

Перестраиваемый преобразователь Фурье дробного порядка

А.А.Малютин

Описана схема дробного двумерного преобразователя Фурье, перестройка порядков которого осуществляется с помощью оптических квадруполей. Показано, что для рассматриваемой оптической схемы порядку преобразования $a \in [0, 1]$ в одной из взаимно ортогональных плоскостей соответствует преобразование порядка $(2 - a)$ в другой плоскости, т.е. инверсия и обратное фурье-преобразование порядка a .

Ключевые слова: дробное фурье-преобразование, перестройка порядка фурье-преобразования, оптический квадруполь.

1. Введение

Фурье-преобразование (ФП) представляет собой одну из основных математических операций, используемых во многих областях физики, техники и радиоэлектроники. Применение ФП в оптике позволяет с единой точки зрения рассматривать вопросы дифракции, принципы формирования и обработки изображений, а также распознавания образов. Введение понятия дробного фурье-преобразования (ДФП) порядка $a = 2\psi/\pi$, представляемого в интегральном виде как

$$\mathcal{F}^a[f(x)] = \frac{\exp(i\psi/2)}{(i \sin \psi)^{1/2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp \left[i\pi \frac{(x^2 + \xi^2) \cos \psi - 2\xi x}{\sin \psi} \right] d\xi,$$

и предложение схем его реализации оптическими методами [1, 2] позволило показать, что практически любая оптическая схема, состоящая из произвольного набора линз, представляет собой ту или иную последовательность ДФП [3, 4], а классическая схема ФП является лишь частным случаем ДФП с порядком дробности $a = 1$.

За последнее десятилетие возможности ДФП использовались в теории лазерных резонаторов [5, 6], для анализа распространения световых пучков [5, 7, 8], в голографии [9], при обработке оптических [10, 11] и акустических [12] сигналов. Для анализа лазерных сигналов представляется перспективным перенесение метода ДФП из пространственно-угловой области в область время – частота [13].

Для ряда практических задач, таких как восстановление сигналов [14] и оптическая криптография [15–17], существенным является применение преобразователя Фурье варьируемой дробности. К настоящему времени предложено несколько таких схем [18–22]. Одна из них [22] ба-

зируется на использовании специфической градиентной микролинзы и, по видимому, может иметь лишь ограниченную область применения. В других [20, 21] для перестройки порядка ДФП предлагается изменять расстояние между входной и выходной плоскостями устройства; кроме того они не обеспечивают непрерывной вариации порядка преобразования [20]. Схемы [18, 19], основанные на использовании линз с переменным фокусным расстоянием, полезно проанализировать более подробно, поскольку в них, как и в схеме, предлагаемой в настоящей работе, используется элемент с изменяемой оптической силой.

2. Перестройка преобразователя Фурье дробного порядка с помощью линз переменного фокуса

Простейшая схема перестраиваемого преобразователя Фурье дробного порядка (ПФДП) [18] приведена на рис.1. Здесь между входной и выходной опорными плоскостями (ОП1, ОП2), находящимися на расстоянии d друг от друга, установлена линза Л1 с переменным фокусным расстоянием f (способ изменения f обсуждается в [18]). Будем считать, что линза Л1 находится в центре отрезка длиной d , т.е. исключим из рассмотрения случай ДФП с масштабированием [23]. Распространение излучения из ОП1 в ОП2 описывает $ABCD$ -матрица, которая может быть представлена через оптические параметры схемы либо через основные параметры ПФДП:

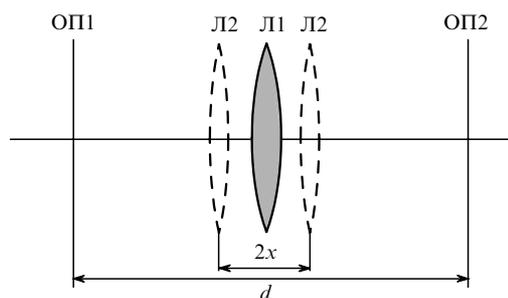


Рис.1. Оптическая схема ПФДП типа 1 с одиночной линзой Л1 или двухкомпонентной зум-линзой Л2; ОП1, ОП2 – опорные входная и выходная плоскости.

А.А.Малютин. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: amal@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 1 февраля 2005 г., после доработки – 29 ноября 2005 г.

$$T_{\text{FrFT}} = \begin{pmatrix} 1 - d/2f & d - d^2/4f \\ -1/f & 1 - d/2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & f^* \sin \psi \\ -\sin \psi / f^* & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что накопленная фаза Гуй (НФГ) [24] ψ собственного гауссова пучка* (волновые фронты и размеры которого совпадают в ОП1, ОП2) и его рэлеевская длина f^* таковы:

$$\psi = \arccos \left(1 - \frac{d}{2f} \right) = \frac{\pi a}{2}, \quad (2)$$

$$f^* = \frac{\pi w^2}{\lambda} = \left[d \left(f - \frac{d}{4} \right) \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем, что матрицы (1) описывают ПФДП типа 1 (с геометрией промежутков – линза – промежутков) [2] только при $f > d/4$. Изменение f (при постоянном d) дает перестроенную кривую $\psi(d/f^*)$, приведенную на рис.2 (отмечена буквой E). Кривая построена от значения $f = d/2$ при увеличении фокусного расстояния линзы в каждой последующей точке на 25%. Согласно (2) для изменения НФГ от $\psi = 90^\circ$ ($f = d/2$, $a = 1$) до $\psi = 10^\circ$ ($a \approx 0.11$) необходимо увеличить фокусное расстояние линзы Л1 в 66 раз.

Метод перестройки ПФДП с помощью зум-линзы, описанный в [19], предполагает замену линзы Л1 двумя компонентами (рис.1), оптическая сила которых $p = 4\alpha/d$ где $\alpha \leq 1$. При расстоянии между компонентами, равном $2x$, и их симметричном положении относительно центра отрезка d элементы матрицы (1) преобразуются к следующему виду:

$$A = D = 1 - pd + \frac{p^2 x(d - 2x)}{2},$$

$$B = d - \frac{p(d^2 - 4x^2)}{2} + \frac{p^2 x(d - 2x)^2}{2}, \quad (4)$$

$$C = -2p(1 - px).$$

Если $\alpha = 1$, то, варьируя расстояние между компонентами от нуля до d , получим симметричную (относительно значения $2x = d/2$) перестроенную кривую (рис.2) с

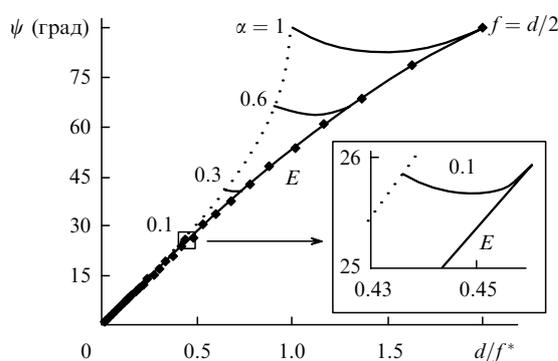


Рис.2. Перестроенные кривые ПФДП (рис.1) с одиночной линзой переменного фокусного расстояния (кривая E) и зум-линзами разной оптической силы (указаны значения коэффициента α). Пунктирная линия – перестроенная кривая для оптической схемы рис.3.

*Величина НФГ на выходе оптической системы, описываемой матрицей $ABCD$, для произвольного гауссова пучка с радиусом на входе в систему w и кривизной волнового фронта ρ определяется соотношением $\tan \psi' = B\lambda / (A + B\rho)\pi w^2$.

минимальным значением $\psi \approx 82.82^\circ$ при $d/f^* \approx 1.5$. С увеличением оптической силы компонентов (уменьшением коэффициента α) диапазон перестройки НФГ уменьшается от $\Delta\psi \approx 7.2^\circ$ при $\alpha = 1$ до $\Delta\psi \approx 0.16^\circ$ при $\alpha = 0.1$. Таким образом, использование зум-линзы обеспечивает относительно небольшой диапазон изменения НФГ и связанного с ним порядка ДФП ($\Delta a = \Delta\psi/90^\circ$). Заметим, что в крайних точках кривых НФГ имеет одно и то же значение, и оптические схемы соответствуют ПФДП типа 1 при $2x = 0$ и типа 2 при $2x = d$.

3. Перестройка ПФДП с помощью оптических квадрупольей

Рассмотрим теперь оптическую схему на рис.3, представляющую собой ПФДП, установленный между двумя перестраиваемыми оптическими квадрупольями (парой расположенных друг за другом цилиндрических линз с одинаковой, но противоположной по знаку оптической силой) ОК1, ОК2 [25, 26], ориентированными одинаково**, но различающимися взаимным расположением в них цилиндрических линз. Действие схемы описывает произведение $ABCD$ -матриц трех элементов: ОК1, ПФДП (матрица (1)) и ОК2. Для обеих квадрупольей имеем [26]

$$T_{\text{Oq1,2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp P_{1,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $P_{1,2} = \cos 2\varphi_{1,2}/F_0$ – модули оптической силы ОК; $\mp F_0$ – фокусное расстояние используемых цилиндрических линз; $\varphi_{1,2}$ – углы их поворота; знаки минус и плюс в (5) и далее соответствуют xz - и yz -плоскостям, проходящим через оптическую ось системы. Для матрицы дробного фурье-преобразователя, составленного из сферических линз, как показано на рис.3***, получим

$$T_{\text{FrFT}} = \begin{pmatrix} 1 - d/f & d \\ -(2 - d/f)/f & 1 - d/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & f^* \sin \psi \\ -\sin \psi / f^* & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $f^* = f[d/(2f - d)]^{1/2}$. Для всей оптической системы, представленной на рис.3, перемножение матриц вида (5) и (6) дает

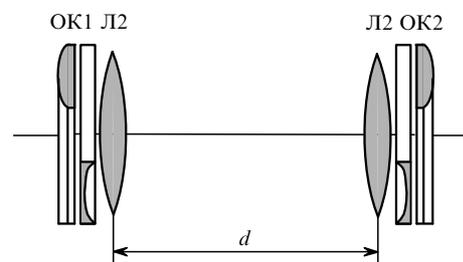


Рис.3. Схема ПФДП, перестраиваемого с помощью оптических квадрупольей ОК1 и ОК2.

**В одной и той же плоскости, проходящей через оптическую ось системы (например, xz), оптическая сила обеих квадрупольей имеет одинаковый знак.

***Согласно обозначениям работы [2] мы используем здесь геометрию ПФДП типа 2 (линза – промежуток – линза), которая при прочих равных условиях обеспечивает меньшую оптическую длину, чем ПФДП типа 1 (промежуток – линза – промежуток, см. рис.1).

$$T_{xz,yz} = T_{oq2} T_{FrFT} T_{oq1} = \begin{pmatrix} C \mp P_1 f^* S & S f^* \\ -S/f^* \mp C(P_1 + P_2) + P_1 P_2 f^* S & C \mp P_2 f^* S \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $C = \cos \psi$; $S = \sin \psi$. Матрица (7) описывает ДФП как в xz -, так и yz -плоскости (с масштабированием или без него), если

$$0 \leq (C \mp P_1 f^* S)(C \mp P_2 f^* S) \leq 1. \quad (8)$$

Анализ (8) значительно упростится, если положить $\varphi_1 = \varphi_2$, т.е. считать оптические квадрупольные линзы на входе и выходе полностью идентичными: $P_1 = P_2 = P = \cos 2\varphi/F_0$. В этом случае соотношение (8) можно свести к следующему виду:

$$0 \leq C \mp \cos 2\varphi \frac{f^* S}{F_0} \leq 1. \quad (9)$$

Первое следствие из (9) тривиально: учитывая (6), необходимо выполнить условие $|1 - d/f| < 1$, при котором система сферических линз с промежутком между ними, описываемая матрицей (6), являлась бы ПФДП; отсюда следует неравенство $0 < d < 2f$. Другое следствие касается ограничений на соотношения параметров оптических элементов схемы, представленной на рис.3:

$$F_0 \geq \frac{fd}{2f - d}. \quad (10)$$

Здесь мы полагаем, что используется весь диапазон изменений угла поворота цилиндрической линзы ($\varphi = 0 - 45^\circ$). Таким образом, если условие (10) для этой схемы выполнено, то (7) можно переписать в виде

$$T_{xz,yz} = T_{oq2} T_{FrFT} T_{oq1} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & F^* \sin \Psi \\ -\sin \Psi/F^* & \cos \Psi \end{pmatrix}_{xz,yz}. \quad (11)$$

Результаты расчета НФГ ($\Psi_{xz,yz}$) и радиуса собственного пучка (нормированного на $w_f = (\lambda f/\pi)^{1/2}$) перестраиваемого ПФДП для двух наборов параметров f, d, F_0 , удовлетворяющих условию (10), представлены на рис.4.

Прежде всего отметим, что для обоих наборов параметров элементов схемы перестраиваемого ПФДП в точке $\varphi = 0$ имеется особенность. При $\varphi = 0$ для первого случая ($f = 100$ см, $d = 120$ см и $F_0 = 150$ см) в плоскости xz , а для второго ($f = d = F_0 = 100$ см) в обеих плоскостях размер собственного пучка равен бесконечности, а матрица (7) становится эквивалентной $ABCD$ -матрице отрезка длиной d . Таким образом, для пучка ограниченного размера в точке $\varphi = 0$ при любом наборе параметров схема рис.3 не осуществляет двумерного ДФП. Во втором случае различие состоит лишь в том, что в плоскости xz имеется дополнительная инверсия ($A = D = -1$).

При $d \neq f$ порядки дробности преобразований Фурье, выполняемых в xz - и yz -плоскостях, не равны друг другу, так что при каждом фиксированном значении φ масштабы картины поля по осям x и y на выходе ПФДП различны. Это демонстрирует рис.5, где приведено исходное распределение интенсивности (рис.5,а), которое формально можно считать ФП нулевого порядка, и распределения, соответствующие $\varphi = 20^\circ$ и $\varphi \approx 37.8^\circ$ (рис.5,б,в).

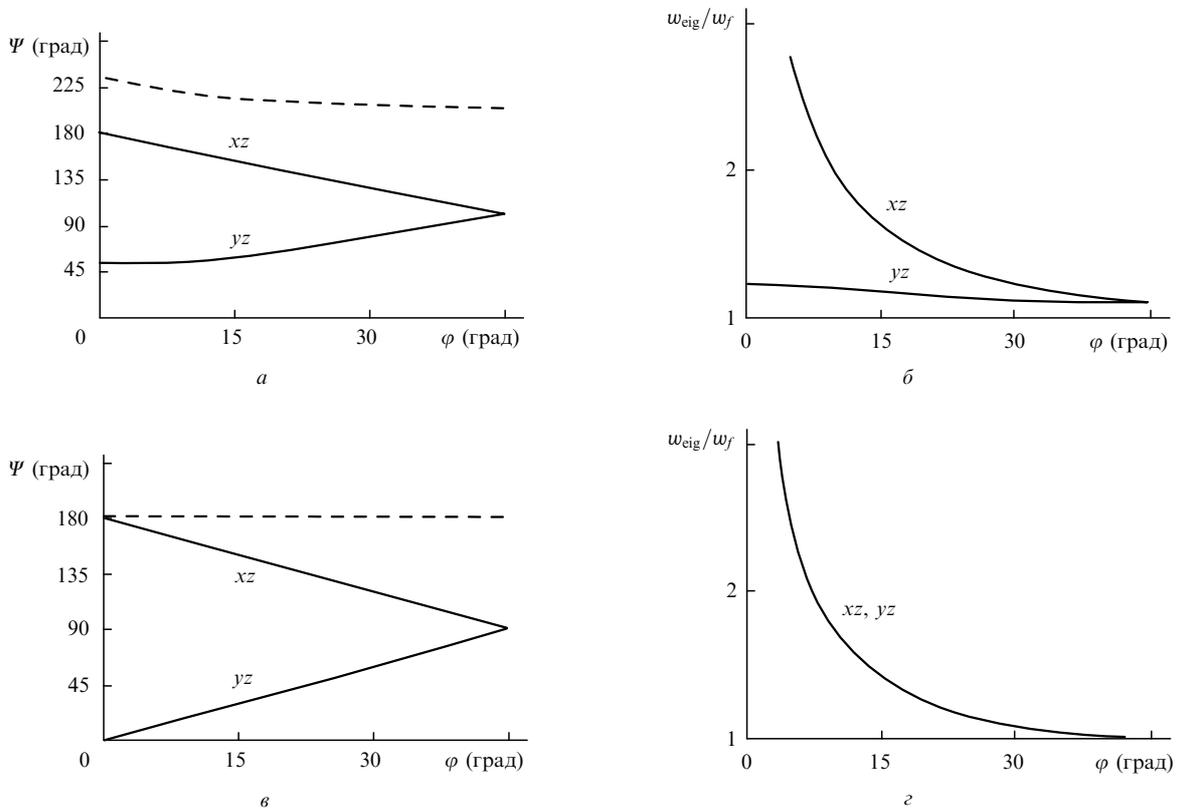


Рис.4. Зависимости накопленной фазы Гун (а,в) и нормированного значения радиуса собственного гауссова пучка (б,г) от угла поворота цилиндрических линз в ОК1 и ОК2 для оптической схемы ПФДП (рис.3) с параметрами $f = 100$ см, $d = 120$ см, $F_0 = 150$ см (а,б) и $f = d = F_0 = 100$ см (в,г). Штриховые линии соответствуют зависимостям суммы фаз $\psi_{xz} + \psi_{yz}$ от угла φ .

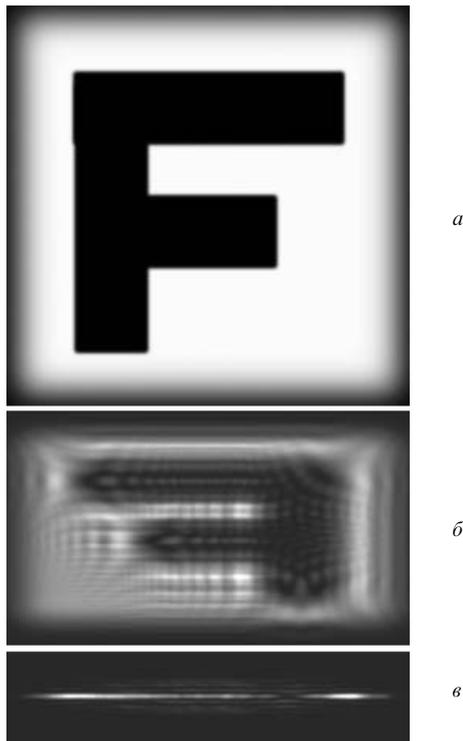


Рис.5. Распределения интенсивности излучения на входе (а) и выходе (б,е) перестраиваемого ПФДП с параметрами $f = 100$ см, $d = 120$ см, $F_0 = 150$ см при $\varphi = 0$, $a_{xz} = a_{yz} = 0$, размер рисунка по горизонтали $L = 15$ мм (а), при $\varphi = 20^\circ$, $a_{xz} = 1.6$, $a_{yz} = 0.73$, $L = 12.8$ мм (б) и при $\varphi = 37.76^\circ$, $a_{xz} = 1.26$, $a_{yz} = 1$, $L = 7.2$ мм (е).

Причем в последнем случае в плоскости xz имеем ДФП порядка $a_{xz} = 1.26$, а в yz – обыкновенное ФП (порядок $a_{yz} = 1$).

Выбрав $f = d = F_0 = 100$ см, при всех значениях φ (за исключением оговоренной точки $\varphi = 0$) имеем схему перестраиваемого двумерного ПФДП, $ABCD$ -матрица которого

$$T_{xz,yz} = \begin{pmatrix} \mp \cos 2\varphi & f \\ -\sin^2 2\varphi/f & \mp \cos 2\varphi \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При этом размеры собственного пучка в обеих плоскостях (xz и yz) оказываются одинаковыми (рис.4,з):

$$w_{\text{eig}} = \left(\frac{\lambda f}{\pi \sin 2\varphi} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

И так как $\psi_{yz} = 2\varphi$, $\psi_{xz} = \pi - 2\varphi$ (т.е. операцию, выполняемую в плоскости xz , можно рассматривать как инверсию плюс обратное ФП), то порядки ДФП соотносятся как $a_{xz} + a_{yz} = 2$. Относящаяся к плоскости yz перестроенная кривая $\psi(d/F^*)$ показана на рис.2 штриховой линией. Она проходит через точки, отвечающие методу перестройки ПФДП с помощью зум-линзы, при положениях компонентов, соответствующих $2x = d$.

Отметим, что при $\varphi = 22.5^\circ$ разность НФГ в случае $f = d = F_0$ в плоскостях xz и yz равна 90° , и для гауссова пучка, имеющего плоский волновой фронт, радиус $w = (2\lambda f/\pi)^{1/2}$ и оси, повернутые относительно осей x , y на 45° , оптическая схема на рис.3 является конвертером лазерных мод Эрмита – Гаусса в моды Лагерра – Гаусса.

Результат сравнения действия перестраиваемого ПФДП ($f = d = F_0 = 100$ см) и обычного преобразователя на основе линз (рис.1, длина f^* при каждом значении φ выби-

ралась равной соответствующему значению F^*) представлены на рис.6. Как следует из рисунка, преобразования изображения объекта на входе, выполняемые в обоих случаях, идентичны, за исключением инверсии изображения, осуществляемой в перестраиваемом ПФДП. В результате операция инверсии и дополнительный набег фа-

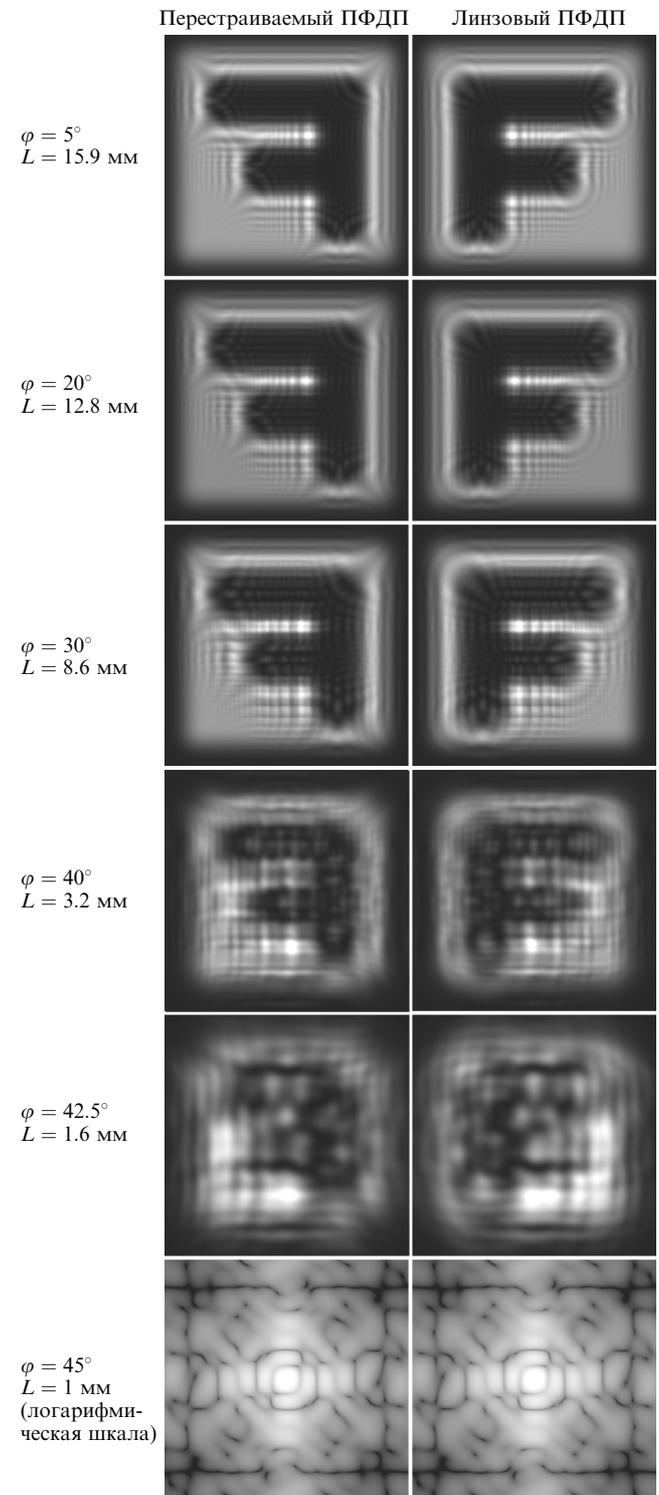


Рис.6. Распределения интенсивности излучения на выходе перестраиваемого ПФДП (рис.3) с параметрами $f = d = F_0 = 100$ см при различных значениях угла φ и размерах рисунков по горизонтали L (левый столбец) и соответствующего линзового ПФДП (правый столбец).

зы дают в случае предлагаемой схемы перестраиваемого ПФДП несколько иную, чем при использовании обычного преобразователя, дифракционную структуру пучков, с наиболее заметным различием в углах изображения объекта в когерентном излучении, которое применялось в модельных расчетах, представленных на рис.6. Действительно, например, в случае моды Эрмита – Гаусса u_{nm}^{HG} в выходной опорной плоскости для обычного ПФДП порядка a по обеим осям имеем

$$\mathcal{F}_{xz}^a \mathcal{F}_{yz}^a [u_{nm}^{HG}] = \exp[-ia(n+m)\pi/2] u_{nm}^{HG}, \quad (14)$$

в то время как для перестраиваемого ПФДП (рис.3)

$$\mathcal{F}_{xz}^{2-a} \mathcal{F}_{yz}^a [u_{nm}^{HG}] = \exp[-in\pi - ia(m-n)\pi/2] u_{nm}^{HG}, \quad (15)$$

т. е. фазовые добавки членов разложения произвольного поля по модам оказываются различными.

4. Заключение

В общем случае, как показано в [18], полное управление параметрами световой волны (масштабом, кривизной поля и порядком ФП) возможно при использовании оптической схемы, содержащей шесть цилиндрических линз с переменным фокусным расстоянием. Практическая реализация подобного устройства до сих пор не осуществлена. Предложенные ранее схемы ПФДП [18–22] имеют ограниченный диапазон перестройки порядка Фурье-преобразования [18, 19] или требуют изменения положений входной и выходной плоскостей устройства [20, 21]. ПФДП, описанный в работе [22], относится скорее к устройствам волоконной оптики. В то же время в предложенной в настоящей работе схеме перестраиваемого дробного двумерного преобразователя Фурье используются обычные оптические элементы (сферические и цилиндрические линзы), и она является достаточно

простой. С помощью этой схемы можно зафиксировать положения источника (исследуемого распределения светового поля) и приемника, причем изменение порядка ДФП ($a \in [0, 1]$ в одной плоскости и $(2-a)$ – в другой) достигается только вращением цилиндрических компонент оптических квадруполов вокруг оптической оси устройства.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-16818).

1. Mendlovic D., Ozaktas H.M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 1875 (1993); *ibid.*, 2522 (1993).
2. Lohmann A.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 2181 (1993).
3. Bernardo L.M., Soares O.D.D. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 2622 (1994).
4. Ozaktas H.M., Erden M.F. *Opt. Commun.*, **143**, 75 (1997).
5. Ozaktas H.M., Mendlovic D. *Opt. Lett.*, **19**, 1678 (1994).
6. Zhao D. *Opt. Commun.*, **168**, 85 (1999).
7. Brunel M., Coetmellec S. *Opt. Commun.*, **230**, 1 (2004).
8. Hwang H.-E., Han P. *Opt. Commun.*, **245**, 11 (2005).
9. Jin S., Bae Y.-S., Lee S.-Y. *Opt. Commun.*, **198**, 57 (2001).
10. Dragoman D., Dragoman M. *Opt. Commun.*, **141**, 5 (1997).
11. Yetik I.S., Kutay M.A., Ozaktas H.M. *Opt. Commun.*, **197**, 275 (2001).
12. Zalevsky Z., Mendlovic D., Kutay M.A., Ozaktas H.M., Solomon J. *Opt. Commun.*, **190**, 95 (2001).
13. Dragoman D., Dragoman M. *Opt. Commun.*, **145**, 33 (1998).
14. Ertosun M.G., Atli H., Ozaktas H.M., Barshan B. *Opt. Commun.*, **244**, 61 (2005).
15. Unnikrishnan G., Joseph J., Singh K. *Opt. Lett.*, **25**, 887 (2000).
16. Zhang Y., Zheng C.-H., Tanno N. *Opt. Commun.*, **202**, 277 (2002).
17. Hennelly B., Sheridan J.T. *Opt. Lett.*, **28**, 269 (2003).
18. Erden M.F., Ozaktas H.M., Sahin A., Mendlovic D. *Opt. Commun.*, **136**, 52 (1997).
19. Lohmann A.W. *Opt. Commun.*, **115**, 437 (1995).
20. Dorsch R.G. *Appl. Opt.*, **34**, 6016 (1995).
21. Andres P., Furlan W.D., Saavedra G., Lohmann A.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 853 (1997).
22. Dragoman D., Brenner K.-H., Dragoman M., Bahr J., Krackhardt U. *Opt. Lett.*, **23**, 1499 (1998).
23. Hua J., Liu L., Li G. *Appl. Opt.*, **36**, 8490 (1997).
24. Erden M.F., Ozaktas H.M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 2190 (1997).
25. Nemes G., Siegman A.E. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 2257 (1994).
26. Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **36**, 76 (2006).