

# Импульсная диффузионная оптическая томография на основе использования аналитических статистических характеристик траекторий фотонов

А.Б.Коновалов, В.В.Власов, А.Г.Калинцев, О.В.Кравченко, В.В.Любимов

*Методом средних траекторий фотонов (метод СТФ) обратная задача диффузионной оптической томографии (ДОТ) сведена к решению интегрального уравнения с интегрированием вдоль условной среднестатистической траектории фотонов (СТФ). Использован аналитический подход к оценке характера искривления СТФ вблизи плоской границы рассеивающей среды. На основании этих оценок определяются аналитические статистические характеристики траекторий фотонов для геометрии плоского слоя. Для решения обратной задачи ДОТ используется мультипликативный алгебраический алгоритм, модифицированный нами с целью улучшения сходимости итерационного процесса реконструкции. Посредством вычислительного эксперимента показано, что модифицированный метод СТФ позволяет реконструировать приграничные оптические неоднородности практически без искажений.*

**Ключевые слова:** диффузионная оптическая томография, метод средних траекторий фотонов, мультипликативный алгебраический алгоритм реконструкции, пространственно-вариантная блоринг-модель.

## 1. Введение

Подобно проекционной томографии (рентгеновской компьютерной, однофотонной эмиссионной компьютерной, позитронной эмиссионной) диффузионная оптическая томография (ДОТ) сильно рассеивающих сред изначально ставит прямую задачу, т. е. задачу прохождения излучения через среду, а затем формулирует и решает обратную задачу, т. е. задачу восстановления пространственных распределений оптических параметров среды. Основной проблемой ДОТ является многократное рассеяние света, вызывающее диффузию фотонов и искажающее наличие у них каких-либо регулярных траекторий. Поэтому для решения прямой задачи используют точные модели прохождения излучения через вещество: уравнение переноса [1–4], его диффузионное приближение [1, 5–8] или метод Монте-Карло [9–11]. Аналитические решения уравнения переноса для геометрии плоского слоя, выбранной нами для исследований, анализируются в работах Кохановского [2, 3]. Решения уравнения диффузии для той же геометрии получены многими авторами, например Эрриджем и др. [7] и Контини и др. [8]. Когда плоский слой представляет собой случайно-неоднородную среду, уравнение переноса (или диффузии) решают численно методом конечных элементов [5, 6] или методом конечных разностей [4]. Обратная задача ДОТ не-

сит сильно нелинейный характер, обусловленный нелинейной зависимостью потока фотонов от реконструируемых оптических параметров (коэффициенты поглощения и рассеяния, показатель преломления). Поэтому прямое использование стандартных алгоритмов проекционной томографии [12–14], базирующихся на линейном преобразовании Радона, приводит к искажению и размытию воспроизводимых на томограммах структур [15, 16].

Для локальной линеаризации обратной задачи ДОТ обычно используют многошаговые алгоритмы реконструкции [4–6], основанные на вариационной формулировке описывающего модель прохождения света уравнения. Типичным примером таких алгоритмов является алгоритм Ньютона–Рафсона с итерационной процедурой Левенберга–Маркуардта [6]. Многошаговые алгоритмы позволяют получить относительно высокое для диффузионных томограмм пространственное разрешение ( $\sim 5$  мм), но являются недостаточно быстрыми для проведения медицинской диагностики в реальном масштабе времени. Это вызвано тем, что прямую задачу приходится решать численными методами многократно, подстраивая на каждом шаге линеаризации не только вектор решения, но и матрицу коэффициентов системы алгебраических уравнений, описывающих дискретную модель.

В целях ускорения процедуры реконструкции нами разработан альтернативный метод [17–27], основанный на вероятностной интерпретации процесса переноса световой энергии фотонами от источника к приемнику. Согласно этому методу обратная задача ДОТ сводится к решению интегрального уравнения с интегрированием вдоль среднестатистической траектории фотонов (СТФ). Привязка к условным СТФ позволяет принципиально перейти от многошаговой модели реконструкции к одношаговой и применять для восстановления оптических параметров быстрые алгоритмы проекционной томографии [12–14]. Заметим, что интегралы по траекториям фо-

А.Б.Коновалов, В.В.Власов. ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. акад. Е.И.Забабкина», Россия, Снежинск, Челябинская обл., п/я 245; e-mail: a\_konov2003@yahoo.com

А.Г.Калинцев, В.В.Любимов. НИИ лазерной физики, Россия, 119034 С.-Петербург, Биржевая л., 16

О.В.Кравченко. Institute of Electronic Structure & Laser – Foundation for Research and Technology – Hellas (IESL-FORTH) P.O.Box 1527, Vassilika Vouton, 71110 Heraklion, Crete; e-mail: olgakr@iesl.forth.gr

Поступила в редакцию 16 июня 2006 г., после доработки – 25 июля 2006 г.

тонов исследовались Тессендорфом [28] аналитически с помощью уравнения переноса. Перелман и др. [29, 30] использовали вероятностный подход, близкий представленному в настоящей статье, для определения интегралов по средним (наиболее вероятным) траекториям и анализа времяразрешенных сигналов. Однако задача реконструкции пространственных распределений оптических параметров в этих работах не рассматривалась.

В предыдущих работах мы на примере 2D-реконструкций по данным, смоделированным для импульсной схемы регистрации времяразрешенного сигнала, показали, что метод средних траекторий фотонов (метод СТФ) может быть с успехом реализован с помощью как алгебраических [22, 23, 26], так и интегральных алгоритмов [24, 25, 27]. Посредством фильтрации теней от оптических неоднородностей [24–26] либо пространственно-вариантной реставрации восстановленных томограмм [27] удается добиться разрешения, которое не уступает разрешению реконструкций, получаемых с помощью многошаговых алгоритмов. При этом выигрыш во времени счета достигает двух порядков.

До сих пор все наши реализации метода СТФ основывались на трехзвенной аппроксимации криволинейных СТФ и временных зависимостей скоростей движения центров масс мгновенных распределений диффузных фотонов (так называемых диффузионных облаков фотонов). Такой подход позволяет не только быстро восстанавливать изображение, но и в реальном масштабе времени выполнять предшествующий реконструкции расчет матрицы весовых коэффициентов системы уравнений (в случае использования алгебраических алгоритмов). Однако трехзвенное приближение корректно и не сказывается отрицательно на качестве реконструкции только в случае, если оптические неоднородности достаточно удалены от границ рассеивающего объекта, где СТФ близки к прямым, а скорости центров масс диффузионных облаков – к постоянным значениям. Вблизи же границ, где СТФ изгибаются, а центры масс движутся с ускорением, ошибки аппроксимации могут привести к искажениям при воспроизведении пространственных структур оптических неоднородностей [22]. В целях улучшения качества восстановления приграничных неоднородностей мы в настоящей работе впервые отказались от трехзвенной аппроксимации и использовали при реконструкции аналитические статистические характеристики траекторий фотонов. К таковым мы относим собственно СТФ, скорость центра масс диффузионного облака фотонов и стандартное среднеквадратическое отклонение (СКО) положения фотонов от СТФ. Аналитически исследован характер изменения характеристик вблизи плоской границы рассеивающей среды. Выведенные соотношения использованы для нахождения соответствующих заданному набору точечных источников и приемников средних траекторий и скоростей для геометрии плоского слоя (рассмотрен 2D-случай).

На базе полученных зависимостей реализована дискретная модель реконструкции. Для восстановления томограмм по модельным теням от поглощающих неоднородностей мы применяем мультипликативный алгебраический алгоритм реконструкции (МААР) [12, 13], модифицированный нами с целью улучшения сходимости итерационного процесса. При построении матрицы весовых коэффициентов системы уравнений рассматриваются пересечения с ячейками дискретизации области

реконструкции не самих СТФ, а так называемых банановидных полос, толщина которых составляет  $\sim 30\%$  величины СКО фотонов от СТФ. В процессе реконструкции на каждой итерации выполняется весовое сглаживание, учитывающее неравномерность введения поправок в различные ячейки дискретизации. Для реставрации восстановленных по теням томограмм используется пространственно-вариантная модель размытия изображения (в дальнейшем – блюринг-модель), подробно описанная нами в [27]. Результаты визуализируются и анализируются в сравнении с аналогичными результатами, полученными с применением трехзвенной аппроксимации статистических характеристик траекторий фотонов. Показано, что новая реализация метода СТФ позволяет существенно улучшить качество томограмм в случае, когда восстанавливаются неоднородности, близко расположенные к границам рассеивающего объекта.

## 2. Аналитические статистические характеристики траекторий фотонов

Пусть в некотором объеме рассеивающей среды  $V$ , ограниченном кусочно-гладкой поверхностью  $\partial\Omega$ , плотность фотонов удовлетворяет нестационарному уравнению диффузии с мгновенным точечным источником

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_1, \tau)}{\partial\tau} - \nabla[D(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_1)\nabla\varphi(\mathbf{r}_1, \tau)] + \mu_a(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_1, \tau) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \tau), \quad (1)$$

где  $D(\mathbf{r}_1)$  – коэффициент диффузии;  $\mu_a(\mathbf{r}_1)$  – коэффициент поглощения;  $v(\mathbf{r}_1) = c/n(\mathbf{r}_1)$  – скорость света в среде;  $c$  – скорость света в вакууме;  $n(\mathbf{r}_1)$  – показатель преломления;  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \tau)$  – дельта-функция Дирака. Тогда для условной плотности вероятности того, что фотон, мигрирующий из точки пространства-времени  $(\mathbf{r}_s, 0)$  ( $\mathbf{r}_s \in V$ ) в точку пространства-времени  $(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ ), в момент времени  $\tau$  окажется в точке пространства с координатами  $\mathbf{r}_1 \in V$ , условие

$$P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(\mathbf{r}_1, \tau)\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau)/\partial\eta}{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)/\partial\eta} \quad (2)$$

будет справедливым в случае, если используется граничное условие Дирихле, и условие

$$P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(\mathbf{r}_1, \tau)G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau)}{\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (3)$$

– в случае граничного условия Робина [19, 20, 22]. Здесь  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau)$  – функция Грина;  $\partial/\partial\eta$  – производная по направлению внешней нормали к поверхности  $\partial\Omega$  в точке  $\mathbf{r}$ . Условная плотность вероятности  $P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t)$  как функция переменной  $\mathbf{r}_1$  в каждый фиксированный момент времени  $\tau$  описывает мгновенные распределения диффузных фотонов (диффузионные облака), а временной интеграл  $\int_0^t P(\mathbf{r}_1, \xi; \mathbf{r}, t)d\xi$  – мгновенные распределения траекторий диффузных фотонов. В момент времени  $\tau = t$  этот интеграл формирует зону наиболее вероятных траекторий фотонов, мигрирующих из точки  $(\mathbf{r}_s, 0)$  в точку  $(\mathbf{r}, t)$  (банановидную зону). Введение в рассмотрение функции  $P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t)$  позволяет приближенно описать эту зону с помощью статистических моментов

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau) = \int_V \mathbf{r}_1 P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t) d^3 r_1, \tag{4}$$

$$\Delta(\mathbf{r}, t, \tau) = \left[ \int_V |\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}(\mathbf{r}_1, t, \tau)|^2 P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t) d^3 r_1 \right]^{1/2}. \tag{5}$$

Первый момент,  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)$ , представляет собой радиус-вектор движения центра масс распределения фотонов из точки  $(\mathbf{r}_s, 0)$  в точку  $(\mathbf{r}, t)$ . Траектория движения центра масс собственно и есть СТФ. Второй момент,  $\Delta(\mathbf{r}, t, \tau)$ , описывает стандартное среднеквадратическое отклонение положения фотонов от СТФ и характеризует эффективную ширину банановидной зоны в каждый момент времени  $\tau$ . Величина

$$v_{cl}(\tau) = \left| \frac{d\mathbf{R}(\tau)}{d\tau} \right| = \frac{dl(\tau)}{d\tau}, \tag{6}$$

где  $l(\tau)$  – расстояние, пройденное вдоль СТФ в момент  $\tau$ , есть скорость движения по средней траектории центра масс мгновенного распределения фотонов (в дальнейшем – скорость движения диффузионного облака).

Нетрудно показать [17, 18, 20], что в однородной бесконечной среде центр масс диффузионного облака движется от источника к приемнику равномерно и прямолинейно. Какое-либо искривление СТФ и изменение скорости движения при условии отсутствия контрастных неоднородностей может быть вызвано только близостью границы объекта. Исследуем характер изменения статистических характеристик вблизи плоской границы рассеивающей среды. Пусть мгновенный точечный источник располагается в однородном полупространстве  $z \geq 0$  в точке  $(0, 0, z_0)$ , причем  $z_0 \gg 1/\mu'_s$ , где  $\mu'_s$  – редуцированный коэффициент рассеяния. Рассмотрим в качестве примера граничное условие Дирихле  $\varphi(\mathbf{r}_1, \tau)|_{z=0} = 0$ . Согласно [17–19] для нахождения  $\varphi(\mathbf{r}_1, \tau)$  и функции Грина  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau)$  уравнения диффузии справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_1, \tau) = & \left( \frac{4\pi D_0 c \tau}{n_0} \right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\mu_{a0} c \tau}{n_0}\right) \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - z_0)^2}{4D_0 c \tau} n_0\right] \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + z_0)^2}{4D_0 c \tau} n_0\right] \right\}, \tag{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) = & \left[ \frac{4\pi D_0 c (t - \tau)}{n_0} \right]^{-3/2} \exp\left[-\frac{\mu_{a0} c (t - \tau)}{n_0}\right] \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}{4D_0 c (t - \tau)} n_0\right] \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2}{4D_0 c (t - \tau)} n_0\right] \right\}, \tag{8} \end{aligned}$$

где  $D_0, \mu_{a0}, n_0$  – оптические параметры однородной среды. Предположим для простоты расчетов, что приемник располагается в точке  $(x_0, 0, 0)$  на границе среды  $z = 0$ . Тогда с учетом  $y = 0$  и  $z = 0$  получим

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \right|_{y=0, z=0} = \left[ \frac{4\pi D_0 c (t - \tau)}{n_0} \right]^{-3/2}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[-\frac{\mu_{a0} c (t - \tau)}{n_0}\right] \frac{z_1 n_0}{D_0 c (t - \tau)} \\ & \times \exp\left[-\frac{(x_1 - x)^2 + y_1^2 + z_1^2}{4D_0 c (t - \tau)} n_0\right], \tag{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi(\mathbf{r}, t) \right|_{y=0, z=0} = & \left( \frac{4\pi D_0 c t}{n_0} \right)^{-3/2} \\ & \times \exp\left(-\frac{\mu_{a0} c t}{n_0}\right) \frac{z_0 n_0}{D_0 c t} \exp\left(-\frac{z_0^2 + x^2}{4D_0 c t} n_0\right). \tag{10} \end{aligned}$$

Подстановка выражений (7), (9) и (10) в соотношение (2) дает

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}, t) \Big|_{y=0, z=0} = & \frac{2}{z_0} \left( \frac{4\pi D_0 c \tau}{n_0} \right)^{-3/2} \left( 1 - \frac{\tau}{t} \right)^{-5/2} \\ & \times \exp\left[-\frac{z_0^2 n_0 (t - \tau)}{4D_0 c t \tau} - \frac{x^2 n_0 \tau}{4D_0 c t (t - \tau)}\right] \\ & \times \exp\left[-x_1^2 \frac{n_0 t}{4D_0 c \tau (t - \tau)} + x_1 \frac{x n_0}{2D_0 c (t - \tau)}\right] \\ & \times \exp\left[-y_1^2 \frac{n_0 t}{4D_0 c \tau (t - \tau)}\right] z_1 \sinh\left(z_1 \frac{z_0 n_0}{2D_0 c \tau}\right) \\ & \times \exp\left[-z_1^2 \frac{n_0 t}{4D_0 c \tau (t - \tau)}\right]. \tag{11} \end{aligned}$$

Подставляя (11) в (4) и интегрируя по объему рассеивающей среды  $z \geq 0$ , получаем соотношения для координат движения центра масс диффузионного облака из точки источника  $(0, 0, z_0)$  в точку приемника  $(x_0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} X(\tau) &= x_0 \frac{\tau}{t}, \\ Y(\tau) &= 0, \\ Z(\tau) &= z_0 \left\{ \left[ 1 + \frac{\tau}{t} \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right] \operatorname{erf}\left(\frac{t - \tau}{\alpha \tau}\right)^{1/2} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\alpha \tau (t - \tau)}{\pi t^2} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\alpha \tau}\right) \right\}, \tag{12} \end{aligned}$$

где  $\alpha = 4D_0 c t / (z_0^2 n_0)$ ;  $\operatorname{erf} \xi$  – интеграл вероятности. Соответственно скорость движения

$$v_{cl}(\tau) = \left[ \left( \frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dY}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \frac{x_0}{t}; \\ \frac{dY}{d\tau} &= 0; \\ \frac{dZ}{d\tau} &= \frac{z_0}{t} \left\{ \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \operatorname{erf}\left(\frac{t - \tau}{\alpha \tau}\right)^{1/2} - \left[ \frac{\alpha \tau}{\pi(t - \tau)} \right]^{1/2} \right. \\ & \left. \times \exp\left(-\frac{t - \tau}{\alpha \tau}\right) \right\}. \tag{14} \end{aligned}$$

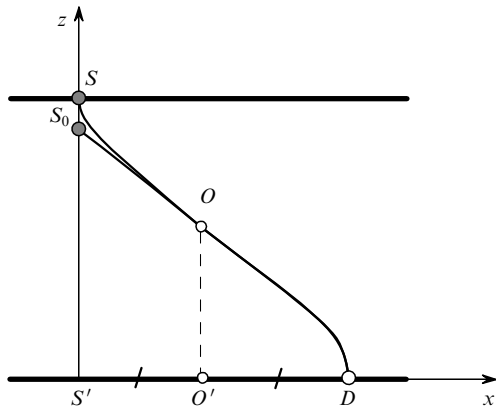


Рис.1. Построение СТФ для геометрии плоского слоя.

Целью настоящей работы является исследование возможности качественной реконструкции оптических неоднородностей рассеивающей среды, ограниченной двумя плоскостями. Типичным примером практического применения геометрии плоского слоя (случай  $d \gg 1/\mu'_s$ , где  $d$  – толщина слоя) является диффузионная оптическая реконструктивная маммография [31–34]. Женская грудь плотно помещается между двумя стеклянными пластинами, на которых располагаются источники и приемники излучения, и принимает, таким образом, форму слоя. Очевидно, что вывод соотношений, подобных (12) и (14), для геометрии плоского слоя связан с более громоздкими выкладками. Поэтому в целях нахождения СТФ и скоростей движения диффузионных облаков между двумя плоскостями целесообразно воспользоваться аналитическими результатами, полученными для полупространства.

Основопологающим для этого является предположение о том, что характер искривления СТФ и изменения скорости  $v_{cl}(\tau)$  вблизи плоскости источника  $S$  такой же, как и вблизи плоскости приемника  $D$  (рис.1). Причем влияние противоположной границы пренебрежимо мало [19, 20]. В этом случае центр масс диффузионного облака проходит расстояние  $SO$ , так же как и расстояние  $OD$ , за время  $t/2$ . Если бы центр масс двигался в полупространстве  $z \geq 0$  из некоторой точки  $S_0$  в точку  $D$  через точку  $O$ , то за время  $t/2$  он прошел бы участок  $S_0O$ . Поскольку составляющая скорости вдоль оси  $x$  – постоянная величина, то точка  $S_0$  лежит на перпендикуляре  $SS'$  к границам среды.

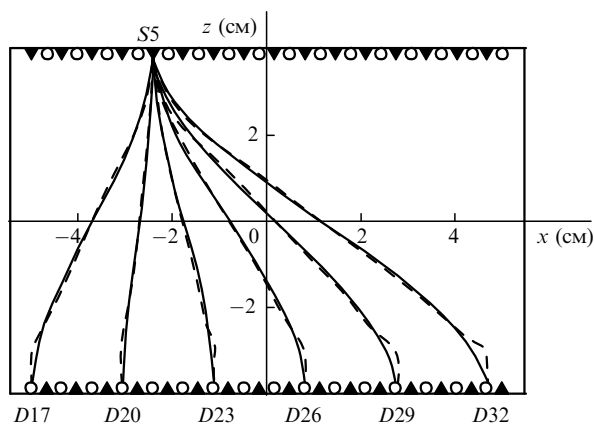


Рис.2. Геометрия регистрации данных для объекта прямоугольной формы. Координаты обозначенных источников и приемников (в сантиметрах):  $S5 - (-2.52, 4)$ ,  $D17 - (-5, -4)$ ,  $D20 - (-3.06, -4)$ ,  $D23 - (-1.13, -4)$ ,  $D26 - (0.81, -4)$ ,  $D29 - (2.74, -4)$  и  $D32 - (4.68, -4)$ .

Расстояние  $S_0S'$  может быть найдено численным решением уравнения  $Z(\tau = t/2) = d/2$  относительно  $z_0$  (см. соотношение (12)), после чего часть траектории  $OD$  может быть рассчитана с помощью выражения (12), а часть  $SO$  получена ее симметричным отражением относительно точки  $O$ .

На рис.2 представлена выбранная нами для случая 2D-реконструкции геометрия регистрации данных. Треугольниками указаны положения источников излучения, а кружками – положения приемников. Также на рис.2 в качестве примера показаны шесть средних траекторий, построенных по описанному выше алгоритму для времени  $t = 3000$  пс и оптических параметров  $D_0 = 0.066$  см и  $n_0 = 1.4$ . Для сравнения штриховыми линиями обозначены кусочно-линейные аппроксимации СТФ. В настоящей работе исследуется режим зондирования объекта на просвет, т.е. учитываются связи только между источниками излучения и детекторами, расположенными на противоположных границах объекта. Полное число средних траекторий составляет  $32 \times 16$ .

### 3. Алгоритм решения обратной задачи

Определим относительную тень от оптических неоднородностей  $g$  как логарифм отношения интенсивностей  $I_0$  и  $I$  соответственно невозмущенного и возмущенного сигналов, регистрируемых на поверхности  $\partial\Omega$  в момент времени  $t$ . Пусть применимо первое приближение теории малых возмущений ( $I_0 - I \ll I_0$ ), а возмущение сигнала обусловлено наличием локального изменения  $\delta\mu_a(r_1) = \mu_a(r_1) - \mu_{a0}$  коэффициента поглощения  $\mu_{a0}$  (не нарушая общности метода СТФ, в настоящей статье мы ограничимся случаем поглощающей неоднородности). Тогда обратная задача импульсной ДОТ сводится к решению интегрального уравнения [19, 21, 22]

$$g(L, t) = \int_L \frac{c}{n_0 v_{cl}(l)} \left[ \int_V \delta\mu_a(r_1) P(r_1, \tau; r, t) d^3 r_1 \right] dl, \quad (15)$$

где  $L$  – СТФ;  $v_{cl}(l)$  – скорость движения диффузионного облака как функция  $l(\tau)$ . Уравнение (15) может быть разрешено относительно функции, заключенной в квадратные скобки под знаком интеграла, т.е. функции  $\delta\mu_a(r_1)$ , усредненной по пространственному распределению фотонов, которые вносят вклад в регистрируемый в момент времени  $t$  сигнал. Решение обратной задачи предполагает, таким образом, последовательное выполнение двух шагов: 1) реконструкция по набору относительных теней томограмм, размытых в результате усреднения; 2) реставрация полученных томограмм с использованием некоторой блюринг-модели в целях компенсации эффекта размытия.

Обобщенная дискретная модель задачи 2D-реконструкции строится обычным образом [22]. Вводится декартова сетка квадратных элементов изображения, причем так, чтобы она покрывала объект. Пусть реконструируемая функция  $\int_V \delta\mu_a(r_1) P(r_1, \tau; r, t) d^3 r_1$  принимает внутри элемента изображения с индексами  $k$  и  $l$  (в дальнейшем –  $(k, l)$ -ячейки) постоянное значение  $f_{kl}$ . Пусть  $L_{ij}$  – СТФ, соединяющая  $i$ -й источник и  $j$ -й приемник, а  $g_{ij}$  – относительная тень от  $i$ -го источника, измеряемая  $j$ -м приемником. Тогда дискретную модель задачи реконструкции можно охарактеризовать системой линейных алгебраических уравнений

$$g_{ij} = \sum_{k,l} W_{ijkl} f_{kl}, \tag{16}$$

где  $W_{ijkl}$  – вес вклада  $(k, l)$ -ячейки в общее изменение сигнала  $g_{ij}$  вдоль всей траектории  $L_{ij}$ . По сравнению с [22] в целях улучшения сходимости итерационного процесса реконструкции мы модернизировали метод расчета матрицы весовых коэффициентов  $W = \{W_{ijkl}\}$ , применив подход, часто используемый в проекционной томографии [35, 36]. Идея заключается в рассмотрении пересечения с  $(k, l)$ -ячейкой не самой СТФ, а узкой полосы конечной толщины. В проекционной томографии такие полосы имеют вид вытянутого прямоугольника или конуса. В нашем случае целесообразно выбрать полосу банановидной формы, толщина которой прямо пропорциональна СКО фотона от СТФ:  $\varepsilon = \gamma \Delta(\tau)$ . Высокая точность вычисления СКО в данном случае не имеет принципиального значения. Поэтому в соответствии с выводом [19] о том, что СКО фактически не зависит от формы исследуемого объекта, можно воспользоваться простым соотношением для бесконечного пространства

$$\Delta(\tau) = \left[ \frac{2D_0 c(t - \tau)\tau}{n_0 t} \right]^{1/2}. \tag{17}$$

Коэффициент пропорциональности  $\gamma \in (0, 1)$  выбирается из условия наиболее полного заполнения площади объекта всеми полосами. На рис.3 показано такое заполнение для  $\gamma$ , равных 0.05 (рис.3,а) и 0.3 (рис.3,б), и времени задержки приемников  $t = 300$  пс. Оптические параметры соответствуют значениям, приведенным в разд.2. Указанное время задержки, выбранное нами для расчетов, соответствует начальному участку переднего фронта вре-

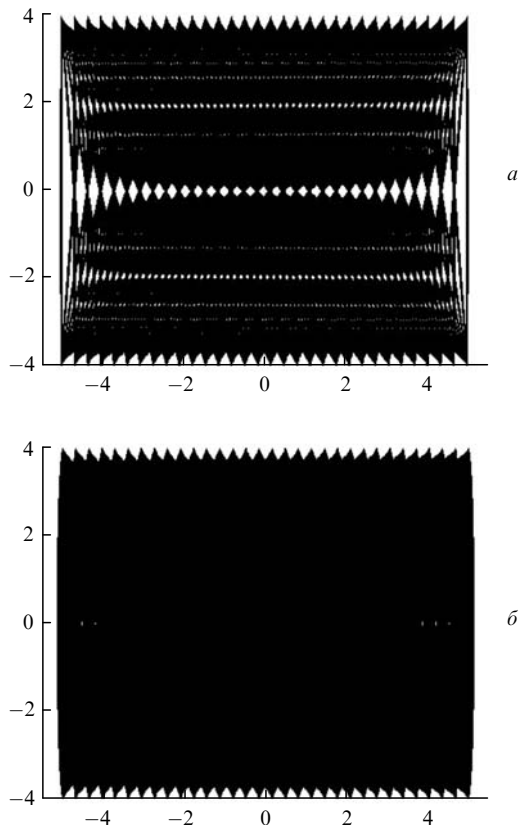


Рис.3. Зоны заполнения объекта банановидными полосами при  $\gamma = 0.05$  (а) и  $0.3$  (б) (по осям – сантиметры).

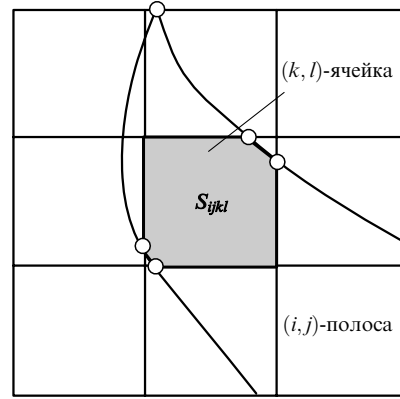


Рис.4. Пересечение  $(i, j)$ -полосы с  $(k, l)$ -ячейкой.

менной функции рассеяния точки в случае противоположно расположенных источников и приемников и начальному участку заднего фронта – в случае наиболее удаленных друг от друга источников и приемников. На рис.3,а присутствуют обширные области, которые не пересекает ни одна полоса (выделены белым). Фактически это означает, что при выборе достаточно мелкой сетки появятся ячейки, в которые поправка в процессе реконструкции вноситься не будет. На рис.3,б эти области ничтожно малы, что сводит вероятность возникновения «мертвых» ячеек к минимуму. Поэтому для расчетов нами выбрано  $\gamma = 0.3$ .

Вес  $W_{ijkl}$  определяется по следующей формуле:

$$W_{ijkl} = \frac{c}{n_0 v_{ijkl}^{cl}} \frac{S_{ijkl}}{\delta}, \tag{18}$$

где  $S_{ijkl}$  – площадь пересечения соединяющей  $i$ -й источник и  $j$ -й приемник банановидной полосы (в дальнейшем –  $(i, j)$ -полосы) с  $(k, l)$ -ячейкой (рис.4);  $v_{ijkl}^{cl}$  – дискретное значение скорости диффузионного облака, рассчитанное для  $(kl)$ -ячейки и  $(i, j)$ -полосы;  $\delta$  – размер ячейки. Массив значений  $\{v_{ijkl}^{cl}\}$  находится по следующему алгоритму.

1. Задается последовательность дискретных значений моментов времени  $\{\tau_p\}$ .

2. Строятся перпендикуляры к касательным рассматриваемой траектории  $L_{ij}$  в точках, соответствующих временам  $\{\tau_p\}$  (рис.5).

3. Организуется цикл по  $p$ , при котором  
– находятся ячейки пересечения  $(i, j)$ -полосы и полосы, образованной двумя соседними перпендикулярами, соответствующими моментам  $\tau_p$  и  $\tau_{p+1}$  (на рис.5 такие ячейки выделены серым);

– во все найденные ячейки записывается значение, равное средней для двух моментов скорости  $[v_{cl}(\tau_p) + v_{cl}(\tau_{p+1})]/2$ ;

– если в ячейку уже записано некоторое значение  $(v_{ijkl}^{cl})_{old}$ , то выполняется пересчет по формуле

$$v_{ijkl}^{cl} = \frac{(v_{ijkl}^{cl})_{old} N + (v_{ijkl}^{cl})_{new}}{N + 1}, \tag{19}$$

где  $(v_{ijkl}^{cl})_{new}$  – новое значение,  $N$  – число уже выполненных пересчетов.

4. Последовательно перебираются все СТФ, и для каждой из них процедура повторяется с шага 2.

Для введения на каждой  $(s + 1)$ -й итерации поправок в реконструируемое изображение используется следующее соотношение:

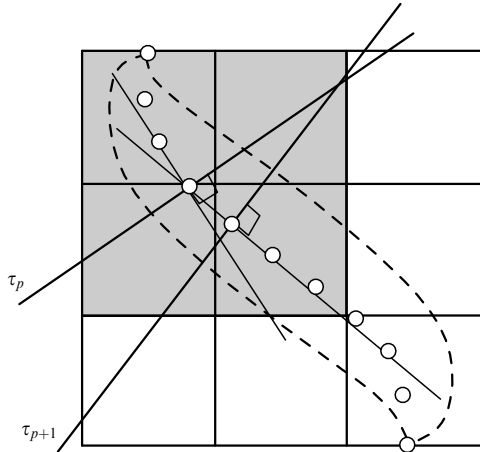


Рис.5. Схема определения дискретных значений скорости диффузионного облака.

$$f_{kl}^{(s+1)} = f_{kl}^{(s)} \left( g_{ij} / \sum_{k,l} W_{ijkl} f_{kl}^{(s)} \right)^{\lambda W_{ijkl} / \tilde{W}_{kl}}, \quad (20)$$

где  $\tilde{W}_{kl} = \sum_{i,j} W_{ijkl}$ ;  $\lambda \in (0, 1)$  – параметр, регулирующий скорость сходимости итерационного процесса. Для улучшения сходимости нами на каждой итерации выполняется сглаживание с учетом распределений по ячейкам количества вводимых поправок  $\{A_{kl}\}$  и суммы весов  $\{\tilde{W}_{kl}\}$ :

$$f_{kl}^{(s+1)} = \frac{1}{(2r+1)^2} \sum_{m=-r}^r \sum_{n=-r}^r f_{k+m, l+n}^{(s)} \tilde{W}_{k+m, l+n} A_{k+m, l+n}, \quad (21)$$

где целое число  $r$  задает размер сглаживающего окна ( $r \times r$ ). Формулы (20), (21), описывающие модифицированный нами МААР, учитывают, в отличие от других подобных реализаций этого алгоритма [22, 35, 36], неравномерность количества поправок, вводимых в различные ячейки. Распределения  $\{A_{kl}\}$  и  $\{\tilde{W}_{kl}\}$  для сетки  $100 \times 137$ , выбранной нами для проведения расчетов, представлены на рис.6. Итерационный процесс прерывается при достижении заданной скорости сходимости  $v_{conv}$ :

$$\frac{\rho^{(s+1)} - \rho^{(s)}}{\rho^{(s)}} \leq v_{conv}, \quad (22)$$

где

$$\rho^{(s)} = \sum_{i,j} \left( g_{ij} - \sum_{k,l} W_{ijkl} f_{kl}^{(s)} \right)^2.$$

Для реставрации восстановленных по теням томограмм  $f$  в целях компенсации эффекта размытия  $\delta\mu_a(r_1)$  используется пространственно-вариантная блоринг-модель Наги [37]. Согласно этой модели дискретная задача реставрации описывается системой линейных алгебраических уравнений

$$f = Px, \quad (23)$$

где  $P$  – большая, плохо обусловленная матрица, описывающая блоринг-оператор;  $x$  – дискретное представление искомого решения  $\delta\mu_a(r_1)$ . В основе модели – деление изображения на области, каждая из которых описывается своей пространственно-инвариантной функцией рассеяния точки (ФРТ). Эти функции интерполируются и записываются в матрицу  $P$  таким образом, что матрица содержит все ненулевые элементы каждой из простран-

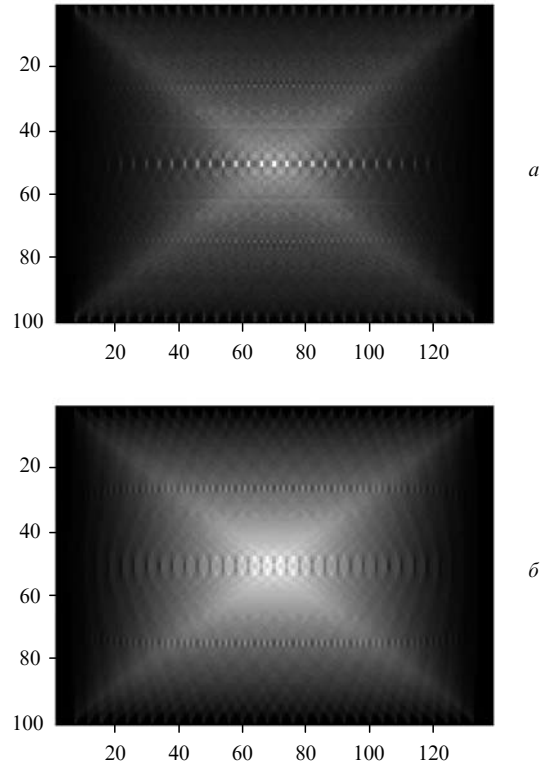


Рис.6. Распределения числа вносимых в реконструируемое изображение поправок  $\{A_{kl}\}$  (а) и сумм весов  $\{\tilde{W}_{kl}\}$  (б) на сетке  $100 \times 137$ .

ственно-инвариантных ФРТ, поставленных в соответствие отдельным областям томограммы. Кроме того,  $P$  учитывает априорную информацию о характере экстраполяции реставрируемого изображения за пределы границ, т.е. граничные условия. Это необходимо для компенсации возникающих в результате эффекта Гиббса приграничных артефактов. Так, например, в случае рефлексивных граничных условий, используемых нами при реставрации, матрица  $P$  представляет собой сумму двух матриц – расширенной блочной матрицы Теплица [38] с расширенными блоками Теплица и расширенной блочной матрицы Ханкеля с расширенными блоками Ханкеля [39].

При моделировании каждой пространственно-инвариантной ФРТ, соответствующей отдельной области томограммы, выполняется следующая последовательность операций.

1. На треугольной сетке тремя значениями в узлах треугольника, положение которого совпадает с центром области, задается точечная неоднородность, причем ее амплитуда на порядок превышает амплитуду  $\delta\mu_a(r_1)$ .
2. Тени от точечной неоднородности моделируются посредством численного решения уравнения (1) методом конечных элементов.
3. По полученным модельным теням восстанавливается томограмма с ФРТ по модифицированному нами МААР.

Для обращения системы (23) мы выбрали итерационный алгоритм наискорейшего спуска с минимизацией нормы невязки решения [40]. Этот алгоритм достаточно быстро сходится и обладает квазисходимостью по отношению к относительной ошибке  $\|x_s - x\|/\|x\|$ , где  $x_s$  – приближение на  $s$ -й итерации. Это важно с точки зрения получения регуляризованного решения. Подробно процедура реставрации диффузионных оптических томо-

грамм, восстановленных методом СТФ, описана в [27] и в настоящей статье не освещается.

#### 4. Результаты и их обсуждение

В целях демонстрации возможностей модифицированного метода СТФ нами поставлен вычислительный эксперимент, в рамках которого численно задавались рассеивающие объекты с поглощающими неоднородностями, моделировались относительные тени от неоднородностей и выполнялись описанные в разд.3 процедуры реконструкции и реставрации. Рассмотрены два рассеивающих объекта прямоугольной формы с размерами  $11 \times 8$  см (рис.2). Показатель преломления, коэффициенты диффузии и поглощения объектов равны 1.4, 0.66 см и  $0.05 \text{ см}^{-1}$  соответственно. Каждый из объектов содержит по две круглые поглощающие неоднородности диаметром 0.8 см, удаленные друг от друга также на 0.8 см. Декартовы координаты центров неоднородностей в системе координат рис.2 (берутся в сантиметрах) таковы:  $(-0.8, 0)$  и  $(0.8, 0)$  у первого объекта,  $(-0.8, 3.3)$  и  $(0.8, 3.3)$  у второго. Коэффициент поглощения неоднородностей равен  $0.075 \text{ см}^{-1}$ . Расположение источников и приемников соответствует представленному на рис.2.

На рис.7,*а* показаны неоднородности, заданные на треугольной сетке высокого разрешения (13859 узлов и 7108 элементов). Относительные тени от неоднородностей моделировались посредством численного решения уравнения (1) методом конечных элементов. Реконструкция каждого объекта по модельным теням с использованием модифицированного МААР выполнялась на сетку

$100 \times 137$ . Стабилизированное решение получалось уже после десяти-двенадцати итераций. Время реконструкции на одну итерацию составляло около 12 с, из них 5 с занимало введение поправок по формуле (20) и 7–8 с приходилось на сглаживание с окном  $3 \times 3$  (согласно (21)). Здесь и далее времена счета приведены для программ, написанных под MATLAB и ПК Pentium 4 (1.7 ГГц) с оперативной памятью 256 Мб. Результаты реконструкции неоднородностей объектов представлены на рис.7,*б*.

С целью реставрации томограмм мы реализовали пространственно-вариантный подход Наги [37] с делением изображения на две области, каждой из которых соответствовала своя поглощающая неоднородность. При моделировании ФРТ точечная неоднородность задавалась на треугольнике в центре круглой неоднородности. При реставрации томограммы с удаленными от границ неоднородностями выполнено 10 итераций. В случае приграничных неоднородностей регуляризованное решение получено уже через три итерации. Время реставрации на одну итерацию составляло 6 с. Результаты реставрации представлены на рис.7,*в*. Конечные результаты процедуры реконструкции-реставрации для случая трехзвенной аппроксимации статистических характеристик показаны на рис.7,*г* (сетка  $50 \times 68$ ). При этом восстановление проводилось по линиям, а не по полосам, как описано выше. На более мелкой сетке получить адекватные результаты не удалось вследствие сильной разреженности матрицы весовых коэффициентов. Заметим, что при том же количестве итераций на восстановление по линиям со сглаживанием затрачивалось в 3 раза меньше времени, чем в случае реконструкции по банановидным полосам. Для количественной оценки пространственной разрешающей способности модифицированного метода СТФ по профилям полученных изображений были оценены коэффициенты передачи модуляции [22, 24, 25, 27] для структур размером 0.8 см. Эти оценки приведены на рис.7 в правых нижних углах соответствующих изображений.

Анализ результатов свидетельствует о том, что структуры размером 0.8 см надежно разрешаются на всех томограммах, представленных на рис.7. Однако при переходе от реконструкции по кусочно-линейным СТФ к реконструкции по банановидным полосам мы получаем более чем двукратный выигрыш в воспроизводимом контрасте: 78 % против 37 % в случае удаленных от границ неоднородностей и 83 % против 37 % в случае приграничных неоднородностей. В последнем случае не только улучшается разрешение, но и в значительной степени компенсируются искажения структур, вызванные трехзвенной аппроксимацией. Действительно, на рис.7,*г* (справа) наблюдается ложное смещение структур в сторону границы. В результате неоднородности полностью с ней сливаются. Напротив, на рис.7,*б* и *в* отчетливо разрешим зазор между границей и неоднородностями. При этом положения центров последних совпадают с таковыми на исходном модельном изображении. Эффект реставрации приграничных структур незначителен: после реставрации контраст увеличивается с 72 % до 83 %. Это можно объяснить относительно слабым по сравнению с центральной областью изображения размытием структур. В целом модифицированный метод СТФ позволяет получить изображения более высокого качества, чем его прежние реализации, основанные на трехзвенной аппроксимации статистических характеристик.

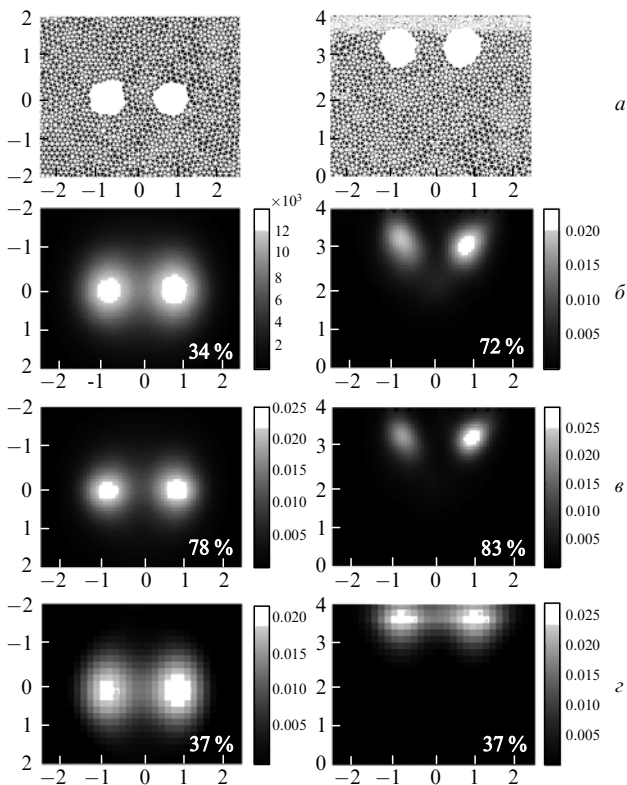


Рис.7. Результаты реконструкции и реставрации томограмм (оси – в сантиметрах, шкала палитры – в обратных сантиметрах). Показаны области изображений с размерами  $5 \times 4$  см, содержащие неоднородности.

Из представленных выше данных следует, что описанный метод несколько уступает во времени счета сверхбыстрым алгоритмам реконструкции по линиям. Это происходит из-за меньшей разреженности матрицы весовых коэффициентов, а следовательно, необходимости проведения большего объема вычислений. В настоящей статье длительность процедуры реконструкции-реставрации не оптимизировалась. Цель работы заключалась в демонстрации принципиальной перспективности нового метода расчета весовых коэффициентов с точки зрения улучшения качества томограмм. В дальнейшем для обращения системы (16) могут быть использованы более быстрые, нежели МААР, алгоритмы, например такие, как алгоритм сопряженных градиентов для задачи наименьших квадратов [41] и алгоритм наименьших квадратов с QR-факторизацией [42]. Для компенсации эффекта размывания структур вместо трудоемкой итерационной пост-обработки восстановленных томограмм может применяться фильтрация теней в частотной области [26]. Кроме того, целесообразно перейти на более быструю, чем MATLAB, счетную среду. Все это позволит сократить время расчетов по модифицированному методу СТФ.

## 5. Заключение

В настоящей статье исследована принципиальная возможность улучшения качества диффузионных оптических томограмм посредством применения модифицированного метода средних траекторий фотонов с импульсной схемой регистрации времяразрешенного сигнала. Суть модификации состоит в отказе от практикуемой ранее кусочно-линейной аппроксимации статистических характеристик траекторий фотонов и в использовании для расчетов аналитических зависимостей. При построении дискретной задачи реконструкции мы усовершенствовали способ расчета весовых коэффициентов, что позволило существенно улучшить сходимость использованного для восстановления томограмм мультипликативного алгебраического алгоритма реконструкции. С целью демонстрации возможностей модифицированного метода средних траекторий фотонов поставлен вычислительный эксперимент по 2D-реконструкции двух рассеивающих объектов прямоугольной формы с поглощающими неоднородностями. Показано, что в случае, когда неоднородности располагаются вблизи границы, удается добиться существенного улучшения качества изображений по сравнению с предыдущими реализациями метода. В обсуждениях отмечено, что хотя рассмотренная реализация метода несколько уступает предыдущим в скорости счета (вследствие увеличения объема вычислений), в дальнейшем возможна оптимизация времени реконструкции.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.А.Шапиной за помощь при проведении расчетов и полезные обсуждения результатов. О. В. Кравченко благодарит за поддержку Европейское сообщество и его 6-ю программу Марии Кюри поддержки иностранных ученых (грант MIF1-CT-2005-008330).

1. Исимару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* (М.: Мир, 1981, т. 1).
2. Kokhanovsky A.A. *Meas. Sci. Technol.*, **13**, 233 (2002).
3. Kokhanovsky A.A. *Light Scattering Media Pptics: Problems and*

- Solutions* (Berlin: Springer, 2004).
4. Klose A.D., Hielscher A.H. *Med. Phys.*, **26**, 1698 (1999).
  5. Yodh A., Chance B. *Phys. Today*, **48**, 34 (1995).
  6. Arridge S.R. *Inverse Problems*, **15**, R41 (1999).
  7. Arridge S.R., Cope M., Delpy D.T. *Phys. Med. Biol.*, **37**, 1531 (1992).
  8. Contini D., Martelli F., Zaccanti G. *Appl. Opt.*, **36**, 4587 (1997).
  9. Feng S., Zeng F., Chance B. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **1888**, 78 (1993).
  10. Zaccanti G. *Appl. Opt.*, **30**, 2031 (1991).
  11. Martelli F., Contini D., Taddeucci A., Zaccanti G. *Appl. Opt.*, **36**, 4600 (1997).
  12. Gordon R., Bender R., Herman G.T. *J. Theor. Biol.*, **29**, 471 (1970).
  13. Ценсор Я. *Труды ИИЭР*, **71** (3), 148 (1983).
  14. Луитт Р.М. *Труды ИИЭР*, **71**(3), 125 (1983).
  15. Grable R.I. *US Patent 5692511* (1997).
  16. Colak S.B., Papaioannou D.G., Hooft W.G., van der Mark M.B., Schomberg H., Paasschens J.C.J., Melissen J.B.M., van Asten N.A.A. *J. Appl. Opt.*, **36**, 180 (1997).
  17. Lyubimov V.V. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2769**, 107 (1995).
  18. Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **80**, 687 (1996).
  19. Волконский В.Б., Кравченко О.В., Любимов В.В., Миронов Е.П., Мурзин А.Г. *Оптика и спектроскопия*, **86**, 299 (1999).
  20. Кравченко О.В., Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 670 (2000).
  21. Кравченко О.В., Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **89**, 119 (2000).
  22. Lyubimov V.V., Kalintsev A.G., Kononov A.B., Lyamtsev O.V., Kravtseyuk O.V., Murzin A.G., Golubkina O.V., Mordvinov G.B., Soms L.N., Yavorskaya L.M. *Phys. Med. Biol.*, **47**, 2109 (2002).
  23. Golubkina O.V., Kalintsev A.G., Kononov A.B., Kravtseyuk O.V., Lyamtsev O.V., Lyubimov V.V., Mordvinov G.B., Murzin A.G., Soms L.N., Tokareva N.O., Yavorskaya L.M. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4431**, 275 (2001).
  24. Kononov A.B., Lyubimov V.V., Kutuzov I.I., Kravtseyuk O.V., Murzin A.G., Mordvinov G.B., Soms L.N., Yavorskaya L.M. *J. Electron. Imaging*, **12**, 602 (2003).
  25. Любимов В.В., Коновалов А.Б., Кутузов И.И., Кравченко О.В., Калинин А.Г., Мурзин А.Г., Голубкина О.В., Сомс Л.Н., Яворская Л.М. *Оптич. журн.*, **70** (10), 37 (2003).
  26. Калинин А.Г., Калинин А.Н., Кравченко О.В., Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **99**, 162 (2002).
  27. Kononov A.B., Mogilenskikh D.V., Lyubimov V.V. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **5859**, 585918 (2005).
  28. Tessoroff J. *Phys. Rev. A*, **35**, 872 (1987).
  29. Perelman L.T., Wu J., Wang Y., Itzkan I., Dasari R.R., Feld M.S. *Phys. Rev. E*, **51**, 6134 (1995).
  30. Perelman L.T., Wu J., Itzkan I., Feld M.S. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1341 (1994).
  31. Niziachristos V., Yodh A.G., Schnall M., Chance B. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **97**, 2767 (2000).
  32. Intes X., Niziachristos V., Culver J.P., Yodh A.G., Chance B. *Phys. Med. Biol.*, **47** (1), (2002).
  33. Culver J.P., Choe R., Holbake M.J., Zubkov L., Durduran T., Slemple A., Niziachristos V., Chance B., Yodh A.G. *Med. Phys.*, **30**, 235 (2003).
  34. Zhang Q., Brukilacchio T.J., Li A., Stott J., Chaves T., Hillman E., Wu T., Chorlton M., Rafferty E., Moore R.H., Kopans D.B., Boas D.A. *J. Biomed. Opt.*, **10**, 024024 (2005).
  35. Kazantsev I.G., Pickalov V.V. *Signal Processing*, **78**, 117 (1999).
  36. Kononov A.B., Kiselev A.N., Vlasov V.V. *Pattern Recognition and Image Analysis*, **16**, 249 (2006).
  37. Nagy J.G., Palmer K., Perrone L. *Numerical Algorithms*, **36**, 73 (2004).
  38. Hanke M., Nagy J.G. *Inverse Problems*, **12**, 157 (1996).
  39. Ng M.K., Chan R.H., Tang W.-C. *SIAM J. Sci. Comput.*, **21**, 851 (1999).
  40. Kaufman L. *IEEE Trans. Med. Imag.*, **12**, 200 (1993).
  41. Paige C.C., Saunders M.A. *ACM Trans. Math. Softw.*, **8**, 43 (1982).
  42. Björck A. *Numerical Methods for Least Squares Problems* (Philadelphia, PA: SIAM, 1996).