использовались следующие значения параметров, входящих в формулу (11): $\lambda = 0.63$ мкм, $f' = 330$ мм, $r_0 = 20$ мкм, $\rho_0 = 10$ мм, $\rho'_{fd} = 300$ мкм, $\beta = -12^\circ$.

Если $k \rightarrow \infty$ (приближение геометрической оптики), то из формулы (12) найдем, что

$$P(\Delta_{max}, \omega t) = \pi \left(\frac{r_0}{f'q} \right)^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{f'q\rho'_{fd}\beta}{r_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Это соотношение может быть получено методами геометрической оптики (см. Приложение 2).

На рис.3 показаны уровни сигнала $m(\Delta_{max})$ на частоте модуляции, рассчитанные с помощью формулы (12), в зависимости от искажений волнового фронта Δ_{max}/λ для двух амплитуд модуляции Δ_m . Из рис.3 следует, что максимальный сигнал не зависит от пространственного масштаба искажений. Искажение Δ_{max}/λ , при котором достигается максимум сигнала, при уменьшении пространственного масштаба смещается в сторону меньших значений.

Из рис.3 также видно, что при больших амплитудах модуляции сигнал может быть очень большим. Поэтому для увеличения глубины модуляции привлекательной представляется оптическая схема датчика волнового фрон-

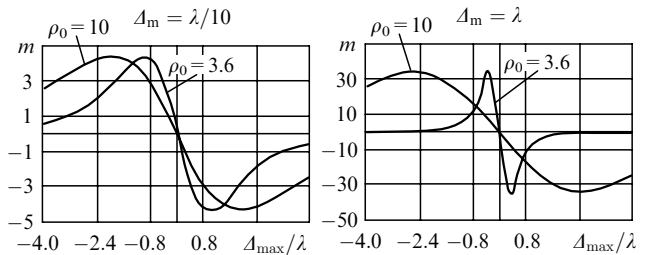


Рис.3. Уровни сигнала $m(\Delta_{max})$ на частоте модуляции в зависимости от искажений волнового фронта Δ_{max}/λ для случая, когда поперечный масштаб искажений ρ_0 значительно больше размера зоны влияния (при гармонической модуляции фазы световой волны в зрачке оптической системы). В фокальной плоскости системы установлен амплитудный транспарант с гауссовой функцией пропускания.

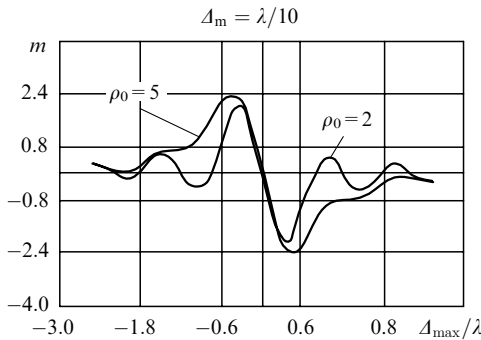


Рис.4. Уровни сигнала $m(\Delta_{\max})$ на частоте модуляции в зависимости от искажений волнового фронта Δ_{\max}/λ для случая, когда поперечный масштаб искажений ρ_0 сравним с размером зоны влияния (при гармонической модуляции фазы световой волны в зрачке оптической системы). В фокальной плоскости системы установлен амплитудный транспарант с гауссовой функцией пропускания.

та с промежуточным зрачком, в который устанавливается гибкое зеркало-модулятор. Это зеркало может быть выполнено в виде одноэлементного зеркала с изменяемой кривизной. При этом глубина модуляции сигнала на основной частоте может быть значительной. Такой вариант построения адаптивной системы вполне допустим в системах, предназначенных для коррекции искажений изображений в астрономии.

Если размер зоны влияния для фильтра датчика волнового фронта сопоставим с пространственным масштабом искажений, то для интенсивности сигнала в точке с координатами $\xi' = -\xi_0/\beta$, $\eta' = -\eta_0/\beta$ можно получить зависимость, аналогичную (11). Конечная формула довольно громоздка, поэтому мы не будем ее здесь приводить и ограничимся только результатами расчетов, полученными с ее помощью (рис.4). Расчеты проводились при значениях параметров системы, указанных выше. Из рис.4 видно, что при уменьшении пространственного масштаба искажений появляются дополнительные нулевые значения сигнала, что делает невозможным управление системой. Это обусловлено интерференцией между неискаженной и искаженной частями волнового фронта.

4. Датчик волнового фронта с модуляцией параметров фильтра

Второй способ получения информации о фазовых искажениях состоит в модуляции параметров фильтра датчика волнового фронта. В этом случае передаточная функция датчика меняется во времени. Анализ этого способа построения датчиков волнового фронта показывает, что при модуляции параметров передаточной функции датчика сигнал с его выхода при отсутствии искажений будет равен нулю лишь в том случае, когда ФРТ с частотой модуляции будет иметь свойство, аналогичное фильтрующему свойству δ -функции.

Если, например, в фокальной плоскости приемного объектива датчика волнового фронта установлен фильтр с функцией пропускания

$$T(r, t) = \exp \left[ikq_m(t) \frac{r^2}{2} \right], \tag{13}$$

то выражение для ФРТ датчика с таким фильтром может быть записано в виде

$$H(\rho + \beta\rho', t) = \frac{2\pi i}{kq_m(t)} \times \exp \left[-i \frac{k(\xi + \beta\xi')^2 + (\eta + \beta\eta')^2}{f'^2 q_m(t)} \right]. \tag{14}$$

Если $q_m(t) = q_{m0} \sin(\omega t)$, то при приближении к моментам времени $t_n = 2\pi n$ (где $n = \pm 0, 1, 2, \dots$) свойства ФРТ начинают определяться все более высокими пространственными частотами и становятся аналогичными фильтрующему свойству δ -функции [7].

Фильтр с функцией пропускания (13) выполняется в виде управляемого гибкого зеркала, которое устанавливается в фокальной плоскости приемного объектива [4, 6]. При модуляции в моменты времени t_n плоскость, в которой расположены чувствительные площадки фотоприемников, является изображением входного зрачка. Размер зоны влияния для фильтра с функцией пропускания (13) по порядку величины определяется выражением

$$r_z \approx f' \left(q_{m0} \frac{\lambda}{2} \right)^{1/2}, \tag{15}$$

и для того чтобы этот размер был примерно таким же, как в рассмотренном выше случае, нужны или большие деформации гибкого зеркала-модулятора, или оптическая система датчика волнового фронта с большим фокусным расстоянием. Условно можно считать, что в данном случае также реализован метод апертурного зондирования, в котором модулируются амплитуда и фаза в каждой точке выходного зрачка.

Если искажения волнового фронта заданы в виде (10), то напряженность поля в плоскости выходного зрачка для точек, далеко отстоящих от его границы, можно считать по формуле

$$E_{\text{out}}(x) = \frac{\exp(ik\Delta_{\max})}{1 + f'^2 q_m(\omega t)} + \frac{f'^2 q_m(\omega t)}{1 + f'^2 q_m(\omega t)} \times \exp \left[-ik \frac{\rho_0^2}{f'^2 q_m(\omega t)} \right]. \tag{16}$$

При этом из формулы (16) следует, что если $1 + f'^2 q_m(\omega t) = 0$, то $E_{\text{out}} = 1$. Наличие второго слагаемого в (16) приводит к появлению в выходном сигнале прием-

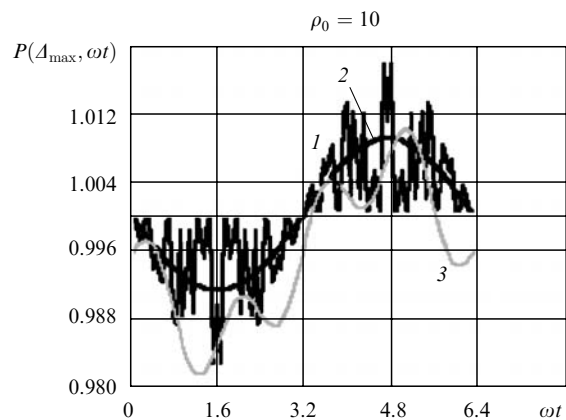


Рис.5. Зависимости мощности сигнала $P(\Delta_{\max}, \omega t)$ от ωt при гармонической модуляции фазы световой волны с помощью изменения параметров квадратичного фазового фильтра, установленного в фокальной плоскости оптической системы (см. текст).

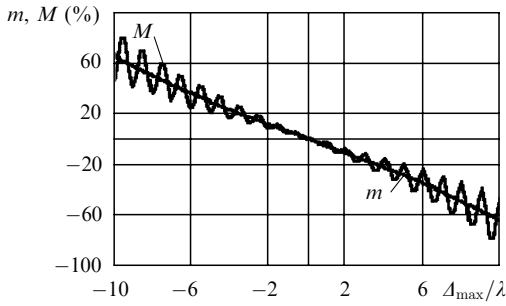


Рис.6. Уровни сигналов $m(\Delta_{\max})$ и $M(\Delta_{\max})$ на частоте модуляции в зависимости от искажений волнового фронта Δ_{\max}/λ при гармонической модуляции фазы световой волны с помощью изменения параметров квадратичного фильтра, установленного в фокальной плоскости оптической системы.

ника высокочастотных составляющих. На рис.5 приведены зависимости мощности сигнала от ωt , рассчитанные на основании формулы (16) (кривая 1) и на основании формулы (16) с учетом только первого слагаемого (кривая 2), а также их представление в виде ряда Фурье (до 4-й гармоники включительно, кривая 3). В расчетах предполагалось, что модуляция осуществляется гибким зеркалом со световым диаметром 30 мм и максимальной деформацией поверхности 20 мкм, а фокусное расстояние приемного объектива равно 1000 мм.

На рис.6 показаны амплитуды гармоник на частоте модуляции для сигналов $m(\Delta)$ и $M(\Delta)$, соответствующих кривым 2 и 3 на рис.5.

5. Учет наклонов волнового фронта

Если угол наклона волнового фронта равен нулю, то можно показать, что сигнал от внутренних точек зрачка для каждого из рассматриваемых типов датчиков волнового фронта определяется локальной кривизной волнового фронта, т.е. каждый из этих датчиков можно считать датчиком кривизны. Это справедливо для датчика с модуляцией фазы световой волны в фокальной плоскости и в том случае, когда угол наклона волнового фронта отличен от нуля. Для такого датчика интенсивность излучения во всех точках выходного зрачка, далеко отстоящих от его края, не зависит от угла наклона волнового фронта. Для датчика с модуляцией в зрачке и амплитудным фильтром в фокальной плоскости это не так очевидно.

С учетом угла наклона волнового фронта световой волны формулу (11) для интенсивности в выходном зрачке можно обобщить и записать следующим образом:

$$I(\xi', \eta') = \frac{\beta^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \times \exp \left\{ - \left(\frac{f'}{r_0} \right)^2 \frac{[(\xi_0 + \beta \xi')q - \alpha_x]^2 + [(\eta_0 + \beta \eta')q - \alpha_y]^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\}, \quad (17)$$

откуда получим

$$P(\Delta_{\max}, \omega t) = \frac{2\pi\beta^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \times \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha f'}{r_0} \right)^2 \frac{1}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\} \times$$

$$\times \int_0^{\rho'_{\text{fd}}} \exp \left\{ - \left(\frac{f' \beta q}{r_0} \right)^2 \frac{\rho'^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\} \times I_0 \left\{ 2 \left(\frac{f'}{r_0} \right)^2 \frac{\beta q \alpha \rho'}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\} \rho' d\rho', \quad (18)$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента; $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$.

Из последней формулы следует, что если искажения волнового фронта отсутствуют, т.е. $q = q_m \sin(\omega t)$, то функция $P(\Delta_{\max}, \omega t)$ будет четной функцией времени. Поэтому ее разложение в ряд Фурье не будет содержать гармоники на частоте ω при $\alpha \neq 0$, т.е. сигнал на основной частоте будет равен нулю, если кривизна волнового фронта в данной зоне зрачка будет равна нулю.

Если кривизна волнового фронта отлична от нуля, то сигнал на основной частоте при разных углах наклона волнового фронта будет различным. Раскладывая подынтегральное выражение в формуле (18) в ряд, получим

$$\exp \left\{ - \left(\frac{f' \beta q \rho'}{r_0} \right)^2 \frac{1}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\} \times I_0 \left\{ 2 \left(\frac{f'}{r_0} \right)^2 \frac{\beta q \alpha \rho'}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\} \approx 1 + \left(\frac{f'}{r_0} \right)^2 \frac{(\beta q \rho')^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \times \left\{ 1 - \left(\frac{f'}{r_0} \right)^2 \frac{\alpha^2}{1 + [f'^2 q / (kr_0^2)]^2} \right\} + o(\rho'^4). \quad (19)$$

В области малых искажений волнового фронта знак амплитуды первой гармоники разложения сигнала в ряд Фурье определяется знаком коэффициента при ρ'^2 разложения подынтегрального выражения в формуле (18) в степенной ряд. Из выражения (19) следует, что знак амплитуды первой гармоники будет положительным, если

$$\alpha < \frac{r_0}{f'} \left\{ 1 + \left[\frac{f' q(\Delta)}{kr_0^2} \right]^2 \right\}^{1/2} \approx \frac{r_0}{f'}.$$

Если это неравенство не выполняется, то знак сигнала на частоте модуляции изменится.

6. Выводы

Проведенный анализ показал следующее:

1. Вне зависимости от того, где расположен элемент, осуществляющий модуляцию фазы световой волны в датчике волнового фронта с пространственным разделением каналов (в плоскости входного зрачка или в фокальной плоскости), сигнал на частоте модуляции для точек, расположенных далеко от границ зрачка, определяется кривизной волнового фронта. Таким образом, все такие датчики можно считать датчиками кривизны типа датчика Родье [4].

2. При модуляции фазы световой волны во входном зрачке адаптивной системы появление локальных экстремумов может быть связано с наличием наклонов волнового фронта.

3. При модуляции параметров фазового фильтра, установленного в фокальной плоскости объектива дат-

чика, отсутствуют локальные экстремумы, связанные с углами наклона волнового фронта.

Приложение 1

Из формулы (1) следует, что интенсивность света в точках выходного зрачка может быть рассчитана по формуле

$$I(\rho') = C^2 \int_{\rho} \int_{\rho} E(\rho_1) E^*(\rho_2) H(\rho_1, \rho') H^*(\rho_2, \rho') d^2 \rho_1 d^2 \rho_2.$$

С учетом формулы (6) и известного разложения ([8], с. 987) получаем

$$\begin{aligned} & \exp\{ik[A_m(\rho_1) - A_m(\rho_2)] \sin(\omega t)\} \\ &= J_0(k[A_m(\rho_1) - A_m(\rho_2)]) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(A_m(\rho_1) - A_m(\rho_2)) \\ & \times \cos(2n\omega t) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(A_m(\rho_1) - A_m(\rho_2)) \sin[(2n+1)\omega t], \end{aligned}$$

откуда следует формула (7). Если передаточная функция датчика волнового фронта действительна, то мнимая часть в формуле (7) должна быть равна нулю и из этой формулы получаем, что

$$\begin{aligned} I_s(\rho') = -4C^2 \int_{\rho} \int_{\rho} & \sin[kA(\rho_1)] \cos[kA(\rho_2)] J_1(k[A_m(\rho_1) \\ & - A_m(\rho_2)]) H(\rho_1) H(\rho_2) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2. \end{aligned}$$

Из равенства ([8], с. 994)

$$J_n(y+z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y) J_{n-m}(z)$$

следует, что

$$J_1(y-z) = -J_0(y) J_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(y) [J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)],$$

откуда и вытекают формулы (8) и (9).

Приложение 2

Будем следить за пучком лучей, которые в отсутствие экрана участвовали бы в создании изображения на рассматриваемом фотоприемнике. Этому пучку соответствует во входном зрачке область размером r_{fd} . Когда искажений волнового фронта нет, все лучи этого пучка пересекаются в центре амплитудного экрана, где функция пропускания равна единице, и попадают на фотоприемник. Когда волновой фронт имеет искажение с локальной кривизной q , лучи этого пучка в плоскости экрана будут распределены в некотором кружке радиусом r^* (будем считать, что равномерно). При этом периферийные лучи ослабляются фильтром и уменьшается мощность света, попадающего на фотодиод:

$$\begin{aligned} P_{fd} &= \int_{r^*} I(r) T^2(r) d^2 r = \int_0^{r^*} \frac{\pi r_{fd}^2}{\pi r^{*2}} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) 2\pi r dr \\ &= \pi \frac{r_{fd}^2 r_0^2}{r^{*2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^{*2}}{r_0^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Используя формулу Ньютона, получаем

$$r^* = r_{fd} f q.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, с учетом равенства $r_{fd} = \beta \rho'_{fd}$ выражение для мощности света на чувствительной площадке фотоприемника перепишем в виде

$$P_{fd} = \pi \left(\frac{r_0}{f'q}\right)^2 \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{f'q\beta\rho'_{fd}}{r_0}\right)^2\right]\right\}.$$

1. O'Meara T.R. *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 306 (1977).
2. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. *Принципы адаптивной оптики* (М.: Наука, 1985).
3. О'Мира Т. В кн.: *Адаптивная оптика* (М.: Мир, 1980, с. 179–202).
4. Roddier F. *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge: University Press, 1999).
5. O'Meara T.R. *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 318 (1977).
6. Александров А.Б., Иншин П.П. *Квантовая электроника*, **19** (10), 1122 (1992).
7. Сороко Л.М. *Основы голографии и когерентной оптики* (М.: Наука, 1975).
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).