PACS 05.30.Jp; 03.75.Kk

Кинематика бозонов в двумерной потенциальной яме

Л.А.Ривлин

Анализ кинематики бозонов (фотонов, атомов) в двумерных потенциальных каналах с медленно изменяющимися вдоль продольной оси канала поперечными собственными значениями обнаруживает такие явления, как бозе-конденсация без понижения температуры, стратификация атомного потока по фазовым состояниям, а также процессы, феноменологически воспроизводящие явления в нелинейных средах (ударноподобные волны). Эти явления могут составить основу для новых экспериментальных методов.

Ключевые слова: *бозоны, двумерная потенциальная яма, бозе-конденсация.*

1. Введение

Кинематика бозонов в двумерной потенциальной яме в отсутствие внешних источников энергии и диссипации, т. е. при неизменности полной энергии частицы, определяется энергетическим обменом между ее дискретными состояниями в заданном поперечном потенциале и континуальным продольным движением. Если при этом поперечный потенциал является медленно меняющейся функцией продольной координаты z, то в результате такого обмена возникают различные явления, такие как бозе-эйнштейновская конденсация при неизменной температуре, стратификация атомного потока по фазовым состояниям и др., а также эффекты, феноменологически подобные эффектам, возникающим лишь в нелинейных средах (хотя рассматриваемая потенциальная яма не обладает никакой нелинейностью), например ударноподобные волны. Эти явления интересны не только сами по себе, но и могут, по-видимому, предоставить новые экспериментальные возможности, в частности для решения задач, связанных с манипулированием охлажденными потоками нейтральных атомов.

2. Электромагнитная волна в волноводе

Простейшим, но поучительным примером кинематики бозонов может служить распространение электромагнитных волн в идеальном металлическом волноводе (двумерной потенциальной яме бесконечной глубины для фотонов) с изменяющимися вдоль продольной координаты z размерами поперечного сечения. Если эти изменения происходят достаточно плавно и с сохранением подобия контура сечения, так что можно полагать неизменным тип волноводной моды, то ее критическая частота ω_{nm} оказывается функцией продольной координаты z. Так, при уменьшении размеров сечения с ростом z

$$\frac{\mathrm{d}\omega_{nm}}{\mathrm{d}z} > 0. \qquad (1)$$

Соответственно константа распространения

$$k(z) = \pm\frac{\omega}{c}\left[1-\left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (2)$$

и групповая скорость волны

$$\upsilon_{\rm gr}(z) = c\left[1-\left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (3)$$

также убывают по мере распространения волны в волноводе так, что

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon_{\rm gr}}{\mathrm{d}z} < 0 \qquad (4)$$

вплоть до

$$\upsilon_{\rm gr} \to 0 \quad \text{при} \quad \omega_{nm} \to \omega \qquad (5)$$

(здесь ω – частота волны, n и m – целочисленные индексы, c – скорость света).

Разумеется, принятое описание распространения волны в волноводе с изменяющейся критической частотой (1) является лишь приближением к точному решению задачи. Точное решение для волновода с медленно изменяющимся сечением должно состоять из основной постоянной и небольшой переменной частей и может быть найдено, если представить интеграл соответствующего волнового уравнения как сумму известного решения для волновода с неизменным сечением и малой добавки, определяемой указанной малой переменной частью. Подобный подход пригоден и для других, неэлектромагнитных волн, в частности рассмотренных ниже волн вещества с заменой волнового уравнения для векторов поля на уравнение Шредингера для ψ-функций.

3. Ударноподобная электромагнитная волна

Из (1) – (5) видно, что при распространении в положительном направлении оси z возникают предпосылки для

Л.А.Ривлин. Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78;
e-mail: rivlin140322@mccinet.ru

Поступила в редакцию 9 августа 2005 г.

образования волны с возрастающей на фронте интенсивностью в результате убывания групповой скорости потока электромагнитной энергии по сравнению со скоростью его последующих фрагментов и уменьшения поперечного сечения потока при неизменной его полной величине $Q = \mathrm{const}$. Это феноменологически воспроизводит известную картину ударной волны: электромагнитная энергия W, содержащаяся на единице длины волновода, возрастает по мере распространения волны вдоль оси z как

$$W = \frac{q}{v_{\mathrm{gr}}} = \frac{Q}{c}\left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{6}$$

а объемная плотность энергии w возрастает еще в большей степени из-за уменьшения площади S поперечного сечения сужающегося волновода:

$$w = \frac{W}{S}, \tag{7}$$

и соответственно растут напряженности полей: $|\mathscr{E}| \sim w^{1/2}$ и $|\mathscr{H}| \sim w^{1/2}$.

В идеализированном случае это должно привести к бесконечному нарастанию объемной плотности энергии вплоть до $w \to \infty$ в сечении волновода с критической координатой $z = z_{nm}$, в которой $\omega_{nm}(z_{nm}) \to \omega$ вне зависимости от величины начальной интенсивности, и отражению волны (изменению знака константы распространения (2)) от плоскости сечения при $z = z_{nm}$. В многомодовом волноводе в этом случае происходит сепарация критических координат z_{nm} для различных мод.

Если перейти к представлению о фотонах в волноводе [1], то в соответствии с дисперсионным соотношением $(\hbar\omega)^2 = (\hbar\omega_{nm})^2 + (c\hbar k)^2$ эти явления отвечают картине превращения полной энергии фотона $\hbar\omega = \mathrm{const}$ в его так называемую эквивалентную наблюдаемую массу покоя $M_{nm} = \hbar\omega_{nm}/c^2$ при полной «остановке» фотона и обращении в нуль его кинетической энергии ($c\hbar k = 0$).

Разумеется, по ряду причин описанные выше явления (ударноподобные волны) протекают без возникновения расходимостей. Так, немонохроматичность волны с шириной линии $\Delta\omega$ приводит к размытию критической координаты z_{nm} до конечного интервала

$$\Delta z_{nm} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega_{nm}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}\Delta\omega, \tag{8}$$

величина которого тем больше, чем более плавно происходит сужение волновода.

Бесконечному росту w ($w \to \infty$) препятствует затухание волны из-за потерь в стенках волновода. Обычный способ описания этого процесса с использованием коэффициента затухания χ [2], имеющего размерность обратной длины, создает из-за прекращения перемещения волны при $\omega_{nm}(z_{nm}) \to \omega$ ложное впечатление бесконечного возрастания потерь при приближении к критическому режиму. Поэтому правильнее характеризовать потери вблизи $\omega_{nm}(z_{nm}) \to \omega$ временем затухания $\tau_\chi = (\chi v_{\mathrm{gr}})^{-1}$, которое для волн с поляризациями TM и TE определяется соответственно выражениями

$$(\tau_\chi)^{-1}_{\mathrm{TM}} = \frac{R_{\mathrm{s}}}{2\mu_0}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2 \oint \left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_z}{\mathrm{d}n}\right)^2 \mathrm{d}l \Big/ \int \mathscr{E}_z^2 \mathrm{d}s \tag{9}$$

и

$$(\tau_\chi)^{-1}_{\mathrm{TE}} = \frac{R_{\mathrm{s}}}{2\mu}\oint \left[\left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2 \mathscr{H}_z^2 + \left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2 \frac{v_{\mathrm{gr}}}{c} \times \left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}_z}{\mathrm{d}l}\right)^2 \mathrm{d}l\right] \Big/ \int \mathscr{H}_z^2 \mathrm{d}s. \tag{10}$$

Здесь R_{s} – сопротивление единицы поверхности металлических стенок волновода с учетом скин-эффекта; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума; $\mathscr{E}_z$ и $\mathscr{H}_z$ – продольные компоненты электрического и магнитного векторов волны; интегралы в числителях вычисляются по контуру, а в знаменателях – по поверхности поперечного сечения волновода, а производные в подынтегральных функциях берутся по нормали $\boldsymbol{n}$ и касательной $\boldsymbol{l}$ к поверхности стенок.

Видно, что времена затухания волн TM и TE остаются конечными при $\omega_{nm}(z_{nm})/\omega \to 1$ и $v_{\mathrm{gr}} \to 0$, что свидетельствует об отсутствии неограниченного возрастания потерь. И наконец, достижению условия $w \to \infty$ препятствует нарушение электрической прочности волновода, являющееся, по-видимому, основным ограничением процесса.

Приведем простой пример волны TE_{10} в прямоугольном волноводе со сторонами сечения a и b (критическая частота $\omega_{10} = \pi c/a$): если a убывает с ростом продольной координаты z по линейному закону $a(z) = (\pi c/\omega)[1 + \beta(z_{nm} - z)]$, то в сечении $z = z_{nm}$ время затухания $\tau_{10} = (\mu_0 b/R_{\mathrm{s}})[1 + 2(b/a)]^{-1}$, а продольное размытие положения критического сечения $\Delta z_{nm} = \Delta\omega/\beta\omega$ (где $\Delta\omega$ – ширина линии излучения). Если $\Delta\omega/\omega = 10^{-5}$ и $\beta = (100\lambda)^{-1}$, то $\Delta z_{nm} = 10^{-3}\lambda$ (где λ – длина волны).

4. Волны вещества в потенциальном канале

Другим и, возможно, более интересным примером являются волны вещества в протяженных каналах с поперечным потенциалом $U(x, y)$, заполненных продольно перемещающимся разреженным потоком глубоко охлажденных атомов. Такой атомный ансамбль описывается решениями в виде бегущей волны

$$\Psi_{nm}(x, y, z, t) = \psi_{nm}(x, y)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{p_{nm}}{\hbar}z - \frac{E}{\hbar}t\right)\right] \tag{11}$$

с поперечными собственными функциями $\psi_{nm}(x, y)$ уравнения Шредингера

$$\nabla_{xy}\psi(x, y) + \frac{2M}{\hbar^2}\left[E - \frac{p^2}{2M} - U(x, y)\right]\psi(x, y) = 0, \tag{12}$$

где $E = \mathrm{const}$ – полная энергия атома с массой M; $p_{mn}/\hbar$ – продольная компонента волнового вектора, причем

$$p_{nm}^2 = 2M(E - E_{nm}); \tag{13}$$

E_{nm} – собственное значение уравнения (12).

Экспериментальная реализация таких волноводоподобных каналов (ловушек) достаточно широко используется при лазерном глубоком охлаждении нейтральных атомов [3] с типичной параболической зависимостью потенциала от поперечных координат x и y:

$$U(x,y) = \alpha(x^2 + y^2). \tag{14}$$

Если потенциал U остается неизменным ($\alpha = \text{const}$) вдоль координаты z, то решения (12), как и для гармонического осциллятора, выражаются через полиномы Эрмита $H_n(qx)$ и $H_m(qy)$ [4], так что

$$\psi_{nm}(x,y) = q(2^{m+n-1}\pi n! m!)^{-1/2} H_n(qx) H_m(qy) \times \exp\left(-q^2\frac{x^2+y^2}{2}\right), \tag{15}$$

где

$$q^2 = \frac{(2M\alpha)^{1/2}}{\hbar} \tag{16}$$

при собственных значениях энергии

$$E_{nm} = \hbar\left(\frac{2\alpha}{M}\right)^{1/2}(n+m+1). \tag{17}$$

5. Ударноподобная волна вещества

Если коэффициент α в (14) перестает быть постоянным, но достаточно медленно увеличивается с ростом продольной координаты z, то решение вида (11) с неизменными целочисленными индексами n и m можно (как и в предыдущей электромагнитной задаче) приближенно полагать справедливым и для случая медленно изменяющегося параболического потенциала, но с постепенно возрастающим собственным значением энергии $E_{nm}(z)$ (17). При этом (см. (13)) столь же медленно происходит убывание продольной компоненты волнового вектора:

$$p_{nm} = \pm[2M(E - E_{nm})]^{1/2} = \pm\left\{2M\left[E - \hbar\left(\frac{2\alpha}{M}\right)^{1/2}(n+m+1)\right]\right\}^{1/2}, \tag{18}$$

т. е. возникает торможение продольного перемещения атомов вплоть до их полной остановки ($p_{nm} = 0$) в точке $z = z_{nm}$, когда $\alpha(z) = \alpha_{nm}$ и

$$E_{nm}(z_{nm}) = \hbar\left(\frac{2\alpha_{nm}}{M}\right)^{1/2}(n+m+1) \to E. \tag{19}$$

В силу непрерывности атомного потока с неизменной абсолютной величиной $Q_{\text{a}} = \text{const}$ по мере торможения продольного движения и уменьшения скорости атомов

$$\upsilon = \frac{p_{nm}}{M} \tag{20}$$

растет их концентрация $N \sim |\Psi\Psi^*|$:

$$N = \frac{Q_{\text{a}}}{\upsilon S}, \tag{21}$$

где $S = S(z)$ – эффективная площадь сечения потока, уменьшающаяся с ростом коэффициента $\alpha(z)$.

Таким образом, в идеализированном случае невзаимодействующих атомов концентрация газа неограниченно возрастала бы по мере приближения к критическому сечению с координатой $z \to z_{nm}$, воспроизводя феноменологию ударной волны, чего, разумеется, не происходит на самом деле. Очевидным пределом роста концентрации является переход газа в конденсированную фазу.

6. Бозе-конденсация, стратификация волны вещества и другие явления вблизи критического сечения

Однако еще до приближения потока атомов к критическому сечению и до перехода их в конденсированную фазу наблюдается существенное повышение концентрации охлажденного газа (21), а при движении потока атомов в отрицательном направлении оси z, т. е. при удалении от критического сечения, происходит продольное ускорение атомов за счет уменьшения их потенциальной энергии E_{nm}.

При определенных условиях, а именно, если при неизменной температуре T газа атомов-бозонов приближение их к $z = z_{nm}$ и возникающее при этом возрастание концентрации N приводят к повышению температуры вырождения

$$T_0 = 3.3\,\frac{\hbar^2 N^{2/3}}{(2J+1)^{2/3} k_{\text{B}} M} \tag{22}$$

(где J – угловой момент атома, k_{B} – постоянная Больцмана) до $T_0 > T$, то еще до образования обычной конденсированной фазы может произойти выпадение газа в бозе-конденсат [5] с возникновением стратификации вдоль координаты z в следующей последовательности: газ – бозе-конденсат – обычная конденсированная фаза.

Кроме явлений, связанных с фазовыми переходами, существуют и другие факторы, нарушающие идеализированную картину. В частности, немонокинетичность атомного ансамбля, оцениваемая его энергетической дисперсией ΔE, приводит к размытию координаты z_{nm} до интервала

$$\Delta z_{nm} = \alpha_{nm}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}\frac{\Delta E}{E}. \tag{23}$$

Результаты, приведенные в разд.5 и 6, получены при допущении, что решения для волн в каналах с достаточно медленно изменяющимися вдоль координаты z поперечными параметрами отличаются от решений для каналов с постоянными параметрами лишь тем, что в первом случае столь же медленно изменяются соответствующие собственные значения поперечной задачи. Как и в электромагнитной задаче, точные решения можно отыскать, если принять решения для каналов с постоянными поперечными параметрами в качестве первого приближения, которое дополняется поправками, вносимыми малыми переменными добавками к постоянным поперечным параметрам (например, заменой постоянного потенциала $U(x,y)$ на $U_0(x,y)(1+\beta z)$, где $U_0 = \text{const}$ и β – малый параметр с размерностью обратной длины).

7. Заключение

В итоге видно, что даже при принятом приближенном описании хода кинематической трансформации электромагнитных волн и волн вещества (глубоко охлажденных атомных потоков) в потенциальных каналах в общих чертах воспроизводятся одинаковые картины. Подобные же явления могут, по-видимому, наблюдаться и в волновых структурах другой природы, в частности в потоках ультрахолодных нейтронов, обладающих де-бройлевской длиной волны, близкой по порядку величины к длине волны света. Рассмотренные эффекты могут тормозить продольное движение волн вплоть до полной остановки и создавать их экстремально высокие плотности; при обратном направлении движения собственная энергия поперечного квантового состояния (в электромагнитном случае – энергия, эквивалентная наблюдаемой массе покоя фотона) способна превращаться в кинетическую энергию движения ускоряемой волны. Исследованные явления могут найти различные экспериментальные приложения, в том числе в технике манипулирования глубоко охлажденными нейтральными атомами.

Работа выполнена при частичной поддержке МНТЦ (грант № 2651р).

1. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **33**, 777 (2003).
2. Рамо С., Уиннери Дж. *Поля и волны в современной радиотехнике* (М.: ГИТТЛ, 1948).
3. Metcalf H.J., van der Straten P. *Laser Cooling and Trapping* (New York: Springer, 1999).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая физика* (М.: Физматгиз, 1951).