

Динамика солитонов в модели нелинейного уравнения Шредингера с внешним гармоническим потенциалом.

I. Светлые солитоны

С.Эрнандес Тенорио, Э.Виллагран Варгас, В.Н.Серкин, М.Агуеро Гранадос, Т.Л.Беляева, Р.Пеña Морено, Л.Моралес Лара

Представлены результаты исследования динамики нелинейных уединенных волн в рамках математической модели нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с внешним гармоническим потенциалом. Рассмотренная модель позволяет с единых позиций проанализировать широкий круг различных нелинейных явлений, возникающих как в конденсате Бозе–Эйнштейна, находящемся в магнитной ловушке, профиль которой описывается квадратичной функцией координат, так и в нелинейной оптике, физике лазеров и биофизике. Показана полная идентичность точных решений для квантово-механической частицы в гармоническом потенциале и решений, полученных в рамках адиабатической теории возмущений для светлых солитонов в параболической ловушке. Этот факт не только еще раз доказывает частицеподобные свойства солитонов, но и говорит о возможности сохранения этих свойств в различных ловушках, для которых справедливо параболическое приближение вблизи минимумов потенциальной энергии. Найдены условия формирования устойчивых стационарных состояний противофазных солитонов в гармоническом потенциале. Исследована динамика взаимодействия солитонов в нестационарных потенциалах и показана возможность возникновения солитонного параметрического резонанса, при котором амплитуда осцилляций солитона в ловушке экспоненциально нарастает во времени. Показано, что найденные с помощью преобразования Миуры точные решения задачи открывают возможность контролируемого управления динамикой солитонов. Предсказаны новые эффекты, названные обратной и необратимой денатурацией солитонов в нестационарном гармоническом потенциале.

Ключевые слова: солитоны, нелинейные уравнения Шредингера и Гросса–Питаевского, бозе-эйнштейновский конденсат.

1. Модель нелинейного уравнения Шредингера с внешним гармоническим потенциалом в теории бозе-эйнштейновской конденсации и в теории оптических солитонов

Взаимопроникновение идей и методов, использующихся в различных областях науки и техники, в настоящее время становится одним из решающих факторов развития науки в целом. К наиболее ярким примерам подобного взаимообмена идеями и теоретическими методами анализа различных физических явлений относится задача о динамике уединенной нелинейной волны, описываемой математической моделью нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с внешним гармоническим потенциалом. Эта модель используется в самых различных разделах современной науки и, по-видимому, может сыграть такую же основополагающую роль, какую в свое время сыграла в становлении современной физики модель квантово-механического линейного гармонического осциллятора.

В настоящее время к числу наиболее важных приложений модели НУШ с гармоническим потенциалом от-

носятся исследования нелинейных явлений, возникающих при бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) атомов в парах щелочно-земельных металлов. Известно, что нелинейная динамика конденсата в магнитных ловушках адекватно описывается математической моделью, названной по имени ее создателя моделью среднего поля Гросса–Питаевского [1, 2]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + G|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad G = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}.$$

В уравнении для волновой функции конденсата Φ (где G – энергия парного взаимодействия частиц между собой, a – длина рассеяния, V_{ext} – энергия взаимодействия конденсата с внешним полем ловушки, остальные обозначения стандартные [1–3]) нелинейный член учитывает парные взаимодействия между частицами конденсата.

Условия применимости модели (1) и так называемого приближения среднего поля детально обсуждаются, например, в монографии [3] и в обзоре [4]. Благодаря тому, что в конденсатном состоянии находится макроскопически большое число частиц, волновая функция конденсата становится классической макроскопической величиной, аналогично тому, как становится классической величиной напряженность поля электромагнитных волн при больших числах заполнения фотонов в каждом состоянии.

S.Hernandez Tenorio, E.Villagran Vargas, V.N.Serkin, M. Agüero Granados, T.L.Belyaeva, R. Peña Moreno, L.Morales Lara. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 72001 A. P. 502, Mexico e-mail: vsarkin@yahoo.com

Хорошо известно, что при построении физически содержательной теории, не ограничивающейся только математическим описанием того или иного явления, самой сложной задачей является проблема перехода от *описания* явления к *объяснению* явления. Великолепными примерами отточенного мастерства разработки физически конструктивных идей, стремления автора дать сложным явлениям простые, физически содержательные (т. е. ясные) объяснения, использующие, в частности, хорошо известные понятия квантовой электроники, были и остаются работы профессора А.Н.Ораевского (см., напр., базу данных на сервере Американского института физики [5]).

Проведенный в работах Ораевского [6–11] анализ динамической аналогии между бозе-конденсатом фотонов, конденсатом атомов и конденсатом куперовских пар в сверхпроводнике показывает, что в состоянии конденсата отчетливо проявляется волновая природа материи, и ансамбль достаточно большого числа частиц ведет себя как классическое поле, имеющее амплитуду и фазу. При этом динамика конденсата может рассматриваться как существенно нелинейный процесс, полностью аналогичный формированию бозе-конденсата фотонов в лазере (см., напр., обзор [7] и цитируемую в нем литературу), а изучение динамики лазеров может служить опорной базой для более глубокого понимания и предвидения динамических процессов в бозе-конденсатах другого типа [6–11].

Метод аналогий, использованный Ораевским для постановки новых задач в теории БЭК, является мощным инструментом анализа различных физических явлений. Аналогии между БЭК, сверхтекучестью и сверхпроводимостью, бозе-конденсацией фотонов и лазерной генерацией исследовались в целом ряде работ, примером из многочисленного списка которых являются работы [12–20]. Следует выделить статью [19], в которой был дан обзор концепции когерентности и когерентных состояний поля и обсуждалась оптическая когерентность, квантово-механическая когерентность, статистика фотонов, самоиндуцированная прозрачность, сверхпроводимость и сверхтекучесть, сверхизлучение Дике. Теория вынужденного испускания и фазовых переходов создавалась Ораевским еще в работах [8, 9].

Подчеркнем, однако, что если задача локализации бозе-конденсата фотонов была решена еще в пионерских работах Басова и Прохорова с сотрудниками (см., напр., лекции [21, 22], пионерские работы [23–25] и приведенную в них литературу), то проблема локализации нейтрального атома является одной из сложнейших и по сей день. Впервые решение этой задачи было предложено Летоховым [26], показавшим, что атомы могут быть локализованы в узлах или пучностях стоячей световой волны, частота которой находится вдали от частот атомных переходов. В настоящее время метод лазерного манипулирования атомным конденсатом стал общепринятым.

В отсутствие внешнего потенциала уравнение (1) представляет собой хорошо изученное в теории самофокусировки НУШ. Поскольку одномерное НУШ принадлежит к классу точно интегрируемых уравнений [27] и для него имеется большое число точных решений [28], то оказалась привлекательной модель конденсата в так называемой сигароподобной ловушке, поперечные размеры которой много меньше продольного размера.

Именно в сигарообразных ловушках были впервые обнаружены нелинейные коллективные возбуждения в БЭК, получившие название светлых и темных солитонных волн материи, и именно в пионерских экспериментальных работах по генерации солитонов в БЭК [29–32] была отмечена существующая глубокая математическая аналогия между теорией солитонных волн материи и теорией оптических солитонов в волоконных световодах (см. также монографии [33–36] с обширными списками литературы).

Переход к одномерному безразмерному НУШ с гармоническим потенциалом

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + R|u|^2 u - \frac{1}{2} \Omega^2 \tau^2 u = 0 \quad (2)$$

подробно описан, например, в [37, 38]. Подчеркнем, что одномерная модель (2) развивалась практически параллельно и одновременно как в теории БЭК, так и в теории оптических солитонов. Например, эта модель рассматривалась в работах [39, 40] при создании концепции квазисолитонов в волоконно-оптической линии связи с периодическим изменением дисперсии групповых скоростей (интересующийся читатель может найти исчерпывающую литературу, посвященную этой области практических приложений солитонов, в книгах [33, 34, 41]). Эта модель возникает также при исследовании возможности генерации солитонов в запрещенной области дисперсии групповых скоростей. В [42, 43] была рассмотрена, в частности, ситуация, когда в качестве потенциала ловушки используется пара солитонов. В этом случае два управляющих солитонных импульса формируют близкую к параболической яму для лазерного импульса с другой длиной волны, находящейся, например, в запрещенной для генерации солитонов спектральной области. Причем захваченный в параболическую ловушку солитон не только существует в запрещенной области параметров, но и сохраняет свои уникальные свойства даже в фемтосекундном диапазоне длительностей [44].

Приведенные примеры использования математической модели НУШ с внешним гармоническим потенциалом в теории БЭК и задачах нелинейной волоконной оптики далеко не исчерпывают список различных приложений рассматриваемой модели. Так, новые возможности модель НУШ с гармоническим потенциалом открывает при моделировании нелинейных механизмов передачи энергии в биологических длинных полимерных молекулах. Изучение этих механизмов важно для понимания возникновения солитонных волн в ДНК (см., напр., пионерские работы Давыдова [45], статью Ораевского [46] и последний обзор в этой области [47]).

С точки зрения практических приложений одной из центральных задач теории является поиск новых возможностей контролируемого управления динамикой солитонов. Это и определило круг задач, рассмотренных нами в настоящей работе. Исследования динамики БЭК включают в себя анализ роли границ сигароподобной ловушки, продольный размер которой предполагается сравнимым с областью изменения параметра порядка БЭК. Нестационарная задача динамики формирования и взаимодействия солитонов в БЭК рассматривается как для светлых, так и для темных и серых солитонов. С точки зрения возможных приложений в высокоскоростных солитонных оптических линиях связи практический инте-

рес могут представлять обнаруженные нами условия полной компенсации сил между солитонами.

В настоящей работе исследуются новые возможности управления параметрами формирующихся солитонов в нестационарных потенциалах. В частности предсказана возможность солитонного параметрического резонанса, при котором амплитуда осцилляций солитона в ловушке экспоненциально нарастает во времени. Обнаруженный эффект солитонной денатурации может быть использован для построения простейшей модели и для объяснения физических механизмов денатурации ДНК (детальные результаты будут представлены ниже). Исследования динамики темных солитонов суммированы во второй части настоящей работы. Использование математического аппарата, развитого для приложений в высокоскоростных волоконно-оптических линиях связи [48–54], позволило нам открыть новый класс математических моделей НУШ, точно интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗР), решения которых также представлены во второй части данной работы [55].

2. Сравнительный анализ нестационарных процессов в модели линейного гармонического осциллятора и в модели НУШ с гармоническим потенциалом

Хорошо известно, что для модели линейного квантово-механического осциллятора

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi(x, t), \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1,$$

находящегося в состоянии с волновой функцией

$$\Psi_0(t=0, x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar\pi}(x-x_0)^2 + i\frac{p_0 x}{\hbar}\right] \quad (4)$$

(где ω – круговая частота, x – смещение частицы с массой m из положения равновесия), временные зависимости средних значений импульса и координаты определяются хорошо известными выражениями [56]

$$\overline{x(t)} = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t, \quad (5)$$

$$\overline{p(t)} = p_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t. \quad (6)$$

Покажем, что применение методов адиабатической теории возмущений для солитонов [57–63] позволяет получить аналитические выражения для основных параметров солитонов НУШ в параболическом потенциале, с математической точки зрения полностью эквивалентные выражениям (5), (6), и тем самым приближенно описать движение солитонов как движение материальных точек по законам ньютоновской механики.

Рассматривая внешний потенциал в НУШ (2) как малое возмущение

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = i\varepsilon(u), \quad (7)$$

решение уравнения (2) можно записать в виде солитона с динамически изменяющимися параметрами (амплитудой, положением центра массы, фазой и скоростью)

$$u(\xi, \tau) = \eta(\xi) \operatorname{sech}[\eta(\xi)(\tau - q(\xi))] \exp[i\varphi(\xi) - i\delta(\xi)\tau], \quad (8)$$

которые связаны простыми дифференциальными уравнениями

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2). \quad (9)$$

В рамках адиабатической теории возмущений для солитонов эти четыре параметра описываются следующей системой уравнений [57–61]:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) u^*(\tau) d\tau, \quad (10)$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = -\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \tanh[\eta(\tau - q)] u^*(\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta + \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) (\tau - q) u^*(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \left\{ \frac{1}{\eta} - (\tau - q) \tanh[\eta(\tau - q)] \right\} \times u^*(\tau) d\tau + \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2) + q \frac{d\delta}{d\xi}. \quad (13)$$

Для параболического потенциала взаимодействия из уравнений (10)–(13) получаем

$$\frac{d\delta}{d\xi} = \Omega^2 q, \quad \frac{dq}{d\xi} = -\delta, \quad (14)$$

что приводит к двум уравнениям гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} = -\Omega^2 q, \quad \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} = -\Omega^2 \delta, \quad (15)$$

решения которых имеют вид

$$q(\xi) = q_0 \cos(\Omega\xi) - \frac{\delta_0}{\Omega} \sin(\Omega\xi), \quad (16)$$

$$\delta(\xi) = q_0 \Omega \sin(\Omega\xi) - \delta_0 \cos(\Omega\xi), \quad (17)$$

где параметры с индексом «0» соответствуют начальным значениям скорости δ и положения центра масс солитона q .

Таким образом, основным результатом развитаемого подхода является вывод об абсолютной математической эквивалентности аналитических результатов, полученных как для нестационарного квантово-механического гармонического осциллятора, так и для солитонов в гармонической ловушке. Чтобы убедиться в этом, достаточно изменить знак начального импульса в формулах (5), (6) и (16), (17) и обратиться к данным численного эксперимента.

Подчеркнем, однако, что если результаты для линейной модели (3) являются точными (формулы (5), (6)), то для нелинейной модели (7) формулы (16), (17) справедливы только в рамках ограничений адиабатической теории возмущений для солитонов. Напомним, что так называемая адиабатичность возмущений, позволяющая использовать аппарат теории возмущений, означает, что изменение формы солитона остается малым на характерных временах, соответствующих периоду гармонического осциллятора, и на расстояниях, соответствующих длине дисперсионного распыления волнового пакета.

Сравнительный анализ динамики солитонов НУШ в параболической ловушке, описываемой моделью (2) при $R \neq 0$, и динамики линейного осциллятора (уравнение (2) при $R = 0$), проведенный нами численными методами, позволяет выявить следующие общие качественные закономерности.

Рассмотрим типичные результаты численных экспериментов, представленные на рис.1–5 для случаев как одиночных, так и взаимодействующих волновых пакетов. На рис.1–3 проводится сопоставление динамики линейного осциллятора, в начальный момент времени находящегося в состоянии с волновой функцией (4), центр тяжести которой первоначально смещен относительно положения равновесия, и динамики солитона НУШ в параболическом потенциале. Нестационарная задача для линейного осциллятора, имеющая точное аналитическое решение (5), (6), иллюстрирует возможности и устойчивость численного алгоритма (расчеты выполнены с двойной точностью), контурная карта (линии равного уровня) представлена в логарифмическом масштабе. Поскольку

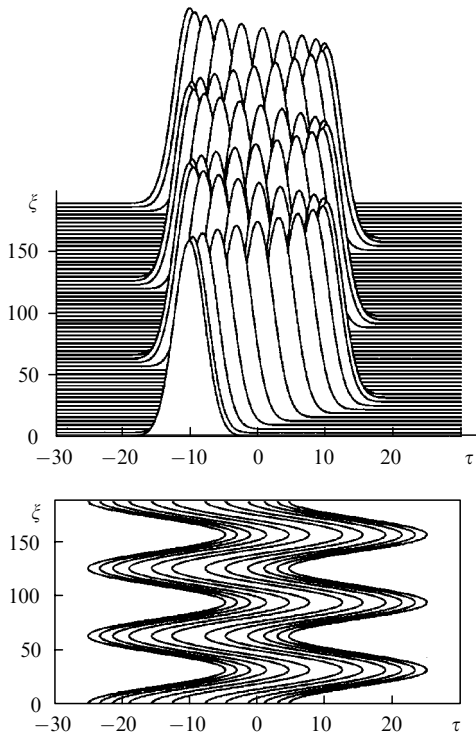


Рис.1. Пространственно-временная динамика основного состояния осциллятора, центр тяжести которого первоначально смещен относительно положения равновесия. Контурная карта (линии равного уровня) для нормированной волновой функции представлена в логарифмическом масштабе, начиная со значений 10^{-10} , с шагом 10^2 . Расчеты выполнены с двойной точностью для уравнения (2) при $\Omega = 0.1$ в отсутствие самовоздействия ($R = 0$).

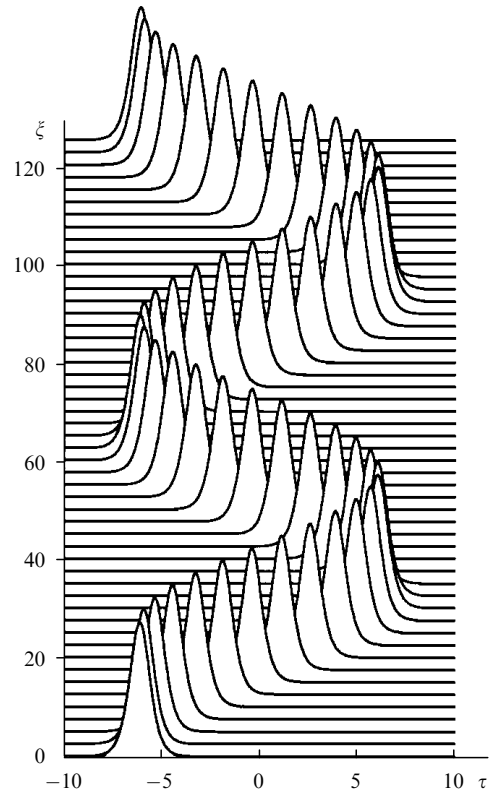


Рис.2. Нелинейная динамика солитона НУШ в гармоническом потенциале, рассчитанная в рамках модели (2) при $\Omega = 0.1$ и $R = 1.0$.

НУШ (2) при $R = 0$ трансформируется в обычное уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора, то волновая функция его основного состояния в безразмерном виде записывается как

$$u_0(\xi, \tau) = \left(\frac{\Omega}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Omega}{2}\tau^2 - i\frac{\Omega}{2}\xi\right).$$

Расчеты динамики солитона НУШ в гармоническом потенциале, представленные на рис.2, хотя и полностью согласуются с аналитическими оценками (16), (17), полученными по теории возмущений (7)–(13), тем не менее не позволяют нам сделать однозначный вывод о реальной динамике огибающей солитона. Действительно, если мы рассмотрим искажения формы солитона в более «глубоком» логарифмическом масштабе (рис.3), то увидим, как постепенно возникают искажения формы солитона,

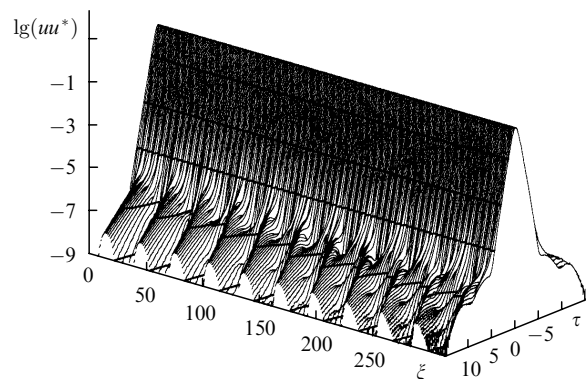


Рис.3. Динамика солитона, представленная в логарифмическом масштабе, начиная со значений $\lg(uu^*) = -9$ с шагом 2.

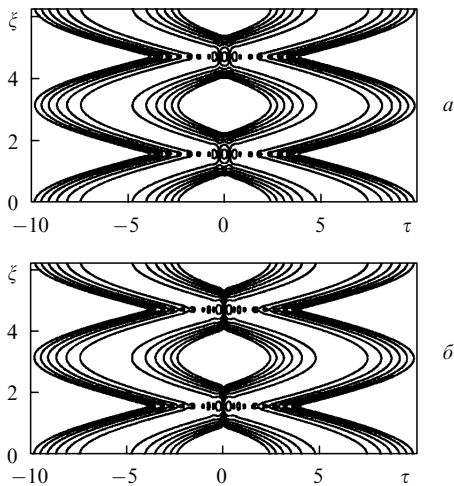


Рис.4. Контурные карты (в логарифмическом масштабе), иллюстрирующие динамику линейного гармонического осциллятора, в начальный момент времени находящегося в состояниях, соответствующих синфазным (а) и противофазным (б) волновым функциям. Расчеты выполнены при $\Omega = 1.0$ и $R = 0$ для уравнения (2). Контурные линии начинаются со значений $\lg(uu^*) = -6$ и проведены с шагом 1.

которые имеют тенденцию к накапливанию, тогда как центральная часть импульса существенно не изменяется.

Динамика линейного гармонического осциллятора, находящегося в начальный момент времени в состоянии с волновой функцией, представляющей собой линейную суперпозицию двух разнесенных в пространстве волновых функций

$$u_{1+2}(\xi = 0, \tau) = u_0(\tau - q_0) + u_0(\tau + q_0) \exp(i\varphi),$$

где параметр φ описывает их относительные фазы, представлена на рис.4. Из контурных карт линий равного уровня в логарифмическом масштабе отчетливо видно, что начальное состояние может рассматриваться как две практически неперекрывающиеся гауссианы, параметры каждой из которых соответствуют волновой функции основного состояния гармонического осциллятора. Качественная картина их взаимодействия, в силу оптико-квантово-механической аналогии подобная, например, взаимодействию двух гауссовых пучков в градиентном волноводе, определяется первоначальной разностью фаз. В случае синфазных начальных состояний ($\varphi = 0$) их взаимодействие в центре ловушки ($\xi = 0$) соответствует притяжению, а в случае противофазных состояний ($\varphi = \pi$) – отталкиванию, что отчетливо видно на контурной карте рис.4. Так, на рис.4,а линии равного уровня пересекаются в центре ловушки, а на рис.4,б они в центре не пересекаются, образуя щель.

Как хорошо известно, динамика солитонов НУШ тоже определяется фазовыми соотношениями между импульсами. Притяжение синфазных и отталкивание противофазных солитонов НУШ описываются аналитическими формулами, полученными, в частности, методами адиабатической теории возмущений (все приоритетные работы по взаимодействиям солитонов в модели НУШ цитируются, например, в обзоре [63]).

Рассмотрим особенности динамики взаимодействия синфазных и противофазных солитонов НУШ в гармоническом потенциале (рис.5) в сравнении с динамикой гармонического осциллятора, представленной на рис.4.

Начальное состояние выбирается так же – в виде двух практически не перекрывающихся функций, конкретная аналитическая форма которых теперь задается не в виде двух гауссиан, а в виде двух функций гиперболического секанса, каждая из которых является точным решением НУШ в отсутствие гармонического потенциала. В логарифмическом масштабе величин можно видеть, как возникают искажения формы солитонов при их взаимодействии, причем противофазные солитоны никогда не перекрываются (они отталкиваются). Как следует из численных экспериментов, проведенных в широком диапазоне изменения параметров задачи, взаимодействие противофазных солитонов резко отличается от динамики синфазных солитонов в сторону большей стабильности (рис.5).

Используя язык аналогий, уместно отметить, что многосолитонные решения уравнения Гросса–Питаевского (1) не являются многобозонными волновыми функциями. Для гармонического осциллятора (3) Ψ представляет собой одночастичную волновую функцию, а в уравнении Гросса–Питаевского функция Φ – это коллективная переменная, параметр порядка, отражающий эволюцию пространственной плотности конденсата, ее пространственный аргумент, а не координаты бозонов в конденсате.

Математическая постановка задачи оказывается полностью аналогичной (7)–(13), однако теперь в качестве начального условия выбирается солитонная пара

$$u_{1,2}(\xi, \tau) = \eta_{1,2}(\xi) \operatorname{sech}[\eta_{1,2}(\xi)(\tau - q_{1,2}(\xi))] \times \exp[i\varphi_{1,2}(\xi) - i\delta_{1,2}(\xi)\tau]. \tag{18}$$

Подставив (18) в (7), мы получим следующую модель возмущенного НУШ для двух солитонов:

$$i \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + |u_1|^2 u_1 = \frac{1}{2} \Omega^2 \tau^2 u_1 - 2|u_1|^2 u_2 - u_1^2 u_2^*, \tag{19}$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + |u_2|^2 u_2 = \frac{1}{2} \Omega^2 \tau^2 u_2 - 2|u_2|^2 u_1 - u_2^2 u_1^*. \tag{20}$$

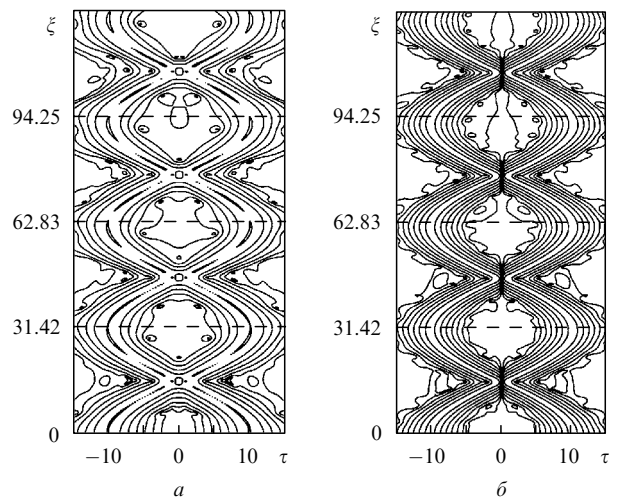


Рис.5. Контурные карты (в логарифмическом масштабе), иллюстрирующие динамику взаимодействия синфазных (а) и противофазных (б) солитонов НУШ в гармоническом потенциале. Расчеты выполнены при $\Omega = 0.1$ и $R = 1.0$ для уравнения (2). Контурные линии начинаются со значений $\lg(uu^*) = -6$ и проведены с шагом 1.

Три члена в правых частях (19), (20) описывают удержание (захват) солитонов параболической ловушкой и нелинейное взаимодействие между перекрывающимися солитонами. Отметим, что в зависимости от знака параметра Ω^2 уравнения (19), (20) описывают как удерживающие (яма), так и выталкивающие (барьер) потенциалы. Подчеркнем также, что в отсутствие внешнего потенциала задача взаимодействия солитонов НУШ в рамках адиабатической теории возмущений была решена еще в классических работах [57–61], а рассматриваемая нами модель фактически является обобщением ранее полученных результатов на случай внешнего гармонического потенциала. Проведя выкладки, аналогичные (7)–(17), окончательно получим следующее уравнение, описывающее динамику взаимодействия пары шредингеровских солитонов НУШ в гармоническом потенциале:

$$\frac{d^2q}{d\xi^2} = -\Omega^2 q - 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (21)$$

где $q = (q_1 - q_2)/2$ – расстояние и $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$ – фаза между солитонами.

К числу наиболее интересных результатов, вытекающих из анализа нашей математической модели, относятся следующие:

1. Период осцилляций пары солитонов в параболической ловушке определяется совместным действием двух сил. Первая сила линейно возрастает с расстоянием и доминирует на больших расстояниях между солитонами. Вторая сила является нелинейной короткодействующей (экспоненциально убывающей с расстоянием) и зависит от фаз взаимодействующих солитонов. Она начинает играть роль только при достаточно большом перекрытии волновых функций, когда солитоны близко подходят друг к другу.

2. Фазовая зависимость сил и знак потенциала (притягивающий или отталкивающий внешний потенциал) позволяют эффективно управлять динамикой шредингеровских солитонов. При точной компенсации этих двух сил, например для противофазных солитонов в удерживающем потенциале или для синфазных солитонов в выталкивающем потенциале, возможно формирование стационарного состояния. Причем исследование устойчивости стационарного режима обычным методом линеаризации уравнений относительно стационарных значений оказывается достаточно простым и показывает, что устойчивое состояние формируют только противофазные солитоны в удерживающем потенциале, а связанные состояния солитонов в отталкивающем потенциале всегда неустойчивы.

Подтвердим сделанные выводы конкретными примерами расчетов. Рассмотрим пару синфазных солитонов, расстояние между центрами масс которых достаточно велико, и будем в численных экспериментах изменять только один параметр задачи – расстояние q , уменьшая его между первоначально покоящимися солитонами НУШ. Как показано на рис.6,а, при уменьшении q все большую роль начинают играть короткодействующие силы, которые кардинальным образом изменяют динамику взаимодействия синфазных солитонов в параболической ловушке при условии

$$\Omega^2 \leq \frac{4}{q} \eta^3 \exp(-2\eta q). \quad (22)$$

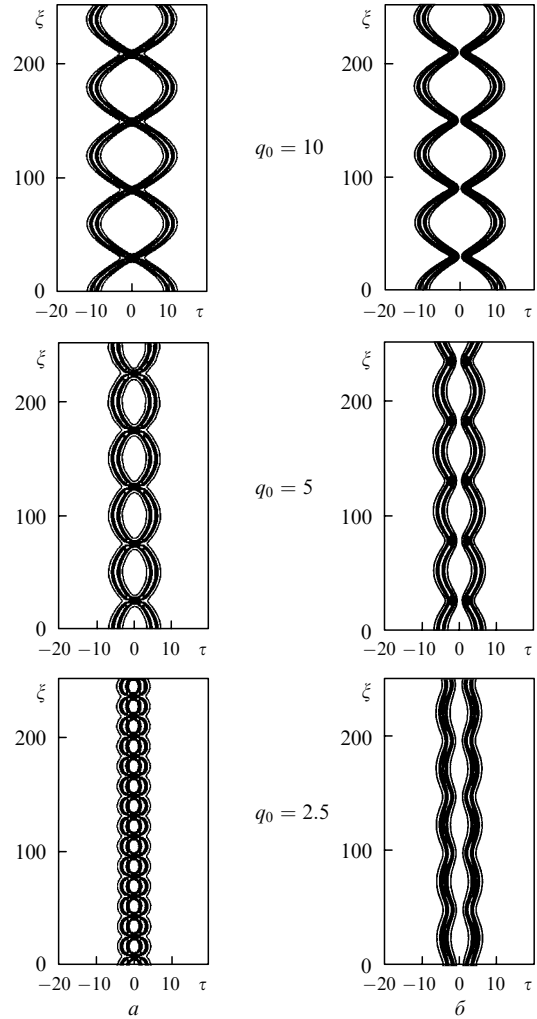


Рис.6. Изменение периода осцилляций синфазных (а) и противофазных (б) солитонов НУШ в гармоническом потенциале в зависимости от начального расстояния между ними. Динамика взаимодействия синфазных солитонов НУШ рассчитана в рамках модели (2) при $\Omega = 0.05$ и $R = 1.0$. Последовательно (сверху вниз) представлены сценарии взаимодействия солитонов при уменьшении начального расстояния между ними вдвое ($q_0 = 10, 5, 2.5$).

Так как в каноническом случае (без потенциала) период колебаний солитонной пары с параметрами $q = q_0$ и $\eta = 1$ определяется соотношением

$$T_{\text{sol}} = \frac{\pi}{2} \exp(q_0), \quad (23)$$

то неравенство (22) связывает основные параметры системы

$$\frac{T_{\text{sol}}}{T_0} \geq 2\sqrt{q_0}, \quad (24)$$

где T_0 – период колебаний гармонического осциллятора. Динамика противофазных солитонов (которые отталкиваются в случае отсутствия потенциала ловушки) показана на рис.6,б.

Силы взаимодействия между двумя солитонами в точности компенсируются, если

$$\Omega_0^2 = -\frac{4}{q} \eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi. \quad (25)$$

Отсюда, в частности, следует условие формирования устойчивого стационарного состояния для противофазных солитонов (рис.7) с параметрами $q = q_0$ и $\eta = 1$,

$$\frac{T_{sol}}{T_0} = 2\sqrt{q_0}, \tag{26}$$

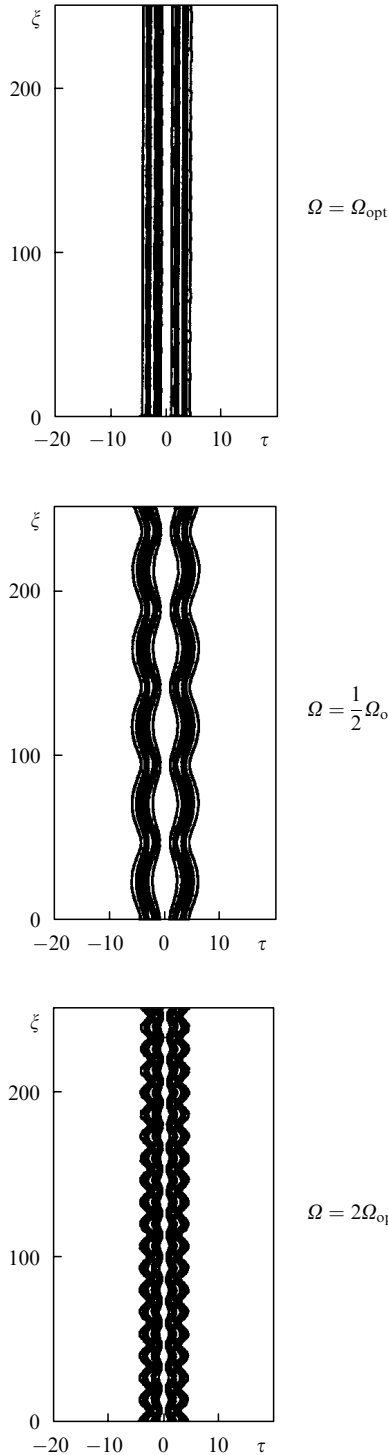


Рис.7. Формирование стационарного состояния не взаимодействующей пары противофазных солитонов в гармоническом потенциале-ловушке ($\Omega = \Omega_{opt}$). Начальное расстояние между солитонами $q = 3.5$, остальные параметры в программе задавались из условия компенсации сил – по формуле (27). При нарушении условий оптимальности $\Omega = \Omega_{opt}$ формируются осциллирующие связанные состояния, показанные для $\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{opt}$ и $\Omega = 2\Omega_{opt}$.

и определяется критическая частота гармонического потенциала

$$\Omega_0^2 = \frac{4}{q} \eta^3 \exp(-2\eta q). \tag{27}$$

3. Нестационарный потенциал. Параметрический резонанс для солитонов в гармоническом потенциале

Предполагаемая адиабатичность динамики солитона НУШ в параболической ловушке позволяет рассмотреть более сложные процессы, возникающие в нестационарных гармонических потенциалах, когда параметр Ω оказывается функцией времени. Используя (7)–(17), нетрудно получить следующее уравнение для координаты центра тяжести солитона:

$$\frac{d^2q}{d\xi^2} + \Omega^2(\xi)q = 0. \tag{28}$$

Хорошо известно, что уравнение (28) возникает в теории незамкнутых колебательных систем, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем параметров системы [64]. Простым примером такого рода системы является математический маятник, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении. В том случае, когда функция Ω является периодической, в системе, описываемой уравнением (28), может возникнуть так называемый параметрический резонанс. Это значит, что состояние покоя колебательной системы в положении равновесия становится неустойчивым – достаточно сколь угодно слабого отклонения от этого состояния, чтобы появившееся смещение стало быстро увеличиваться со временем. Условия возникновения параметрического резонанса, когда функция

$$\Omega^2(\xi) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma \xi) \tag{29}$$

мало отличается от постоянной величины ω_0^2 , были детально исследованы, например, в [64]. Было показано, что параметрический резонанс возникает наиболее интенсивно, если частота возмущения близка к удвоенной частоте: $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$.

Решение уравнения движения Матье

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + \omega_0^2[1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)\xi]q = 0 \tag{30}$$

позволяет найти условия возникновения параметрического резонанса в интервале частот $-\frac{1}{2}h\omega_0 < \varepsilon < \frac{1}{2}h\omega_0$ с параметром экспоненциального усиления колебаний $s^2 = \frac{1}{4}[(h\omega_0/2)^2 - \varepsilon^2]$ (мы следуем здесь работе [64]). Известно, что параметрический резонанс имеет место также при частотах $2\omega_0/n$, где n – целое число. Однако ширины резонансных областей неустойчивости с увеличением n быстро уменьшается. Так же уменьшаются и значения показателя усиления колебаний s [64].

Таким образом, уравнение (28) и математическая аналогия с явлением параметрического резонанса позволяют нам сделать вывод о возможности возбуждения параметрических резонансов и в модели нелинейного НУШ с нестационарным гармоническим потенциалом (29). Для

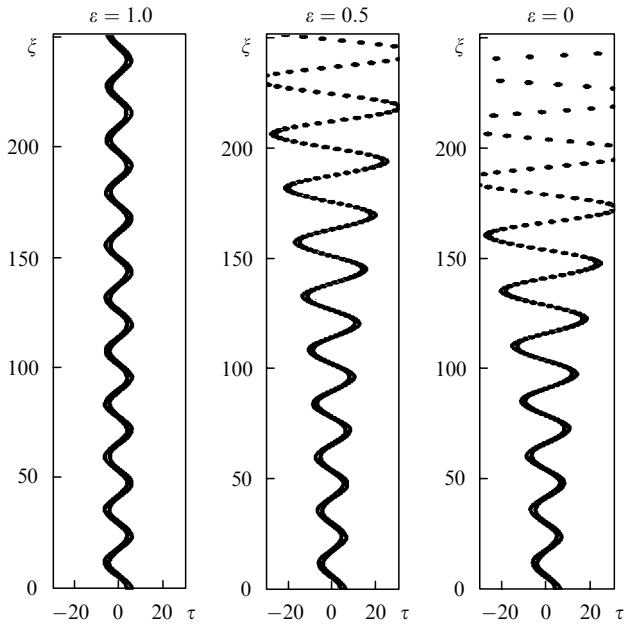


Рис.8. Параметрическая неустойчивость солитона в меняющемся во времени гармоническом потенциале (30). Последовательно показана динамика солитона при параметре расстройки от резонанса: $\varepsilon = 1.0, 0.5$ и 0 .

проверки этого утверждения были выполнены численные расчеты для широкой области изменения параметров в рамках модели НУШ с потенциалом вида (29). Типичные результаты расчетов приведены на рис.8.

4. Нестационарный потенциал. Денатурация связанных состояний солитонов

Хорошо известно, что уравнение (28) с временной зависимостью потенциала вида

$$\Omega^2(\xi) = a \exp(\lambda \xi) \tag{31}$$

имеет набор точных аналитических решений, выражающихся через функции Бесселя первого ($J_\nu(z)$) и второго ($Y_\nu(z)$) рода

$$q(\xi) = C_1 J_0 \left[\frac{2\sqrt{a}}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda \xi}{2}\right) \right] + C_2 Y_0 \left[\frac{2\sqrt{a}}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda \xi}{2}\right) \right].$$

Функция вида (31) позволяет имитировать включение и выключение гармонического потенциала ловушки в зависимости от знака параметра λ . Типичные результаты численных расчетов динамики солитона в этом случае представлены на рис.9. Как и следовало ожидать, при возрастании во времени эффективной частоты осциллятора происходит сокращение периода осцилляций солитона НУШ в гармонической ловушке, и наоборот, при выключении потенциала амплитуда и период осцилляций солитона увеличиваются.

Покажем, что так называемое преобразование Миуры, известное в теории солитонов (см., напр., [28]),

$$\mu(\xi) = \frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi} - v^2(\xi) = \Omega^2(\xi), \tag{32}$$

позволяет получить простые аналитические решения для уравнения (28) в виде

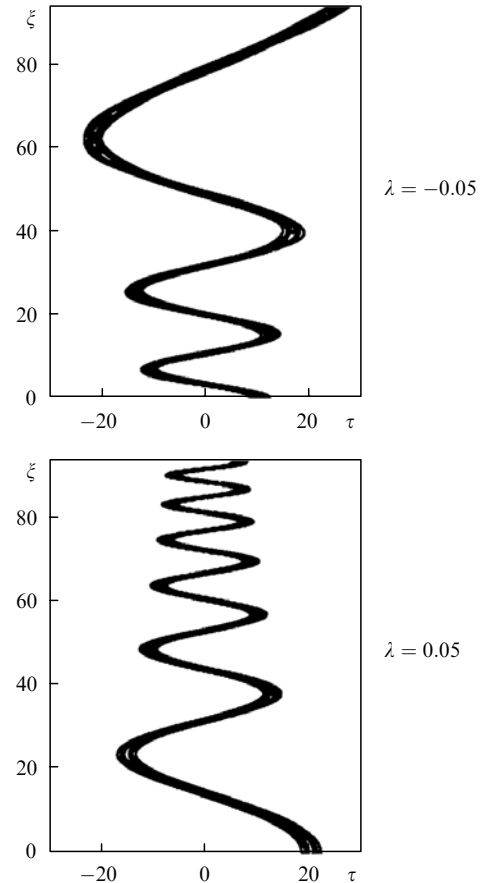


Рис.9. Динамика солитона при адиабатическом «выключении» и «включении» гармонического потенциала по экспоненциальному закону $\Omega^2(\xi) = a \exp(\lambda \xi)$ при $\Omega = 0.1, R = 1.0, \lambda = -0.05$ и 0.05 .

$$q(\xi) = \exp \left[- \int_0^\xi v(z) dz \right], \tag{33}$$

где произвольная управляющая функция $v(\xi)$ должна удовлетворять условиям интегрируемости и дифференцируемости. Действительно, нетрудно убедиться, что подстановка (33) в (28) дает тождество при условии (32).

Точные решения (32), (33) позволяют предложить способ контролируемого управления динамикой бризеров – связанных состояний солитонов НУШ в изменяющемся во времени гармоническом потенциале-ловушке (32). Подчеркнем, что параметры системы должны удовлетворять условию, обратному неравенству (22).

Адиабатическое изменение во времени потенциала ловушки позволяет реализовать эффект обратимой и необратимой денатурации солитонов, при котором солитоны НУШ контролируемым образом изменяют период своих осцилляций в нестационарном потенциале вплоть до полного развала связанного состояния (рис.10). В расчетах были использованы следующие функции $\Omega^2(\xi)$: $\exp(-\beta \xi), 1 - \exp[-\beta(\xi - \xi_0)^n], \tanh^2(\xi - \xi_0)$. Они позволяли моделировать включение и выключение гармонической ловушки, а также ограниченное во времени воздействие на удерживающий потенциал. Возможное применение эффекта солитонной денатурации для построения простейшей нелинейной модели денатурации ДНК будет рассмотрено в следующей работе. Подобно тому, как процесс денатурации разрушает вторичную и третичную структуры белка с сохранением первичной струк-

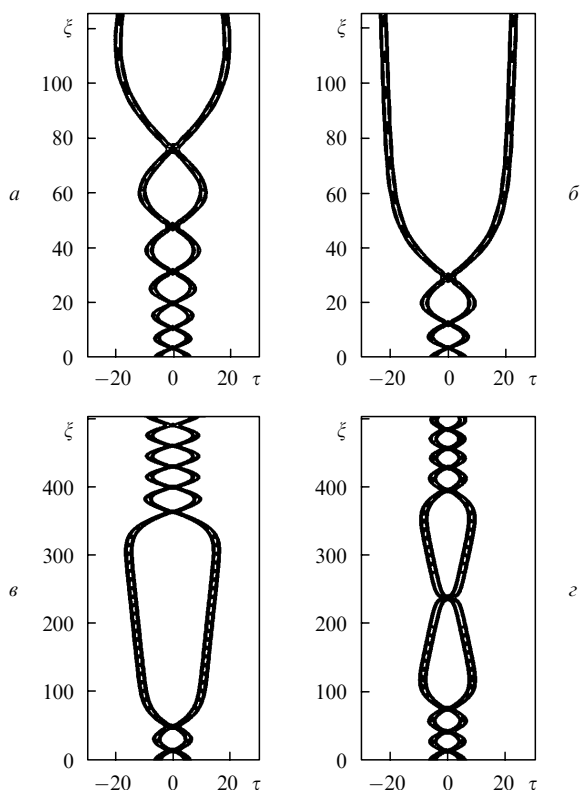


Рис.10. Эффект солитонной денатурации: a, \bar{b} – динамика распада связанного состояния двух синфазных солитонов НУШ в гармоническом потенциале, рассчитанная при $\Omega = 0.5, R = 1.0, q = 5, \beta = -0.05$ (a) и -0.1 (\bar{b}); v, z – динамика обратимой денатурации солитонной пары в случае временного выключения гармонического потенциала при $\Omega = 0.1$ и $R = 1.0$ (v и z).

туры, исследованный нами процесс полностью сохраняет первичные свойства модели – свойства солитонов.

В заключение следует подчеркнуть, что в практически интересных случаях различные потенциалы вблизи минимумов потенциальной энергии, как правило, могут быть разложены в ряд, соответствующий гармоническому приближению, и, таким образом, динамика солитонов вблизи минимума потенциальной энергии будет подчиняться рассмотренным нами закономерностям.

Авторы пользуются предоставленной им возможностью выразить искреннюю благодарность Рецензенту, чьи конструктивные замечания в немалой степени способствовали улучшению текста статьи.

1. Gross E.P. *Nuevo Cimento*, **20**, 454 (1961).
2. Питаевский Л.П. *ЖЭТФ*, **40**, 646 (1961).
3. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Статистическая физика* (М.: Наука, 1978, ч.2).
4. Питаевский Л.П. *УФН*, **168**, 641 (1998).
5. <http://scitation.aip.org/vsearch/publications/Oraevskii>.
6. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **24**, 1127 (1997).
7. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **31**, 1038 (2001).
8. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **11**, 1763 (1984).
9. Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **89**, 608 (1985).
10. Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **103**, 981 (1993).
11. Козловский А.В., Ораевский А.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **75**, 273 (2002).
12. Graham R., Haken H. *Zs. Phys.*, **213**, 420 (1968).
13. Graham R., Haken H. *Zs. Phys.*, **237**, 31 (1970).
14. DeGiorgio V., Scully M.O. *Phys. Rev. A*, **2**, 1170 (1970).
15. Graham R. *Progr. Optics*, **12**, 233 (1974).
16. Scott J.F. *Opt. Commun.*, **15**, 343 (1975).

17. Ахманов А.С., Пахалов В.Б., Чиркин А.С. *Письма в ЖЭТФ*, **23**, 391 (1976).
18. Langer J.S. *Phys. Rev.*, **167**, 183 (1968).
19. Scully M.O., Jacobs S.F. *Appl. Opt.*, **9**, 2414 (1970).
20. Елесин В.Ф., Левченко Е.Б. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **22**, 130 (1979).
21. Basov N.G. *Semiconductor lasers*, in *Nobel Lectures Physics, 1963–1970* (Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1970, p. 89).
22. Prokhorov A.M. *Quantum Electronics*, in *Nobel Lectures Physics, 1963–1970* (Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1970, p. 110).
23. Shawlow A.L., Townes C.H. *Phys. Rev.*, **112**, 1940 (1958).
24. Басов Н.Г., Прохоров А.М. *ЖЭТФ*, **101**, 431 (1954).
25. Басов Н.Г., Крохин О.Н., Попов Ю.М. *УФН*, **72**, 161 (1960).
26. Летохов В.С. *Письма в ЖЭТФ*, **7**, 348 (1968).
27. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *ЖЭТФ*, **61**, 118 (1971).
28. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980).
29. Khaykovich L. et al. *Science*, **296**, 1290 (2002).
30. Strecker K.E., Partridge G.B., Truscott A.G., Hulet R.G. *Nature (Ldn)*, **417**, 150 (2002).
31. Burger S., Bongs K., Dettmer S., Ertmer W., Sengstock K. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5198 (1999).
32. Denschlag J. et al. *Science*, **287**, 97 (2000).
33. Hasegawa A., Kodama Y. *Solitons in Optical Communications* (Oxford: Oxford University Press, 1995).
34. Hasegawa A., Matsumoto M. *Optical Solitons in Fibers* (Berlin: Springer, 2003).
35. Agrawal G.P. *Nonlinear Fiber Optics* (New York: Academic Press, 2001).
36. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons-From Fibers to Photonic Crystals* (New York: Academic Press, 2003).
37. Perez-Garcia V.M., Michinel H., Herrero H. *Phys. Rev. A*, **57**, 3837 (1998).
38. Brazynyi V.A., Konotop V.V. *Phys. Rev. A*, **68**, 043613 (2003).
39. Kumar S., Hasegawa A. *Opt. Lett.*, **22**, 372 (1997).
40. Hasegawa A. *Physica D*, **123**, 267 (1998).
41. Hasegawa A. (Ed.) *Massive WDM and TDM Soliton Transmission Systems* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000).
42. Hook A., Anderson D., Lisak M., Serkin V.N., Afanasjev V.V. *Electron. Lett.*, **28**, 1797 (1992).
43. Hook A., Anderson D., Lisak M., Serkin V.N., Afanasjev V.V. *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, 2313 (1993).
44. Hook A., Serkin V.N. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 148 (1994).
45. Давыдов А.С. *Биология и квантовая механика* (Киев: Наукова Думка; 1979); Давыдов А.С. *УФН*, **138**, 603 (1982).
46. Ораевский А.Н., Судаков М.Ю. *ЖЭТФ*, **92**, 1366 (1987).
47. Peyrard M. *Nonlinearity*, **17**, R1 (2004).
48. Serkin V.N., Hasegawa A. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4502 (2000).
49. Серкин В.Н., Хасегава А. *Письма в ЖЭТФ*, **72**, 125 (2000).
50. Serkin V.N., Hasegawa A. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **8**, 418 (2002).
51. Serkin V.N., Hasegawa A., Belyaeva T.L. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 199401 (2004).
52. Серкин В.Н., Беляева Т.Л. *Квантовая электроника*, **31**, 1007 (2001); **31**, 1016 (2001).
53. Серкин В.Н., Беляева Т.Л. *Письма в ЖЭТФ*, **74**, 649 (2001).
54. Серкин В.Н., Мацумото М., Беляева Т.Л. *Письма в ЖЭТФ*, **73**, 64 (2001).
55. Эрнандес Тенорио С., Виллагран Варгас Э., Серкин В.Н. и др. *Квантовая электроника* (в печати).
56. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963).
57. Карпман В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **25**, 296 (1977).
58. Карпман В.И., Маслов Е.М. *ЖЭТФ*, **73**, 537 (1977).
59. Karpman V.I., Maslov E.M. *Phys. Lett. A*, **61**, 355 (1977).
60. Karpman V.I. *Physica Scripta*, **20**, 462 (1979).
61. Karpman V.I., Solov'ev V.V. *Physica D*, **3**, 487 (1981).
62. Gordon J.P. *Opt. Lett.*, **8**, 596 (1983).
63. Desem C., Chu P.L., in *Optical Solitons-Theory and Experiment*. J.R.Taylor (Ed.) (Ldn: Cambridge Univ. Press, 1992, p. 107).
64. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая Физика. Т. 1. Механика* (М.: Наука, 1973).