

# Двухфотонный перенос электрона между квантовыми точками

А.М.Башаров, С.А.Дубовис

*Методом эквивалентного преобразования получен эффективный гамильтониан системы, описывающий электроны двух квантовых точек в двухчастотном электромагнитном поле при комбинационном резонансе поля с парой электронных уровней разных точек. Корректно учтены состояния непрерывного спектра (зоны проводимости). Проанализирована роль слагаемых, описывающих динамический эффект Штарка в двухчастичной системе. Предложен новый механизм переноса частиц между квантоворазмерными ямами в нерезонансном электромагнитном поле, свободный от недостатков исследовавшихся ранее моделей.*

**Ключевые слова:** квантовая точка, оптический перенос электрона, двухфотонный и комбинационный резонансы, эффективный гамильтониан.

## 1. Введение

В работах [1–8] рассматривается перенос электрона между двумя удаленными квантовыми точками под действием электромагнитного импульса. Если при этом пару квантовых точек рассматривать как кубит, то оптический перенос электрона между ними может быть использован для реализации квантовых логических элементов [1, 2].

Работа [1] положила начало исследованиям трехуровневых моделей квантовых точек, в которых оптический перенос электрона между низколежащими состояниями двух идентичных квантовых точек осуществляется через третий энергетический уровень, расположенный вблизи верхней границы разделяющего их барьера (рис.1,а). Частота электромагнитного импульса  $\omega$  при этом выбирается такой, чтобы пара нижних энергетических уровней попадала в резонанс с верхним делокализованным состоянием. Экспериментальная реализация описанного механизма связана со значительными трудностями: наряду с технологической сложностью изготовления двух почти одинаковых квантовых точек с изначально заданными свойствами существуют жесткие ограничения, обусловленные однофотонным переходом электрона с верхнего уровня в состояние с непрерывным спектром (штриховая стрелка на рис.1,б) [7].

От необходимости использовать идентичные квантовые точки свободен механизм переноса, основанный на эффекте комбинационного резонанса [8–11]. В рамках этого механизма периодические переходы между двумя стационарными состояниями с энергиями  $E_1$  и  $E_2$  возникают под воздействием двух монохроматических волн (рис. 2,а), частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  подобраны таким образом, что выполняется условие комбинационного резонанса:

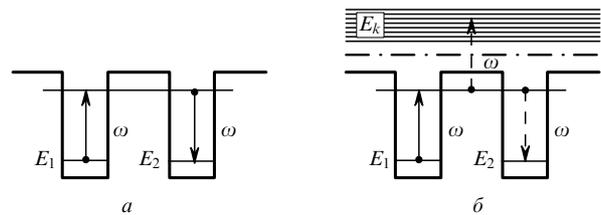


Рис.1. Схемы переноса электрона между двумя идентичными квантовыми точками через третье связанное состояние, делокализованное между ними, без учета состояний непрерывного спектра (а) и с учетом однофотонного перехода электрона в состояние с непрерывным спектром (переход в континуум) (б).

$$E_2 - E_1 \approx \omega_1 - \omega_2 \quad (1)$$

(здесь и далее  $\hbar = 1$ ). Тем не менее предложенный в работе [8] способ электронного переноса имеет тот же недостаток, что и трехуровневые системы [1–7] – он требует наличия квазирезонансного связанного состояния, делокализованного между удаленными квантовыми точками, т. е. фактически лежащего вблизи верхней границы разделяющего их барьера. Наличие такого уровня также накладывает на параметры задачи дополнительные ограничения, обусловленные прямыми переходами в состояние с непрерывным спектром [7].

В настоящей работе показано, что для переноса электрона между квантоворазмерными ямами достаточно присутствующих в потенциальном рельефе любого вида состояний непрерывного спектра, которые в работах [1–

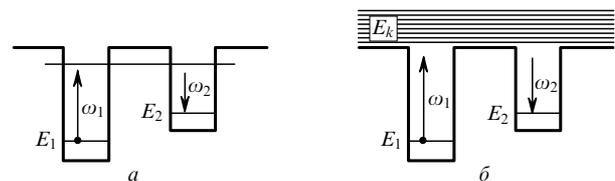


Рис.2. Схемы комбинационного механизма переноса электрона в случае, когда квазирезонансным является связанное состояние, делокализованное между квантовыми точками (а), и в общем случае с использованием состояний непрерывного спектра (б).

А.М.Башаров, С.А.Дубовис. РНЦ «Курчатовский институт», Лаборатория нелинейной оптики, Россия, 123182 Москва, пл. акад. Курчатова, 1; e-mail: bash@online.ru, spiritt@list.ru

Поступила в редакцию 2 июня 2005 г.

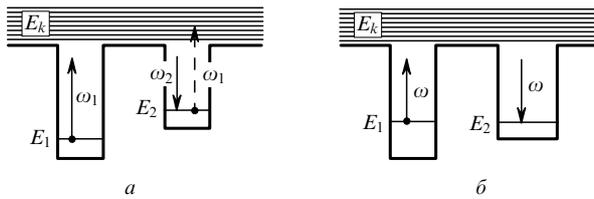


Рис.3. Схемы однофотонного перехода в континуум (а) и переноса электрона между состояниями с близкой энергией ( $\omega_1 \approx \omega_2 \equiv \omega$ ) (б).

6, 8] не учитывались. В силу своей делокализованности энергетические уровни континуума могут выполнять роль квазирезонансных состояний, необходимых для комбинационных переходов между удаленными квантовыми точками (рис.2,б). Как показано ниже, перенос электрона при этом будет тем более интенсивным, чем ближе к непрерывному спектру лежит квазирезонансная область энергий

$$E_{\text{res}} = E_1 + \omega_1 \approx E_2 + \omega_2. \quad (2)$$

Однако если энергии  $E_1$  и  $E_2$  значительно различаются, то выбор частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , при которых энергия  $E_{\text{res}}$  близка к границе континуума, приводит к необратимому переходу электрона в состояние с непрерывным спектром из состояния с меньшей энергией связи (штриховая стрелка на рис.3,а).

Чтобы добиться высокой интенсивности электронных переходов и избежать при этом прямой ионизации, в настоящей работе предлагается использовать такие пары квантовых точек, среди электронных состояний которых имеются состояния с близкими энергиями (рис.3,б), т. е. с энергиями  $E_1 \approx E_2 \equiv E$ . В этом случае из условия комбинационного резонанса (1) следует, что  $\omega_1 \approx \omega_2$ , т. е. для переноса электрона между данными квантовыми точками достаточно воздействовать на систему электромагнитным полем только одной частоты. Вообще говоря, эта частота может быть произвольной, но если она больше энергии связи  $E$ , то наряду с периодическими переходами между локализованными состояниями будет происходить необратимый переход электрона за счет прямой ионизации в состояние с непрерывным спектром.

## 2. Эффективный гамильтониан комбинационного резонанса

Рассмотрим динамику системы, изображенной на рис.2,б, на которую воздействует электромагнитное поле, напряженность электрической составляющей которого задается выражением

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_j(t) e^{-i\omega_j t} + \text{компл. сопр.},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_j(t)$  – медленно меняющиеся (по сравнению с  $\omega_j$ ) амплитуды волн. Пространственной зависимостью поля будем пренебрегать, поскольку считаем, что линейные размеры рассматриваемой системы много меньше длин воздействующих на нее электромагнитных волн. Кроме того, для упрощения формул полагаем, что векторы напряженностей  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  сонаправлены или поля  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  одинаково поляризованы. Отметим, что индексы 1 и 2 соответствуют локализованным состояниям, между которыми необходимо осуществить перенос, а индекс  $k$  – другим стационарным состояниям, в том числе состоянию

непрерывного спектра. Для определенности энергию будем отсчитывать от нижней границы континуума (зоны проводимости).

В дипольном приближении уравнение Шредингера, описывающее динамику волновой функции  $\Psi$  электрона в такой системе, имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 - E \hat{d}) \Psi, \quad (3)$$

где  $\hat{H}_0$  – гамильтониан в отсутствие электромагнитного поля;  $\hat{d}$  – оператор проекции дипольного момента на направление вектора  $\mathbf{E}$ .

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, описывающую переходы только между связанными состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , выполним с помощью оператора  $\hat{S}$  эквивалентное преобразование вектора состояния системы, аналогичное приведенному в монографиях [10, 11]:

$$\Psi = e^{i\hat{S}} \tilde{\Psi}, \quad (4)$$

тогда уравнение (3) преобразуется к виду

$$i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \hat{H} \tilde{\Psi} \quad (5)$$

с эффективным гамильтонианом

$$\hat{H} = e^{-i\hat{S}} \hat{H}_0 e^{i\hat{S}} - e^{-i\hat{S}} E \hat{d} e^{i\hat{S}} - i e^{-i\hat{S}} \frac{d e^{i\hat{S}}}{dt}. \quad (6)$$

Представим  $\hat{S}$  и  $\hat{H}$  в виде рядов по степеням напряженности электрического поля:

$$\hat{S} = \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)} + \dots, \quad \hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(2)} + \dots, \quad (7)$$

где  $\hat{S}^{(n)}$ ,  $\hat{H}^{(n)}$  – члены  $n$ -го порядка по полю. Из выражения (6) следует, что

$$\hat{H}^{(0)} = \hat{H}_0,$$

$$\hat{H}^{(1)} = -E \hat{d} - i[\hat{S}^{(1)}, \hat{H}_0] + \frac{\partial \hat{S}^{(1)}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \frac{i}{2} [\hat{S}^{(1)}, E \hat{d}] - \frac{i}{2} [\hat{S}^{(1)}, \hat{H}^{(1)}] \\ & - i[\hat{S}^{(2)}, \hat{H}_0] + \frac{\partial \hat{S}^{(2)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для получения замкнутой системы уравнений потребуем, чтобы все матричные элементы слагаемого  $\hat{H}^{(1)}$  эффективного гамильтониана были равны нулю (подробнее см. в [10, 11]), а из матричных элементов слагаемого  $\hat{H}^{(2)}$  отличными от нуля были бы только диагональные элементы, а также те, которые соответствуют переходам между состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Математически эти требования задаются следующими выражениями:

$$\tilde{H}_{\alpha\beta}^{(1)} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, k, \quad (10)$$

$$\tilde{H}_{1k}^{(2)} = \tilde{H}_{2k}^{(2)} = 0.$$

Условия (10) с учетом выражения (8) приводят к

следующему уравнению для матричных элементов оператора  $\hat{S}^{(1)}$ :

$$S_{\alpha\alpha}^{(1)} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\alpha\beta}^{(1)} + i\omega_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{(1)} = d_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^2 [\varepsilon_j(t)e^{-i\omega_j t} + \varepsilon_j^*(t)e^{i\omega_j t}],$$

где  $\omega_{\alpha\beta} = E_\alpha - E_\beta$ .

Решением этого уравнения являются матричные элементы

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^{(1)} &= d_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{\alpha\beta}(\tau-t)} [\varepsilon_j(t)e^{-i\omega_j t} + \varepsilon_j^*(t)e^{i\omega_j t}] d\tau \\ &= d_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[ \frac{\varepsilon_j e^{-i\omega_j t}}{i(\omega_{\alpha\beta} - \omega_j)} + \frac{\varepsilon_j^* e^{i\omega_j t}}{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_j)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t} \frac{e^{-i\omega_j t}}{(\omega_{\alpha\beta} - \omega_j)^2} + \frac{\partial \varepsilon_j^*}{\partial t} \frac{e^{i\omega_j t}}{(\omega_{\alpha\beta} + \omega_j)^2} \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку мы считаем, что амплитуды  $\varepsilon_{1,2}(t)$  электромагнитных волн изменяются медленно по сравнению с их частотами  $\omega_{1,2}$ , то в формуле (11) будем учитывать только первое слагаемое

$$S_{\alpha\beta}^{(1)} = d_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{\varepsilon_j e^{-i\omega_j t}}{i(\omega_{\alpha\beta} - \omega_j)} + \frac{\varepsilon_j^* e^{i\omega_j t}}{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_j)} \right].$$

Используя это выражение при расчете матричных элементов оператора  $\tilde{H}^{(2)}$ , можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{21}^{(2)} &= e^{-i\omega_{21}t} \frac{\partial}{\partial t} [S_{21}^{(2)} e^{i\omega_{21}t}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 [\varepsilon_q(t)e^{-i\omega_q t} + \varepsilon_q^*(t)e^{i\omega_q t}] \\ &\times \sum_k d_{2k} d_{k1} \sum_{j=1}^2 \left[ \varepsilon_j e^{-i\omega_j t} \left( \frac{1}{\omega_{2k} - \omega_j} - \frac{1}{\omega_{k1} - \omega_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_j^* e^{i\omega_j t} \left( \frac{1}{\omega_{2k} + \omega_j} - \frac{1}{\omega_{k1} + \omega_j} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбираем матричные элементы так, чтобы  $\tilde{H}_{21}^{(2)} \sim \exp(-i\omega_{21}t) \sim \exp[i(\omega_2 - \omega_1)t]$ , что физически соответствует осцилляциям с частотой комбинационного резонанса. При этом выражение (12) приобретает вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{21}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2^* e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \sum_k d_{2k} d_{k1} \left( \frac{1}{\omega_{k2} + \omega_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega_{k1} - \omega_1} + \frac{1}{\omega_{k2} - \omega_2} + \frac{1}{\omega_{k1} + \omega_2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, слагаемое эффективного гамильтониана второго порядка по напряженности поля, которое описывает двухфотонные процессы, имеет отличные от нуля недиагональные матричные элементы, соответствующие переходам между состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Для описания таких переходов можно ограничить разложение (7) слагаемыми второго порядка. Выражения для матричных эле-

ментов эффективного гамильтониана двухфотонных переходов  $\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)}$  окончательно принимают следующий вид:

$$H_{11} = E_1 + E_1^{\text{St}}, \quad H_{22} = E_2 + E_2^{\text{St}}, \quad (13)$$

$$H_{21} = e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} A, \quad H_{12} = e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} A^*, \quad (14)$$

$$H_{1k} = H_{2k} = 0, \quad (15)$$

где введены новые обозначения:

$$E_i^{\text{St}} = - \sum_{j=1}^2 |\varepsilon_j|^2 \sum_k |d_{ki}|^2 \left( \frac{1}{\omega_{ki} + \omega_j} + \frac{1}{\omega_{ki} - \omega_j} \right) \quad (16)$$

– штарковские сдвиги уровней;

$$A = -\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \sum_k d_{2k} d_{k1} \left( \frac{1}{\omega_{k2} + \omega_1} + \frac{1}{\omega_{k1} - \omega_1} \right) \quad (17)$$

– частота Раби.

### 3. Вероятность переноса электрона

Чтобы аналитически описать процесс переноса электрона между состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , пренебрежем возможными процессами релаксации и электрон-электронных корреляций и вернемся к преобразованному уравнению Шредингера (5), решение которого будем искать в виде суперпозиции всех состояний:

$$\tilde{\Psi} = \sum_\alpha a_\alpha(t) e^{-i(E_\alpha + E_\alpha^{\text{St}})t} |\alpha\rangle.$$

Используя выражения (13)–(15), можно получить замкнутую систему уравнений, описывающую переходы между состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ :

$$\dot{a}_1 = -i a_2 e^{-i\Delta t} A^*, \quad (18)$$

$$\dot{a}_2 = -i a_1 e^{i\Delta t} A,$$

где  $\Delta \equiv (E_2 + E_2^{\text{St}} - E_1 - E_1^{\text{St}}) - (\omega_1 - \omega_2)$  – отстройка системы от комбинационного резонанса.

Если пренебречь зависимостью  $A$  от времени и положить  $a_1(t=0) = 1, a_2(t=0) = 0$  (т.е. электрон в начальный момент времени находится в первой квантовой точке), то решение системы уравнений (18) имеет обычный вид для двухуровневых систем:

$$a_1 = e^{-i(A/2)t} \left( \cos \Omega t + i \frac{A}{2\Omega} \sin \Omega t \right),$$

$$a_2 = -i \frac{A}{\Omega} e^{-i(A/2)t} \sin \Omega t,$$

где

$$\Omega = \left( |A|^2 + \frac{1}{4} \Delta^2 \right)^{1/2}.$$

Квадрат модуля коэффициента  $a_2$ , который определяет вероятность переноса электрона из первой точки во вторую, задается выражением

$$|a_2|^2 = \frac{|A|^2}{2\Omega^2}(1 - \cos 2\Omega t).$$

Таким образом, если отстройка от резонанса много меньше частоты Раби ( $\Delta \ll |A|$ ), то можно осуществить перенос электрона между квантовыми точками с вероятностью  $|a_2|_{\max}^2 \approx 1 - \Delta^2/(4|A|^2)$ , близкой к единице.

#### 4. Выбор оптимальной частоты электромагнитного импульса

Интенсивность переноса электрона между квантовыми точками определяется частотой Раби  $A$ , которая может варьироваться не только путем изменения напряженности электромагнитных импульсов, но и выбором их частот.

Анализируя выражение (17), в первую очередь следует отметить, что вклад в него вносят только те состояния, которые не являются локализованными в одной из квантовых точек, поскольку в противном случае произведение  $d_{2k}d_{k1}$  равно нулю. Следовательно, необходимо учитывать только состояния непрерывного спектра и, возможно, дискретные состояния, энергии которых лежат вблизи верхней границы разделяющего квантовые точки барьера.

Будем искать условия возрастания  $A$ , ориентируясь только на состояния непрерывного спектра, поскольку они присутствуют в потенциальном рельефе любого вида, в то время как наличие дискретных делокализованных состояний является весьма частным случаем и их влияние на двухфотонные процессы при необходимости можно учесть как поправку.

Если в выражении (17) перейти от суммирования к интегрированию по состояниям непрерывного спектра, оно преобразуется к виду

$$A = -\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \frac{V}{(2\pi)^3} \int d_{2k} d_{k1} \left( \frac{1}{E_k - E_{\text{res}}} + \frac{1}{E_k - 2E_1 + E_{\text{res}}} \right) dk, \quad (19)$$

где  $V$  – объем системы;  $k$  – квазиволновый вектор.

Будем рассматривать только те ситуации, когда  $E_{\text{res}} < 0$ , т. к. в противном случае электрон будет переходить в состояние с непрерывным спектром вследствие однофотонной ионизации. Из выражения (19) видно, что для любых  $E_k > 0$  и  $E_2 < 0$  сумма, стоящая в круглых скобках, монотонно возрастает в интервале  $E_1 < E_{\text{res}} < 0$ . Уже из этих соображений логично предположить, что создание оптимальных для переноса электрона условий достигается в том случае, когда квазирезонансная область энергий  $E_{\text{res}}$  лежит вблизи нижней границы непрерывного спектра, что в определенном смысле является предсказуемым результатом.

Такой выбор частот с целью увеличения частоты Раби имеет и более существенные основания. При интегрировании по квазиволновому вектору  $k$  комплексный множитель  $d_{2k}d_{k1}$  в выражении (19) сложным образом осциллирует и в значительной степени «гасит» сам себя, что приводит к существенному уменьшению частоты Раби. Этот эффект будет фактически подавлен, если выбрать такие частоты внешних полей, при которых  $E_{\text{res}} \sim 0$ ,

поскольку тогда состояния вблизи нижней границы непрерывного спектра являются выделенными. Слагаемые в знаменателях в выражении (19), соответствующие этим энергетическим уровням, близки к нулю, причем фазу множителя  $d_{2k}d_{k1}$  для всех состояний вблизи нижней границы континуума можно считать одинаковой. Следовательно, именно состояния вблизи границы континуума будут вносить основной вклад в интеграл, не приводя при этом к их взаимному ослаблению.

#### 5. Одночастотный перенос электрона

Таким образом, выбор энергии  $E_{\text{res}}$  вблизи нижней границы непрерывного спектра приводит к резкому увеличению частоты Раби. Однако такой выбор не позволяет осуществить достоверный перенос электрона, поскольку приводит к однофотонному переходу электрона в состояние с непрерывным спектром из состояния с меньшей энергией связи (штриховая стрелка на рис.3,а). Формально это выражается в появлении в выражении (16) нулевых знаменателей в слагаемых, которые отвечают уровням континуума, попадающим в резонанс с уровнем  $|2\rangle$  на частоте  $\omega_1$ . С точки зрения математического описания подобных процессов от нулевых знаменателей можно избавиться стандартным приемом – заменой  $\omega_1$  на  $\omega_1 + i\delta$ , где  $\delta = +0$ . Это приводит к тому, что у диагонального матричного элемента  $H_{22}$  появляется мнимая добавка, которая описывает необратимый переход электрона в состояние с непрерывным спектром [7]:

$$H_{22} = E_2 + E_2^{\text{St}} + i\Gamma_2, \quad (20)$$

где

$$E_2^{\text{St}} = -|\varepsilon_2|^2 \sum_k |d_{k2}|^2 \left( \frac{1}{\omega_{k2} + \omega_2} + \frac{1}{\omega_{k2} - \omega_2} \right) \quad (21)$$

$$-|\varepsilon_1|^2 \left( \sum_k \frac{|d_{k2}|^2}{\omega_{k2} + \omega_1} + \sum_k P \frac{|d_{k2}|^2}{\omega_{k2} - \omega_1} \right),$$

$$\Gamma_2 = -\pi |\varepsilon_1|^2 \sum_k |d_{k2}|^2 \delta(\omega_{k2} - \omega_1).$$

Вообще говоря, для конкретного вида потенциала можно найти такие условия, когда на фоне других характерных величин задачи интенсивность ионизации будет пренебрежимо мала. Однако анализ ситуации в общем виде показал, что необходимости учета неблагоприятных процессов необратимого перехода можно избежать путем некоторого изменения исходной модели.

Будем рассматривать такие пары квантовых точек, для которых энергии локализованных в них стационарных состояний мало отличаются друг от друга (рис.3,б), т. е.  $E_1 \approx E_2 \equiv E$ . В этом случае из условия комбинационного резонанса (1) следует, что  $\omega_1 \approx \omega_2 \equiv \omega$ , т. е. для переноса электрона между такими квантовыми точками на систему достаточно воздействовать электромагнитным полем только одной частоты. Эквивалентное преобразование (3)–(9) волновой функции данной системы приводит к следующим выражениям для матричных элементов эффективного гамильтониана:

$$H_{1,2} = E_{1,2} + E_{1,2}^{\text{St}}, \quad H_{21} = A = H_{12}^*, \quad (22)$$

где

$$E_x^{\text{St}} = -|\varepsilon|^2 \sum_k |d_{kz}|^2 \left( \frac{1}{\omega_{kz} + \omega} + \frac{1}{\omega_{kz} - \omega} \right);$$

$$A = -|\varepsilon|^2 \sum_k d_{2k} d_{k1} \left( \frac{1}{\omega_{kz} + \omega} + \frac{1}{\omega_{kz} - \omega} \right).$$

При этом динамика электрона описывается системой уравнений, эквивалентной (18) с точностью до переобозначений  $A$  и  $\Delta$ . Повторив приведенные выше рассуждения или просто выполнив предельный переход, можно опять же показать, что частота Раби (22) будет максимальной в случае выбора такой частоты внешнего воздействия, при которой квазирезонансная область энергий  $E_{\text{res}} = E + \omega$  лежит вблизи нижней границы континуума.

## 6. Количественная оценка частоты Раби

Выполнив в выражении (20) стандартный переход от суммирования к интегрированию, получим

$$A \sim |\varepsilon|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d_{2k} d_{k1}}{E_k + |E_{\text{res}}|} dk. \quad (23)$$

Для оценок будем использовать закон дисперсии свободных электронов. Введем обозначение  $q = (2m^* |E_{\text{res}}|)^{1/2}$ , где  $m^*$  – эффективная масса электрона, тогда выражение (23) принимает вид

$$A \sim |\varepsilon|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} 2m^* \int \frac{d_{2k} d_{k1}}{k^2 + q^2} dk. \quad (24)$$

Основной вклад в интеграл в (24) вносят состояния с энергией, близкой к  $E_{\text{res}}$ , т.е. к границе непрерывного спектра. Соответствующие им волновые функции представляют собой плоские волны (если говорить строго – волны, деформированные вблизи квантовых ям), длины которых велики непосредственно на границе континуума и уменьшаются с ростом энергии. В соответствии с этим подынтегральная функция в выражении (24) осциллирует по двум причинам: во-первых, сложным образом (в зависимости от  $k$ ) изменяется модуль каждого из множителей  $d_{2k}$  и  $d_{k1}$  и, во-вторых, периодически изменяется разность фаз, что приближенно можно записать как  $d_{2k} d_{k1} = |d_{2k} d_{k1}| e^{ikL}$ , где  $L$  – характерное расстояние между квантовыми точками. Поскольку в рассматриваемую модель изначально заложено требование достаточной изолированности состояний  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  друг от друга, полагаем, что расстояние между квантовыми точками заметно превышает их размеры, что соответствует реальным системам. В связи с этим можно считать, что вторая из приведенных причин осцилляции является доминирующей.

Для грубой оценки  $A$ , задаваемой выражением (24), при интегрировании можно ограничиться той областью  $k$ , в пределах которой происходит первая осцилляция. Следовательно, ограничим область интегрирования сферой радиусом  $k_{\text{max}} = 1/L$  и будем считать, что в пределах этой сферы каждый из матричных элементов  $d_{2k}$  и  $d_{k1}$  постоянен и  $d_{2k} \sim d_{k1} \sim ea(a^3/V)^{1/2}$ , где  $a$  – характерный линейный размер квантовых точек,  $e$  – заряд электрона. Корневая зависимость возникает из-за того, что при умножении волновой функции  $\Psi_k$ , нормированной на объем  $V$ , на одну из функций  $\Psi_{1,2}$ , локализованных вблизи со-

ответствующей квантовой ямы, область «эффективного» интегрирования уменьшается до объема, равного  $\sim a^3$ . С учетом всех перечисленных допущений выражение (24) принимает вид

$$A \sim |\varepsilon|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} 2m^* \frac{e^2 a^5}{V} 4\pi \int_0^{k_{\text{max}}} \frac{k^2 dk}{k^2 + q^2}. \quad (25)$$

Из этого выражения видно, что под близостью энергии  $E_{\text{res}}$  к границе континуума логично подразумевать такую ситуацию, когда величина  $q^2$  порядка или даже много меньше  $k_{\text{max}}^2$ . В этом случае из выражения (25) с учетом постоянной Планка получаем  $A \sim |\varepsilon|^2 e^2 m^* a^5 / (\hbar^2 L)$ . Если положить для оценки  $a \sim 10$  нм,  $L \sim 100$  нм,  $m^* \sim 0.1m_e \sim 10^{-28}$  г (где  $m_e$  – масса электрона), что соответствует неблагоприятному случаю с точки зрения получения большой энергии перехода, то уже при не слишком больших амплитудах волн  $\varepsilon \sim 10^3$  В/см частота Раби становится равной  $\sim 10^{-5}$  эВ. Для сравнения отметим, что в работе [1] диапазон оптимальных значений  $A$  составляет  $\sim 10^{-5} - 10^{-4}$  эВ.

## 7. Выводы

Предсказанный в настоящей работе эффект нерезонансного двухфотонного переноса электрона может быть значимым также и при удержании ультрахолодных атомов в магнитооптических ловушках, где картина энергетических уровней та же, что и на рис. 1, б.

В работах [12–14] обсуждается перенос атомов из одной ловушки с энергетического уровня  $E_1$  в другую на энергетический уровень  $E_2$  за счет воздействия импульсного двухчастотного электромагнитного поля в условиях комбинационного резонанса (1). Однако до сих пор в моделях ультрахолодных атомов в магнитооптических ловушках не проводился корректный учет состояний непрерывного спектра. Формулы (20) и (21) справедливы и для указанного случая ультрахолодных атомов в ловушках, при этом учтены состояния непрерывного спектра. Предложенный механизм нерезонансного переноса, теперь уже атома, может использоваться и в магнитооптических ловушках для состояний с энергиями  $E_1 \approx E_2$ , поскольку в рамках простой модели будут справедливы основные формулы, приведенные в настоящей работе.

1. Openov L.A. *Phys. Rev. B*, **60**, 8798 (1999).
2. Цуканов А.В., Опенов Л.А. *ФТП*, **38**, 94 (2004).
3. Oh J.H., Ahn D., Hwang S.W. *Phys. Rev. A*, **62**, 052306 (2000).
4. Stoof T.H. Nazarov Yu.V. *Phys. Rev. B*, **53**, 1050 (1996).
5. Hazelzet B.L., Wegewijs M.R., Stoof T.H., Nazarov Yu.V. *Phys. Rev. B*, **63**, 165313 (2001).
6. Greentree A.D., Cole J.H., Hamilton A.R., Hollenberg L.C.L. *Phys. Rev. B*, **70**, 235317 (2004).
7. Башаров А.М., Дубовис С.А. *Оптика и спектроскопия*, **99** (4), 607 (2005).
8. Hohenester U., Troiani F., Molinari E., Panzarini G., Macchiavello C. *Appl. Phys. Lett.*, **77**, 1864 (2000).
9. Скалли М.О., Зубайри М.С. *Квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2003).
10. Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves* (Dordrecht: Kluwer Acad., 1999).
11. Башаров А.М. *Фотоника. Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике* (М.: Изд-во МИФИ, 1990).
12. Jaksch D., Bruder C., Cirac J.I., Gardiner C.W., Zoller P. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3108 (1998).
13. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **97**, 981 (2004).
14. Jaksch D., Zoller P. *Ann. Phys.*, **315**, 52 (2005).