

## Четвертый Семинар памяти Д.Н.Клышко в Московском университете

17–19 мая 2005 г. в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова прошел 4-й Семинар памяти Д.Н.Клышко. С полным основанием можно утверждать, что этот семинар, участие в котором приняли практически все ведущие российские специалисты в области квантовой оптики и квантовой информации, стал традиционным. По материалам докладов было подготовлено 7 статей, которые мы и публикуем в этом выпуске «Квантовой электроники». И хотя это лишь часть представленных докладов, мы полагаем, что публикуемые статьи правильно отражают тематику и дух семинара.

Программу и аннотации докладов 4-го Семинара памяти Д.Н.Клышко, а также информацию о трех предыдущих семинарах, состоявшихся в 2001, 2002 и 2004 гг., можно найти на сайте <http://qopt.phys.msu.su>.

С.П.Кулик, А.Н.Пенин, М.В.Чехова

PACS 32.80.Pj; 42.50.Vk

## Формирование двумерных нерасплывающихся атомных волновых пакетов в поле двух стоячих световых волн

М.А.Ефремов, С.В.Петропавловский, М.В.Федоров, В.П.Шляйх, В.П.Яковлев

*Рассмотрен процесс формирования двумерных нерасплывающихся атомных волновых пакетов, образующихся при взаимодействии пучка двухуровневых атомов с двумя стоячими световыми волнами, которые поляризованы в одной плоскости. Механизмом, обеспечивающим бездисперсионную динамику частиц, является баланс двух процессов – быстрого убывания атомной волновой функции вдали от узлов поля вследствие спонтанных переходов в нерезонансные состояния и квантового уширения волновых пакетов, формирующихся в малых окрестностях узлов поля. Для перехода  $j_g = 0 \leftrightarrow j_e = 1$  найдены зависящие от координат амплитуды и фазы образующихся двумерных волновых пакетов.*

**Ключевые слова:** атомная оптика, волновые пакеты, литография.

### 1. Введение

Данная работа продолжает исследование [1, 2] нерасплывающихся волновых пакетов, образующихся при взаимодействии плоской атомной волны со стоячей световой волной. Напомним, что в строго резонансном случае, когда частота лазерного излучения совпадает с частотой рабочего перехода двухуровневых атомов, динамика частиц определяется чисто мнимым периодическим потенциалом, учитывающим необратимую спонтанную релаксацию атомов с верхнего уровня на другие нерезонансные уровни. Выбывание частиц из процесса взаимо-

действия с полем (за счет перехода на нерезонансные уровни) приводит с течением времени к исчезновению (удалению) значительных участков атомной плоской волны во всех областях пространства за исключением окрестностей узлов поля, где населенность верхнего рабочего уровня мала. В узлах поля формируются узкие волновые пакеты, испытывающие квантовое уширение вследствие принципа неопределенности Гейзенберга. Конкуренция двух процессов – квантового уширения пакета и удаления его периферии вследствие необратимой спонтанной релаксации – приводит к стационарному значению ширины сформировавшихся около узлов волновых пакетов [1].

В работе [1] найдено аналитическое решение нестационарного уравнения Шредингера с линеаризованным около узла поля мнимым потенциалом, которое полностью согласуется с недавним уникальным экспериментом [2].

В настоящей работе полученные результаты обобщаются на двумерный случай, когда атомный пучок взаимодействует с двумя перпендикулярно поляризованными стоячими световыми волнами. В этом случае вблизи узлов поля задача сводится к нестационарному дву-

М.А.Ефремов, М.В.Федоров. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: fedorov@ran.gpi.ru

С.В.Петропавловский, В.П.Яковлев. Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: petropavlovsky@theor.mephi.ru, yakovlev@theor.mephi.ru

W.P.Schleich. Abteilung für Quantenphysik, Universität Ulm, D-89069 Ulm, Germany

Поступила в редакцию 23 мая 2005 г.

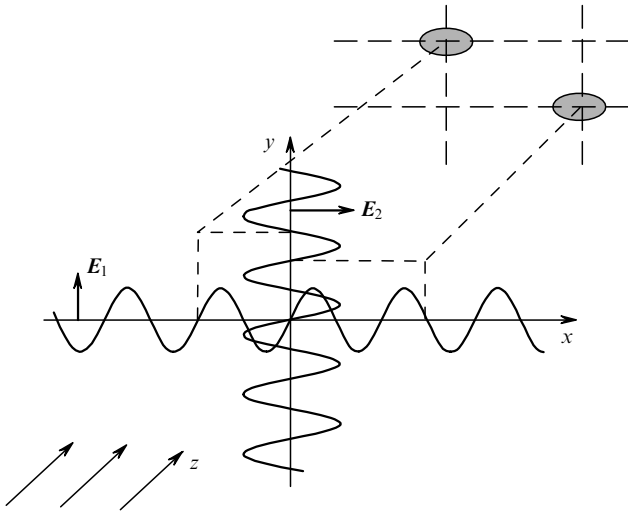


Рис.1. Схема формирования нерасплывающихся волновых пакетов атома вблизи узлов стоячей волны поля.

мерному уравнению Шредингера с чисто мнимым эффективным потенциалом в виде квадратичной формы по пространственным переменным. Обсуждается также общая постановка задачи, когда векторы поляризации стоячих волн не ортогональны.

### 2. Основные уравнения и качественное рассмотрение

Рассмотрим пучок двухуровневых атомов, распространяющихся вдоль оси  $z$  и взаимодействующих со «световым кристаллом», образованным двумя перпендикулярно поляризованными стоячими волнами  $E_1 = e_y E_1 \times \sin kx$  и  $E_2 = e_x E_2 \sin ky$  (рис.1). В дальнейшем будем полагать, что продольная скорость частиц (вдоль оси  $z$ ) велика и меняется в процессе взаимодействия пренебрежимо мало. Допустим также, что частота внешнего поля совпадает с частотой атомного перехода  $j_g = 0 \leftrightarrow j_e = 1$  (рис.2), где  $j_g$  и  $j_e$  – квантовые числа для основного ( $|g\rangle$ ) и возбужденного ( $|e\rangle$ ) состояний. Так как атомы взаимодействуют с полем дипольным образом, то в качестве возбужденного состояния  $|e\rangle$  может выступать одно из состояний  $|j_e = 1, m_e = \pm 1\rangle$ , приводящее к отличному от нуля матричному элементу дипольного момента. Наличие ширины  $\gamma$  у возбужденного уровня (рис.2) предполагает, что наряду с индуцированными переходами  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  атом может спонтанно излучить фотон, оказываясь при этом в каком-либо недетектируемом состоянии  $|i\rangle$  и выбывая, таким образом, из процесса резонансного взаимодействия с полем.

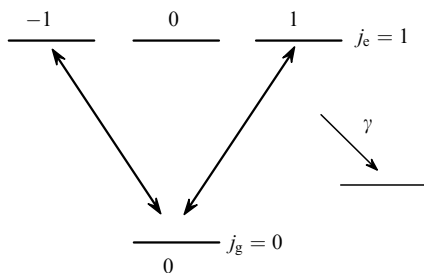


Рис.2. Схема уровней атома.

Динамика двухуровневого атома определяется уравнением Шредингера для амплитуд вероятности возбужденного ( $\Psi_e$ ) и основного ( $\Psi_g$ ) состояний [1, 5]

$$i \frac{\partial \Psi_e}{\partial t} + i \frac{\gamma}{2} \Psi_e = \hat{T} \Psi_e - (\Omega_1^* \sin kx + \Omega_2^* \sin ky) \Psi_g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi_g}{\partial t} = \hat{T} \Psi_g - (\Omega_1 \sin kx + \Omega_2 \sin ky) \Psi_e, \quad (2)$$

где  $\hat{T}$  – оператор кинетической энергии;  $\Omega_{1,2}$  – частоты Раби рабочего перехода  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ ;

$$\hat{T} = \frac{1}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \quad \Omega_{1,2} = \langle g | \hat{d}_{x,y} | e \rangle E_{1,2};$$

$\hat{d}_{x,y}$  – операторы дипольного перехода.

Нас интересует случай достаточно сильных полей,  $|\Omega_{1,2}| \sim \gamma$ , когда локальный параметр насыщения

$$\frac{|\Omega_1 \sin kx + \Omega_2 \sin ky|}{\gamma} \sim 1$$

на достаточном удалении от узлов  $\{x = \pi n/k, y = \pi m/k\}$  стоячих волн. Вследствие этого населенность верхнего уровня также составляет  $\sim 1$ , в связи с чем плотность частиц, резонансно взаимодействующих с полем, уменьшается со скоростью  $\gamma$ . При достаточно большом времени взаимодействия,  $t \gg 1/\gamma$ , волновая функция атомов  $\Psi_{e,g}$  обращается в нуль почти всюду за исключением малых окрестностей узлов стоячих волн,  $|k\delta x|, |k\delta y| \ll 1$ , где населенность верхнего уровня мала,

$$\frac{|\Omega_1 \sin kx + \Omega_2 \sin ky|^2}{\gamma^2} \sim \frac{|\Omega_1 k\delta x + \Omega_2 k\delta y|^2}{\gamma^2} \ll 1,$$

а плотность частиц убывает с существенно меньшей скоростью

$$\gamma \frac{|\Omega_1 k\delta x + \Omega_2 k\delta y|^2}{\gamma^2} \ll \gamma.$$

Характерные размеры окрестностей узлов поля  $\delta x$  и  $\delta y$ ,  $\delta x \sim \delta y$ , определяются из условия

$$\frac{|\Omega_1 k\delta x + \Omega_2 k\delta y|^2}{\gamma} t \sim 1,$$

что окончательно дает

$$\delta x(t) \sim \delta y(t) \sim \frac{\gamma}{k\Omega_0} \frac{1}{(\gamma t)^{1/2}}, \quad \Omega_0 = |\Omega_1 + \Omega_2|.$$

Итак, спонтанная релаксация атомов в нерезонансные состояния (см. рис.2) приводит к формированию узких атомных волновых пакетов с шириной  $\delta x \sim \delta y$ , убывающей как функция времени по закону  $1/\sqrt{t}$ . Скорость сужения волновых пакетов может быть качественно определена как

$$v_{\text{narr}} \sim \frac{\delta x(t)}{t} \sim \frac{\delta y(t)}{t} \sim \frac{\sqrt{\gamma}}{k\Omega_0} \frac{1}{t^{3/2}}.$$

С другой стороны, уменьшение ширины волнового пакета в координатном пространстве приводит к увеличению со временем характерных ширин импульсного распределения

$$\delta p_x(t) \sim \frac{1}{\delta x(t)} \sim \frac{k\Omega_0}{\gamma} \sqrt{\gamma t}, \quad \delta p_y(t) \sim \frac{1}{\delta y(t)} \sim \frac{k\Omega_0}{\gamma} \sqrt{\gamma t}$$

и, соответственно, скорости распыливания волнового пакета

$$v_{\text{spr}} \sim \frac{\delta p_x(t)}{M} \sim \frac{\delta p_y(t)}{M} \sim \frac{1}{M\delta x(t)} \sim \frac{1}{M\delta y(t)} \sim \frac{k\Omega_0\sqrt{t}}{M\sqrt{\gamma}}.$$

При увеличении  $t$  скорость распыливания волнового пакета  $v_{\text{spr}}(t)$  растет и в некоторый момент  $t_0$  становится равной скорости сужения  $v_{\text{narr}}(t)$ . При  $t > t_0$  дальнейшего сужения пакета не происходит, т. к. быстрое распыливание возвращает его ширину к той, которая достигается при  $t = t_0$ . Поэтому, приравняв  $v_{\text{spr}}(t)$  и  $v_{\text{narr}}(t)$ , мы можем качественно оценить как время сужения пакета  $t_0$ , так и его минимальную ширину  $\delta x_{\text{min}} \sim \delta y_{\text{min}}$ :

$$t_0 \sim \frac{1}{\omega_0},$$

где  $\omega_0 = \Omega_0(\omega_r/\gamma)^{1/2}$ ;  $\omega_r = k^2/2M$  – частота отдачи атома с массой  $M$ , и

$$\delta x_{\text{min}} \sim \delta y_{\text{min}} \sim \frac{1}{(M\omega_0)^{1/2}},$$

что совпадает с характерной длиной в эффективном осцилляторном потенциале, образуемом в окрестности узла стоячей волны.

### 3. Приближение осциллятора

Обратимся теперь к приближенному решению системы уравнений (1), (2). Из приведенного выше качественного рассмотрения следует, что нерасплывающиеся волновые пакеты образуются за достаточно большое время  $t \gg 1/\gamma$  при  $|\Omega_{1,2}| \sim \gamma$ . Поэтому в уравнении (1) можно пренебречь производной по времени. Кроме того, характерное значение кинетической энергии мало по сравнению с шириной возбужденного уровня,  $\omega_r \ll \gamma$ , что позволяет опустить оператор дифференцирования по пространственным переменным в уравнении (1). Таким образом, в соответствии с результатами работ [1, 2] волновая функция возбужденного состояния

$$\Psi_e \approx -\frac{(\Omega_1^* \sin kx + \Omega_2^* \sin ky)}{i\gamma/2} \Psi_g. \quad (3)$$

Подставляя приближенное выражение (3) в уравнение (2) и учитывая, что вблизи узла поля  $\sin kx \approx kx$  и  $\sin ky \approx ky$ , мы приходим к уравнению Шредингера для волновой функции  $\Psi_g$ , которая описывает движение центра масс атомов, находящихся в основном состоянии,

$$i\frac{\partial \Psi_g}{\partial t} = -\frac{1}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_g - i \left( \frac{M\omega_x^2}{2} x^2 + \frac{M\omega_y^2}{2} y^2 \right) \Psi_g,$$

где

$$\omega_{x,y} = 2|\Omega_{1,2}| \left( \frac{2\omega_r}{\gamma} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Данное уравнение должно решаться при начальном условии  $\Psi_g(x, y, 0) = k/\pi$ , которое отвечает плоской атомной волне с нулевым поперечным импульсом. При выводе уравнения (4) был также принят во внимание тот факт, что величина  $\Omega_1 \propto \langle g|\hat{d}_x|e \rangle$  принимает чисто мнимые значения, а  $\Omega_2 \propto \langle g|\hat{d}_y|e \rangle$  – действительные, и поэтому  $\text{Re}\{\Omega_1^* \Omega_2\} = 0$ . Таким образом, специальный выбор атомного перехода позволил получить уравнение с сепарабельным потенциалом, которое путем деления переменных,  $\Psi_g(x, y, t) = \Psi_x(x, t) \Psi_y(y, t)$ , распадается на два независимых уравнения для амплитуд  $\Psi_{x,y}$ . Решение одномерного уравнения для функции  $\Psi_\rho(\rho, t)$ , где  $\rho = x, y$ , получено в работе [1]:

$$\Psi_\rho(\rho, t) = \left( \frac{k/\pi}{\cosh \beta t} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_\rho \rho^2 \tanh \beta_\rho t\right), \quad (5)$$

где  $\alpha_\rho = M\omega_\rho \exp(-i\pi/4)$ ;  $\beta_\rho = \omega_\rho \exp(i\pi/4)$ .

Таким образом, двумерная плотность вероятности  $|\Psi_g(x, y, t)|^2$  является гауссовой поверхностью с зависящими от времени размерами области локализации  $\delta x(t) = 1/\{\text{Re}[\alpha_x \tanh(\beta_x t)]\}^{1/2}$ ,  $\delta y(t) = 1/\{\text{Re}[\alpha_y \tanh(\beta_y t)]\}^{1/2}$ . Заметим, что квадратично зависящая от координат фаза волновой функции (5) также может измеряться в реальном эксперименте (см. [2]). Установившаяся форма нерасплывающегося волнового пакета при  $t > 1/\min\{\omega_x, \omega_y\}$  представляет собой эллипс с отношением полуосей  $\delta x_0/\delta y_0 = (E_2/E_1)^{1/2}$ .

Рассмотрим теперь общий случай, когда стоячие волны, образующие «световой кристалл», по-прежнему поляризованы в одной плоскости, но векторы поляризации не ортогональны, а образуют угол  $\pi/2 + \theta$  (рис.3), т. е.

$$E_1 = (-E_1 \sin \theta e_x + E_1 \cos \theta e_y) \sin \mathbf{kr},$$

$$E_2 = E_2 \sin ky e_x, \quad (6)$$

где  $\mathbf{kr} = kx \cos \theta + ky \sin \theta$ .

Как и прежде, нерасплывающиеся волновые пакеты будут формироваться вблизи узлов скошенной решетки (рис.3) за счет установившегося равновесия двух процес-

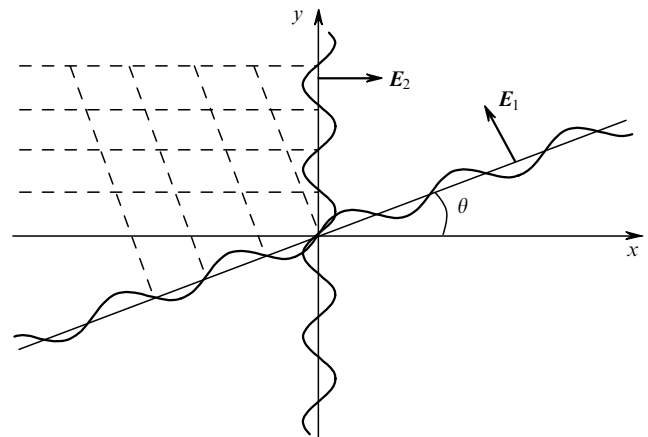


Рис.3. «Световой кристалл», образованный стоячими волнами, векторы поляризации которых не ортогональны.

сов – быстрого убывания атомной волновой функции вдали от узлов поля и квантового уширения образующихся волновых пакетов.

Опуская производные по времени и пространственным переменным в уравнении для волновой функции возбужденного состояния и учитывая, что для перехода  $j_g = 0 \leftrightarrow j_e = 1$  величина  $\text{Re}\{d_x^* d_y\}$  обращается в нуль, получаем уравнение для амплитуды вероятности  $\Psi_g(x, y, t)$  вблизи узла поля  $x = y = 0$ :

$$i \frac{\partial \Psi_g}{\partial t} = -\frac{1}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_g + \frac{(Ax^2 + By^2 + Cxy)}{iy/2} \Psi_g, \quad (7)$$

где

$$A = k^2 d^2 E_1^2 \cos^2 \theta;$$

$$B = k^2 d^2 (E_2^2 - 2E_1 E_2 \sin^2 \theta + E_1^2 \sin^2 \theta);$$

$$C = k^2 d^2 E_1 (E_1 - E_2) \sin 2\theta;$$

$$d \equiv |d_x| = |d_y|.$$

Совершив поворот координат осей на угол  $\varphi$ , такой, что

$$\tan \varphi = \frac{C}{A - B} = \frac{E_1 \sin 2\theta}{E_2 + E_1 \cos 2\theta},$$

перейдем в уравнении (7) к новым переменным

$$x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad x_2 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

и получим уравнение для волновой функции основного состояния  $\Psi_g(x_1, x_2, t)$  с диагонализированной потенциальной энергией

$$i \frac{\partial \Psi_g}{\partial t} = -\frac{1}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Psi_g - i \left( \frac{M\omega_1^2}{2} x_1^2 + \frac{M\omega_2^2}{2} x_2^2 \right) \Psi_g, \quad (8)$$

где

$$\omega_{1,2} = d \left( \frac{2\omega_f}{\gamma} \right)^{1/2} |E_1 - E_2 \pm (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos 2\theta)^{1/2}|.$$

Решение уравнения (8) с начальным условием  $\Psi_g(x_1, x_2, 0) = k/\pi$  при  $t > 1/\min\{\omega_1, \omega_2\}$  представляет собой эллипс с отношением полуосей, равным  $\omega_1/\omega_2$ . В случае равных амплитуд стоячих волн,  $E_1 = E_2$  или  $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ ,

конечной формой нерасплывающегося волнового пакета является окружность диаметром  $(2\omega_f^2/\Omega^2)^{1/4}$ .

#### 4. Заключение

В работе рассмотрен процесс формирования двумерных нерасплывающихся атомных волновых пакетов, которые образуются при взаимодействии двухуровневых атомов со стоячими световыми волнами, поляризованными в одной плоскости. Показано, что специальный выбор атомного перехода позволяет максимально упростить аналитическое описание рассматриваемой системы и свести двумерную задачу к двум одномерным уравнениям Шредингера с известным решением.

Взаимодействие двухуровневых атомов с двумерным световым кристаллом рассматривалось в работах [3, 4], однако предметом исследования являлась интенсивность прошедшей через световой кристалл атомной волны. В настоящей работе получены как амплитуда, так и фаза волновых пакетов, формирующихся вблизи узлов поля. Когерентные свойства образующегося массива из волновых пакетов могут быть использованы, например, в атомной интерферометрии.

Отметим, что предложенный аналитический подход соответствует полностью открытой двухуровневой системе, когда все спонтанные переходы переводят атомы в какие-либо нерезонансные состояния, что ведет к выбыванию частиц из процесса резонансного взаимодействия с полем. В реальном эксперименте [2] 16 % атомов, спонтанно излучивших фотон, возвращаются в основное состояние.

Учет этого явления требует решения уравнений для атомной матрицы плотности (см. [5]) описывающих эффект отдачи при спонтанном переходе. Решение этой задачи как в одномерном, так и в двумерном случае составит предмет будущих исследований.

Данная работа поддержана грантами РФФИ № 04-02-16734 и № 05-02-16469. С.В.Петропавловский также благодарит Фонд некоммерческих программ «Династия» за поддержку. М.А.Ефремов выражает благодарность за поддержку Фонду содействия отечественной науки.

1. Федоров М.В., Ефремов М.А., Яковлев В.П., Шляйх В.П. *ЖЭТФ*, **124**, 578 (2003).
2. Stuetzle R., Goebel M.C., Hoerner T., Kierig E., Mourachko I., Oberthaler M.K., Efremov M.A., Fedorov M.V., Yakovlev V.P., van Leeuwen K.A.H., Schleich W.P. *e-print quant-ph/0412138*.
3. Petra S.J.H., van Leeuwen K.A.H., Feenstra L., Hogervorst W., Vassen W. *Appl. Phys. B*, **79**, 279 (2004).
4. Turlapov A., Tonyushkin A., Sleatoret T. *Phys. Rev. A*, **68**, 023408 (2003).
5. Казанцев А.П., Сурдутович Г.И., Яковлев В.П. *Механическое действие света на атомы* (М.: Наука, 1991).