

Распространение фемтосекундного импульса в рассеивающей среде: теоретический анализ и численное моделирование

Е.А.Сергеева, М.Ю.Кириллин, А.В.Приезжев

Проведено детальное исследование временного профиля фемтосекундного импульса при его распространении в средах с высокой анизотропией рассеяния ($g \geq 0.9$). Для аналитического изучения структуры импульса рассеянного излучения предложен итерационный метод, основанный на разложении светового поля в ряд по кратностям рассеяния фотонов с выделением многократно рассеянной компоненты. Малоугловое приближение теории переноса излучения, использованное для расчета малых кратностей рассеяния, модифицировано с учетом разброса фотонов по временам запаздывания. Результаты теоретического расчета формы рассеянного сверхкороткого импульса хорошо согласуются с данными моделирования методом Монте-Карло. Показано, что в рассеивающей среде профиль импульса зависит от формы фазовой функции рассеяния при сохранении значения фактора анизотропии. Выполнен сравнительный анализ вкладов различных кратностей рассеяния в структуру импульса в зависимости от оптических свойств рассеивающей среды.

Ключевые слова: фемтосекундный импульс, многократное рассеяние света, теория переноса излучения, малоугловое приближение, численное моделирование, метод Монте-Карло.

1. Введение

Исследование распространения фемтосекундных импульсов в рассеивающей среде приобрело в настоящее время актуальность в связи с развитием оптических методов диагностики биологических тканей с субмикронным разрешением. Современные компактные источники фемтосекундного импульсного излучения, перестраиваемые по длине волны в видимом и ИК диапазонах спектра, используются в установках оптической когерентной томографии (ОКТ) [1–3] и многофотонной флуоресцентной микроскопии (МФМ) [2, 3]. Однако применение данных методов для детальной визуализации структуры биологической ткани на глубинах более одного миллиметра ограничено сильным расплыванием сверхкороткого импульса из-за рассеяния в среде и, как следствие, ухудшением разрешения по глубине и падением пиковой мощности импульса.

Предельная глубина импульсного зондирования с высоким разрешением зависит от оптических характеристик среды: показателя преломления среды n , коэффициентов рассеяния (μ_s) и поглощения (μ_a) и фазовой функции рассеяния $p(\theta)$, основной характеристикой которой

является средний косинус угла рассеяния, или фактор анизотропии g . Предсказание предельной глубины информативного зондирования является важной задачей, решение которой позволит выявить возможности диагностики биотканей с помощью фемтосекундного импульсного излучения и должно основываться на адекватных моделях взаимодействия импульсного излучения с рассеивающей средой.

Распространение света в оптически неоднородной среде описывается интегродифференциальным уравнением переноса излучения (УПИ) [4, 5], которое не имеет аналитического решения в общем виде. В связи с этим исследуются упрощенные формы УПИ, полученные путем различных приближений и применимые для описания асимптотических режимов эволюции оптического пучка в рассеивающей среде. Рассеяние лазерных импульсов наиболее подробно исследовано аналитически в диффузионном приближении [4, 6, 7], которое применимо при условии, что характерные глубины наблюдения в исследуемой среде превышают транспортную длину $l_{tr} = 1/(\mu'_s + \mu_a)$, где $\mu'_s = (1 - g)\mu_s$ – транспортный коэффициент рассеяния. Данное условие означает, что в области наблюдения поле излучения сформировано фотонами, многократно рассеянными на большие углы. Для широкого класса объектов биомедицинской диагностики, обладающих большим фактором анизотропии ($g \geq 0.9$), диффузное рассеяние характерно для глубин свыше нескольких миллиметров. В схемах приповерхностного наблюдения с высоким пространственным разрешением, напротив, реализован режим, в котором основной вклад в сигнал дают фотоны, распространяющиеся по так называемым змеобразным траекториям (snake photons), т. е. отклоняющиеся на малый угол при каждом акте рассеяния.

Подобный режим описывается в рамках малоуглового приближения УПИ [4,8], предполагающего, что угол

Е.А.Сергеева. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: sea@ufr.appl.sci-nnov.ru
М.Ю. Кириллин. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; адрес в настоящее время: University of Oulu, Department of Technology, Optoelectronics and Measurement Techniques Laboratory, P.O. Box 4500, 90014 University of Oulu, Oulu, Finland; e-mail: mkrillin@yandex.ru

А.В. Приезжев. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: avp2@mail.ru

Поступила в редакцию 27 июня 2006 г., после доработки – 21 сентября 2006 г.

отклонения фотона от оси пучка θ мал, так что $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$. Однако при исследовании роли малоуглового рассеяния при распространении импульсного излучения необходимо учитывать запаздывание рассеянных фотонов относительно нерассеянных в случае их отклонения от прямолинейной траектории, приводящее к искажению формы импульса. В малоугловом приближении удлинение траектории рассеянного фотона может быть учтено с помощью квадратичной добавки в разложении тригонометрических функций угла рассеяния [9–11]: $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, что приводит к значительному усложнению решения задачи. Аналитическое выражение для профиля рассеянного импульса с учетом разброса фотонов по временам запаздывания было получено в работе [12] в рамках малоуглового диффузионного приближения [4], применимого лишь при условии, что толщина рассеивающего слоя много больше длины свободного пробега фотона (определяемой как $1/(\mu_s + \mu_a)$), но не превышает транспортной длины. Первое ограничение делает данную модель неприемлемой для описания искажения профиля импульса вследствие эффектов малократного рассеяния.

Альтернативой теоретическому методу описания рассеяния излучения является численный метод статистических испытаний Монте-Карло (МК), основанный на многократном расчете случайных траекторий фотонов в исследуемой среде и на последующем обобщении полученных результатов [13, 14]. Этот метод может применяться для широкого диапазона глубин наблюдения и для произвольной пространственно-временной структуры зондирующего излучения. Моделирование методом МК часто используется при исследовании распространения коротких импульсов в рассеивающих средах [15, 16]. К недостаткам метода, ограничивающим его использование для решения обратных задач, следует отнести значительное время расчетов, определяемое толщиной среды в длинах свободного пробега и числом рассчитываемых траекторий фотонов. Однако это ограничение со временем становится все менее существенным в связи с прогрессом в компьютерной технике и ростом вычислительных ресурсов, необходимых для накопления достаточной статистики испытаний.

В настоящей работе представлены результаты аналитического исследования распространения фемтосекундного импульса в рассеивающей среде с оптическими параметрами, близкими к параметрам биологических тканей. Для описания рассеяния импульса предложена оригинальная теоретическая модель, которая учитывает эффекты малоуглового рассеяния как малой, так и большой кратности и вследствие этого может применяться в более широком диапазоне глубин рассеяния, нежели модель, основанная на малоугловом диффузионном приближении. Получены аналитические выражения для временного профиля первых двух кратностей рассеяния δ -импульса в среде с гауссовой фазовой функцией. Процесс рассеяния импульса был также исследован с помощью метода МК. На основе численных расчетов проанализирована роль вкладов различных кратностей рассеяния и баллистической компоненты в формирование рассеянного вперед импульса. Проведено сравнение результатов численного моделирования с результатами предложенной теоретической модели. Показано, что в рамках приближений, сделанных при решении задачи, теоретическая модель хорошо согласуется с результатами МК-моделирования и может применяться для описания ис-

кажения формы короткого импульса за счет малоуглового рассеяния в оптически неоднородной среде. Разработанный в работе метод приближенного решения нестационарного УПИ может быть использован для решения широкого класса задач оптики дисперсных сред, в частности атмосферной оптики и оптики водных сред.

2. Материалы и методы

2.1. Теоретическая модель распространения сверхкороткого импульса в мутной среде

Предлагаемая модель рассеяния сверхкороткого импульса основана на разложении светового поля в конечный ряд по кратностям рассеяния. Расчет вкладов отдельных кратностей рассеяния производится рекуррентным образом на основании УПИ с учетом эффектов многолучевого распространения [11]. Последний член ряда описывает источник для многократно рассеянной компоненты, которая рассчитывается в малоугловом диффузионном приближении. Данная методика была предложена в работе [17] для отыскания автомодельного решения стационарного УПИ в среде с сильноанизотропным рассеянием. Такой подход позволяет корректно описать изменение формы импульса за счет малоуглового рассеяния на глубинах менее 10 длин свободного пробега, а также формирование характерного «глубинного» временного профиля импульса в режиме многократного рассеяния.

Рассмотрим распространение в плоском слое рассеивающей среды толщиной z импульсного мононаправленного пучка с яркостью $L(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)^*$. На границе среды ($z = 0$) яркость задана выражением $L_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}, t) = WR(\mathbf{r}_\perp)\delta(\mathbf{n} - \mathbf{z}_0) \times \delta(t)$, где W – полная энергия в импульсе, функция $R(\mathbf{r}_\perp)$ определяет поперечную структуру пучка на входе в среду, а \mathbf{z}_0 – орт оси z . Единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}_\perp + n_z \mathbf{z}_0$ задает направление лучей относительно оси z . В случае преимущественного малоуглового рассеяния характерные поперечные отклонения лучей от оси z невелики ($|\mathbf{n}_\perp| \ll 1$). При этом отличие продольной проекции вектора \mathbf{n} от единицы может быть учтено с помощью соотношения $n_z \approx 1 - \mathbf{n}_\perp^2/2$. При сделанных приближениях уравнение переноса [4] для яркости $L(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp, t)$ на глубине z в среде с малоугловым рассеянием записывается в виде [8]

$$\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n}_\perp \nabla_\perp + \left(1 - \frac{\mathbf{n}_\perp^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \mu_s + \mu_a \right] L(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp, t) = \frac{\mu_s}{4\pi} \iint_{\infty} L(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}'_\perp, t) p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2 \mathbf{n}'_\perp, \quad (1)$$

где v – скорость света в среде, а остронаправленная фазовая функция рассеяния является функцией угла между направлением луча до рассеяния (\mathbf{n}') и после рассеяния (\mathbf{n}): $p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) = p(|\mathbf{n}'_\perp - \mathbf{n}_\perp|)$. Удобно воспользоваться спектральной формой УПИ:

$$\left[\frac{i\omega}{v} + \mathbf{n}_\perp \nabla_\perp + \left(1 - \frac{\mathbf{n}_\perp^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \mu_s + \mu_a \right] L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{\mu_s}{4\pi} \iint_{\infty} L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}'_\perp) p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2 \mathbf{n}'_\perp, \quad (2)$$

*В теории переноса излучения наряду с термином «яркость» используется термин «интенсивность излучения», определяемая как поток излучения через единичную площадку в единичном телесном угле [18].

где

$$L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp, t) \exp(i\omega t) dt$$

– спектральная яркость, удовлетворяющая граничному условию $L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z=0, \mathbf{n}_\perp) = WR(\mathbf{r}_\perp)\delta(\mathbf{n}_\perp)/2\pi$. Заметим, что уравнение (2) аналогично по виду стационарному УПИ в среде с эффективным показателем поглощения $\tilde{\mu}_a = \mu_a + i\omega/v$ и эффективным показателем ослабления $\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu}_a + \mu_s = \mu_t + i\omega/v$.

Искажение короткого импульса после прохождения им плоского слоя рассеивающей среды толщиной z определяется по профилю мощности сигнала рассеяния, детектируемого на просвет. Будем полагать, что регистрация выходящего из среды излучения ведется детектором с гауссовой приемной диаграммой $D(\mathbf{n}) = \exp[-(\mathbf{n} - \mathbf{z}_0)^2/\Omega_0]$, имеющей максимум в направлении оси z , и пространственной апертурой, размер которой значительно превышает характерное размытие пучка из-за рассеяния. Ширина диаграммы направленности приемника характеризуется телесным углом $\pi\Omega_0 = \int_{n_z \geq 0} D(\mathbf{n}) d\Omega_n$. Величина Ω_0 , имеющая смысл «дисперсии» приемной диаграммы, считается малой по сравнению с дисперсией угла рассеяния $\langle \gamma^2 \rangle$ ($\Omega_0 \ll \langle \gamma^2 \rangle$). Принимаемая мощность связана с яркостью излучения, выходящего из слоя среды толщиной z , соотношением

$$P^\omega(z) = \iint_{\infty} d^2\mathbf{r}_\perp \int_{n_z \geq 0} D(\mathbf{n}) L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp) d\Omega_n \\ \simeq \iint_{\infty} d^2\mathbf{r}_\perp \iint_{\infty} L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp) \exp\left(-\frac{\mathbf{n}_\perp^2}{\Omega_0}\right) d^2\mathbf{n}_\perp,$$

из которого видно, что для предложенной геометрии детектора пространственное распределение рассеянного излучения на апертуре несущественно. В этом случае удобно ввести интегральную характеристику

$$I^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \iint_{\infty} L^\omega(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp) d^2\mathbf{r}_\perp,$$

которая описывает угловую структуру рассеянного света в среде в произвольном сечении $z = \text{const}$. Мощность сигнала рассеяния, зарегистрированная детектором с телесным углом приема $\pi\Omega_0$, определяется интегралом от углового распределения излучения $I^\omega(z, \mathbf{n}_\perp)$ с учетом диаграммы приема:

$$P^\omega(z) = \iint_{\infty} I^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) \exp\left(-\frac{\mathbf{n}_\perp^2}{\Omega_0}\right) d^2\mathbf{n}_\perp. \quad (3)$$

Временной профиль импульса рассеянного излучения может быть восстановлен путем обратного фурье-преобразования спектральной мощности:

$$P(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P^\omega(z) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (4)$$

Угловое распределение рассеянного света может быть получено из стационарного УПИ с эффективным показателем ослабления, учитывающего эффекты многолучевого распространения света и не содержащего зависимости от поперечных координат:

$$\left[\left(1 - \frac{\mathbf{n}_\perp^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} + \tilde{\mu}_t \right] I^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) \\ = \frac{\mu_s}{4\pi} \iint_{\infty} I^\omega(z, \mathbf{n}'_\perp) p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2\mathbf{n}'_\perp. \quad (5)$$

В корпускулярной трактовке уравнение (5) описывает изменение функции распределения фотонов по координатам и направлениям распространения за счет поглощения и рассеяния [19], а функция $p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp)$ имеет смысл плотности распределения вероятности рассеяния фотона из направления \mathbf{n}' в направление \mathbf{n} . При этом множитель $(1 - \mathbf{n}_\perp^2/2)$ перед производной по продольной координате обуславливает эффект размытия импульса из-за многолучевого распространения света (multipath effect) [20]. Решение уравнения (5) можно представить в виде суммы бесконечного ряда по степеням безразмерного параметра $A = \mu_s/\mu_t$ (ряд Неймана), что соответствует разложению по кратностям рассеяния излучения [21]. В настоящей работе мы будем искать распределение $I^\omega(z, \mathbf{n}_\perp)$ в виде суммы конечного ряда по кратностям рассеяния, отнеся все более высокие порядки рассеяния к многократно рассеянной («диффузной») компоненте [17]:

$$I^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = I_b^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) + \sum_{i=1}^N I_i^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) + I_d^\omega(z, \mathbf{n}_\perp). \quad (6)$$

Здесь I_b^ω – яркость нерассеянного излучения (которое формируется баллистическими фотонами и известно как первое приближение теории многократного рассеяния); I_i^ω – яркость i -кратно рассеянного света; I_d^ω – яркость света, многократно рассеянного на малый угол. Яркость нерассеянного излучения может быть найдена из закона Бугера с учетом граничного условия

$$I_b^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{W \exp(-\tilde{\mu}_t z)}{2\pi} \delta(\mathbf{n}_\perp),$$

что приводит к очевидной формуле для мощности нерассеянной компоненты импульса:

$$P_b(t) = \frac{v}{z} W \exp(-\mu_t z) \delta\left(\frac{vt}{z} - 1\right). \quad (7)$$

Угловое распределение излучения i -й кратности рассеяния ($i = 1, \dots, N$) удовлетворяет укороченному уравнению переноса с нулевым граничным условием и с источником в правой части, формируемым $(i-1)$ -й компонентой рассеянного излучения:

$$\left[\left(1 - \frac{\mathbf{n}_\perp^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} + \tilde{\mu}_t \right] I_i^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = Q_i^\omega(z, \mathbf{n}_\perp), \quad (8)$$

$$Q_i^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{\mu_s}{4\pi} \iint_{\infty} I_{i-1}^\omega(z, \mathbf{n}'_\perp) p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2\mathbf{n}'_\perp.$$

Данные соотношения позволяют получить выражение для любой кратности рассеяния в малоугловом приближении с помощью итерационной формулы путем интегрирования плотности источников вдоль трассы распространения длиной $\xi_0 = z/n_z \simeq z(1 + \mathbf{n}_\perp^2/2)$:

$$I_i^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \int_0^{\xi_0} \exp(-\tilde{\mu}_t \xi) Q_i^\omega(z - n_z \xi, \mathbf{n}_\perp) d\xi \quad (i = 1, \dots, N). \quad (9)$$

Последнее слагаемое суммы (6) – многократно рассеянная компонента I_d^ω – может быть найдено из УПИ с распределенным источником, плотность которого определяется яркостью света, испытавшего N актов малоуглового рассеяния. Для расчета I_d^ω воспользуемся УПИ в малоугловом диффузионном приближении [4], справедливым при условии, что дисперсия углового распределения яркости велика по сравнению с $\langle \gamma^2 \rangle$:

$$\left[\left(1 - \frac{n_\perp^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \tilde{\mu}_a - \frac{1}{4} \mu_s \langle \gamma^2 \rangle \Delta_{n_\perp} \right] I_d^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = Q_d^\omega(z, \mathbf{n}_\perp), \quad (10)$$

$$Q_d^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{\mu_s}{4\pi} \iint_{\infty} I_N^\omega(z, \mathbf{n}'_\perp) p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2 \mathbf{n}'_\perp. \quad (11)$$

Методика решения УПИ в малоугловом диффузионном приближении с источником, распределенным по глубине, изложена в работе [22] и сводится к следующему. Если источник имеет гауссову структуру,

$$Q_d^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{P_s^\omega}{\pi \Omega_s^\omega} \exp\left(-\frac{\mathbf{n}_\perp^2}{\Omega_s^\omega}\right), \quad (12)$$

а его мощность P_s^ω и угловая диаграмма $\pi \Omega_s^\omega$ являются функциями толщины среды z , то зарегистрированная мощность многократно рассеянного излучения P_d^ω может быть представлена в виде одномерного интеграла:

$$P_d^\omega = \Omega_0 \int_0^z P_s^\omega(z - z') \exp(-\tilde{\mu}_a z) dz' \times \left\{ [\Omega_s^\omega(z - z') + \Omega_0] \cosh(\tilde{\beta} z') + \left[\frac{2\tilde{\beta}}{\tilde{\mu}_a} + \frac{\tilde{\mu}_a \Omega_0 \Omega_s^\omega(z - z')}{2\tilde{\beta}} \right] \sinh(\tilde{\beta} z') \right\}^{-1}, \quad (13)$$

где $\tilde{\beta} = (\tilde{\mu}_a \mu_s \langle \gamma^2 \rangle / 2)^{1/2}$.

Итерационная процедура (8) дает возможность получить аналитические выражения для вкладов первых кратностей рассеяния в случае, когда фазовая функция имеет удобный для интегрирования вид. Наиболее простой формой малоугловой фазовой функции, дающей аналитическое решение, является гауссово распределение с дисперсией $\langle \gamma^2 \rangle$ [4]:

$$p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) = \frac{4}{\langle \gamma^2 \rangle} \exp\left[-\frac{(\mathbf{n}_\perp - \mathbf{n}'_\perp)^2}{\langle \gamma^2 \rangle}\right]. \quad (14)$$

С помощью данной функции, удовлетворяющей условию нормировки

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\infty} p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2 \mathbf{n}_\perp = 1,$$

временные распределения однократно и двукратно рассеянных фотонов представляются в виде табличных интегралов. С учетом соотношений (3) и (4) временные профили мощности излучения первых двух кратностей рассеяния (как функций относительного запаздывания $\tau = vt/z - 1$) имеют следующий вид:

$$P_1(\tau) = \frac{2v}{z} \frac{\mu_s z}{\langle \gamma^2 \rangle} W \exp[-\mu_t z(1 + \tau)] \times \int_{2\tau[(\Omega_0 + \langle \gamma^2 \rangle) / \Omega_0 \langle \gamma^2 \rangle]}^{\infty} \frac{\exp(-x)}{x} dx, \quad (15)$$

$$P_2(\tau) \simeq \frac{2v}{z} \left(\frac{\mu_s z}{\langle \gamma^2 \rangle} \right)^2 W \Omega_0 \exp[-\mu_t z(1 + \tau)] \times \int_{4\tau/\langle \gamma^2 \rangle}^{\infty} \frac{\exp(-x)}{x^2} \left(x - \frac{4\tau}{\langle \gamma^2 \rangle} \right) dx. \quad (16)$$

Типичный результат расчета временных профилей баллистической компоненты, а также компонент однократно, двукратно и многократно рассеянного излучения приведен на рис. 1. Видно, что однократно рассеянные фотоны, зарегистрированные приемником с узкой приемной диаграммой, не дают существенного вклада в искажение δ -импульса, поскольку при рассеянии слабо отклоняются от прямолинейной траектории. В то же время фотоны, изменившие направление движения дважды, могут приобретать значительные запаздывания относительно нерассеянных фотонов, что проявляется в удлинении заднего фронта импульса. Влияние двукратно рассеянных фотонов на форму импульса наиболее значимо, когда толщина слоя составляет примерно две длины свободного пробега фотона в среде. С увеличением толщины слоя на искажении временного профиля будут сказываться более высокие порядки рассеяния. Их аналитический расчет довольно трудоемок, а решение представляется в виде многократных интегралов. Поэтому для дальнейших расчетов мы ограничим ряд в выражении (6) двумя членами и будем считать, что структура рассеянного импульса определяется четырьмя слагаемыми: $I^\omega = I_b^\omega + I_1^\omega + I_2^\omega + I_d^\omega$. В этом случае мощность импульса может быть рассчитана по формуле

$$P = P_b + P_1 + P_2 + P_d. \quad (17)$$

В данном приближении к «диффузным» относятся фотоны, рассеянные более двух раз, а источником «диффузной» компоненты являются двукратно рассеянные фотоны:

$$Q_d^\omega(z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{\mu_s}{4\pi} \iint_{\infty} I_2^\omega(z, \mathbf{n}'_\perp) p(\mathbf{n}'_\perp, \mathbf{n}_\perp) d^2 \mathbf{n}'_\perp = 2 \left(\frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle} \right)^3 \frac{W \tilde{\mu}_t \exp(-\tilde{\mu}_t z)}{\pi^2} \int_0^{\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle z / 2} d\xi \times$$

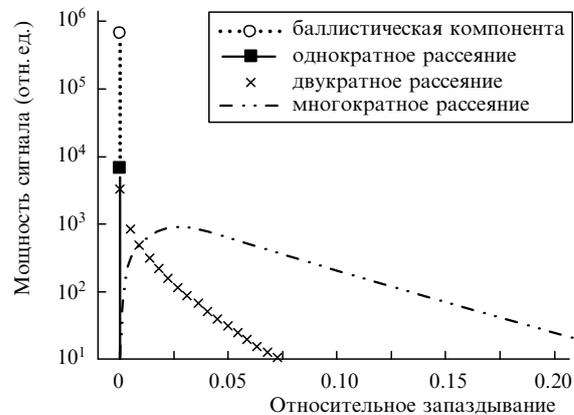


Рис. 1. Типичные аналитические распределения по временам относительного запаздывания $\tau = vt/z - 1$ фотонов различных кратностей рассеяния после прохождения δ -импульса, прошедшего через слой непоглощающей среды толщиной $\mu_s z = 10$ с гауссовой фазовой функцией ($\langle \gamma^2 \rangle = 0.2$).

$$\times \int_0^{\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle (z-\xi)/2} \exp \left[-\frac{\mu_s^2}{\langle \gamma^2 \rangle} \frac{(\xi+1)(\eta+2)-1}{(\xi+2)(\eta+2)-1} \right] \times [(\xi+2)(\eta+2)-1]^{-1} d\eta. \quad (18)$$

Данное соотношение не поддается дальнейшему аналитическому упрощению, но численный расчет показывает, что оно может быть аппроксимировано гауссовой формулой вида (12), для которой характеристики P_s^ω и Ω_s^ω вычисляются как нулевой и второй моменты углового распределения (18) соответственно. Формулы для моментов представляются в виде однократных интегралов; ниже приведены аналитические аппроксимации этих выражений, которые были использованы для расчета профиля «диффузной» компоненты импульса:

$$P_s^\omega(z) \simeq \frac{2W\mu_s^3 \exp(-\tilde{\mu}_t z)}{\pi \langle \gamma^2 \rangle^2 \tilde{\mu}_t^2} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle z}{8} + 1 \right) \ln (\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle z + 1), \quad (19)$$

$$\Omega_s^\omega(z) \simeq \langle \gamma^2 \rangle \frac{\ln (\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle z + 1)}{\ln (\tilde{\mu}_t \langle \gamma^2 \rangle z / 3 + 1)}.$$

Подстановка (19) в (13) и (4) с учетом замены $\tilde{\mu}_a = \mu_a + i\omega/v$ и $\tilde{\mu}_t = \mu_t + i\omega/v$ и приводит к искомому выражению для временного распределения многократно рассеянных фотонов.

2.2. Моделирование структуры рассеянного импульса методом Монте-Карло

2.2.1. Схема численного эксперимента. Как уже отмечалось выше, метод Монте-Карло основывается на многократном расчете случайных блужданий фотонов в случайно-неоднородной среде. Траектории фотонов моделируются исходя из входных параметров среды μ_a , μ_s , фазовой функции рассеяния неоднородностей, а также из геометрии исследуемой среды, падающего пучка и детектора. Одним из преимуществ метода численного моделирования траекторий фотона в рассеивающей среде является возможность разделения детектируемых фотонов по кратностям рассеяния, что практически невозможно реализовать экспериментально [23]. Это позволяет не только провести сравнение аналитически полученного распределения фотонов по временам пробега в среде с результатами МК-моделирования, но и сопоставить вклады каждой из рассматриваемых кратностей рассеяния.

В настоящей работе проведено моделирование распространения в слое рассеивающей среды толщиной 1 мм импульса гауссовой формы длительностью 50 фс (определенной по уровню 1/e). При моделировании был использован алгоритм Монте-Карло, развитый и апробированный ранее в работах [24, 25], со статистикой 50 млн фотонов. Для соответствия условий численного эксперимента предположениям теоретической модели считалось, что пучок падает на границу среды перпендикулярно поверхности исследуемого слоя. Протяженный приемник располагается на дальней границе среды и регистрирует выходящие из слоя фотоны, направление которых составляет с нормалью к границе среды угол не более одного градуса (что соответствует значению $\Omega_0 = 3 \times 10^{-4}$). В зависимости от оптических параметров среды один расчет занимал от 4 до 10 ч машинного времени на компьютере с процессором Pentium 4 с тактовой частотой 2.4 ГГц. Разрешение по времени составляло 10 фс, что было

обусловлено оптимальным соотношением гладкости получаемых кривых и необходимого времени счета.

2.2.2. Параметры модельных сред. Оптические свойства модельной среды выбирались в соответствии с характерными параметрами биологических сред и их фантомов в диапазоне длин волн 800–1300 нм. В данном спектральном диапазоне оптические характеристики довольно слабо зависят от длины волны, поэтому нами не рассматривались эффекты дисперсии при распространении фемтосекундного импульса, обладающего достаточно широким спектром. Кроме того, мы пренебрегли влиянием поглощения на изменение формы импульса, поскольку выбранный спектральный диапазон соответствует окну прозрачности биологических сред, где рассеяние значительно превышает поглощение.

МК-моделирование рассеяния импульса и соответствующий теоретический расчет проводились при трех значениях коэффициента рассеяния, $\mu_s = 5, 10$ и 20 мм^{-1} , для каждого из которых задавалось два значения фактора анизотропии – $g = 0.9$ и 0.98 . Парно комбинируя данные параметры, мы имели возможность моделировать различные режимы рассеяния: от «квазибаллистического», где основную роль играют малые кратности рассеяния, до «квазидиффузного», где основной вклад дают многократно рассеянные на малый угол фотоны. Для значений фактора анизотропии, близких к единице, дисперсия угла рассеяния $\langle \gamma^2 \rangle$ может быть выражена через величину g с помощью формулы $g \simeq 1 - \langle \gamma^2 \rangle / 2$. При выбранных значениях фактора анизотропии 0.9 и 0.98 дисперсия угла рассеяния составляла 0.2 и 0.04 соответственно. Телесный угол приема задавался с таким расчетом, чтобы выполнялось условие $\Omega_0 \ll \langle \gamma^2 \rangle$.

Важно отметить, что на искажение профиля импульса влияет не только величина g , но и сама форма фазовой функции рассеяния. Для демонстрации этого факта мы рассмотрели два вида фазовых функций, различающихся по форме, но соответствующих одному и тому же фактору анизотропии. Первый вид – гауссова фазовая функция (14), для которой дисперсия случайного угла рассеяния однозначно определяется по значению g [7]. Такая функция позволяет рассчитать структуру рассеянного импульса аналитически и провести сравнение с МК-моделированием. Недостаток этой функции заключается в том, что расчет с ее использованием дает крайне слабое рассеяние света в заднюю полусферу, поэтому для описания рассеяния в реальных средах фазовую функцию иногда аппроксимируют суммой гауссовой функции и константы [26]. Однако в приближении малоуглового рассеяния и для выбранных значений фактора анизотропии вклад гауссовой компоненты в полную фазовую функцию является определяющим. Вторым видом является фазовая функция Хеньи – Гринштейна, широко используемая при моделировании распространения света в биотканях методом Монте-Карло [1]:

$$p(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}.$$

Описанные фазовые функции в интервале углов рассеяния $0 - 90^\circ$ представлены на рис.2 (функции нормированы на интеграл по полному телесному углу). Видно, что при одном и том же факторе анизотропии фазовая функция Хеньи – Гринштейна более вытянута вперед, чем гауссова фазовая функция, что сказывается на характе-

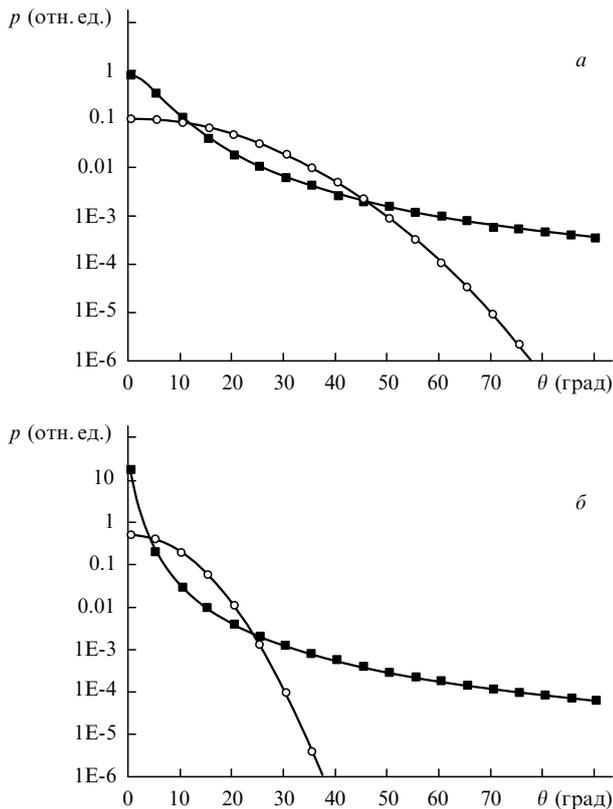


Рис.2. Фазовые функции рассеяния $p(\theta)$ – Хеньи–Гринштейна (■) и гауссова (○) с фактором анизотропии 0.9 (а) и 0.98 (б).

ре группового запаздывания сигнала. К сожалению, использование функции Хеньи–Гринштейна делает невозможным аналитическое решение итерационной задачи о расчете вкладов первых кратностей рассеяния по формулам (8). Поэтому для этой фазовой функции сопоставление результатов теории и моделирования не проводилось.

3. Результаты и обсуждение

Для верификации разработанной аналитической модели рассеяния импульса и определения области ее применения было проведено сравнение результатов теоретического расчета и МК-моделирования профиля импульса с начальной длительностью 50 фс, рассеянного слоем среды толщиной 1 мм и зарегистрированного протяженным детектором с диаграммой $\pi\Omega_0 = 9.7 \times 10^{-3}$ ср. Вклады в импульс баллистической компоненты, первых двух кратностей рассеяния, а также многократного рассеяния были рассчитаны с помощью соотношений (7), (13), (15), (16) и (19) для гауссовой фазовой функции (14). Параллельно для тех же параметров среды было выполнено МК-моделирование. Нормировка полученных из расчета и моделирования данных проводилась по согласованию энергий, запасенных в баллистических компонентах.

Для удобства изложения сначала приведем результаты МК-моделирования.

3.1. Влияние оптических параметров на форму рассеянного импульса: моделирование методом Монте-Карло

Структура рассеянного импульса определяется вкладами фотонов, испытавших разное количество актов рас-

сеяния. В свою очередь среди фотонов, рассеянных определенное число раз, существует разброс по временам запаздывания. Соотношение вкладов различных кратностей в детектируемый сигнал, равно как и распределение фотонов по пробегам в пределах одной кратности, существенно зависит от характеристик единичного акта рассеяния – вида фазовой функции и коэффициента рассеяния. Чтобы продемонстрировать это, мы провели МК-моделирование профиля импульса с начальной длительностью 50 фс, рассеянного вперед слоем среды толщиной 1 мм, и исследовали распределение времен прихода одно-, двух- и трехкратно, а также многократно (т. е. более трех раз) рассеянных фотонов. Было изучено влияние следующих факторов: 1) степени анизотропии фазовой функции заданной формы при сохранении коэффициента рассеяния; 2) коэффициента рассеяния среды при заданной фазовой функции; 3) формы фазовой функции при неизменных значениях фактора анизотропии и коэффициента рассеяния.

Результаты расчета профиля импульса приведены на рис.3–5. В качестве аргумента на всех рисунках выбрано время прихода фотонов на детектор (в пикосекундах), отсчитываемое от момента входа в среду максимума исходного импульса. На рис.3 представлены временные распределения фотонов с различными кратностями рассеяния для среды с фазовой функцией Хеньи–Гринштейна, имеющей фактор анизотропии $g = 0.98$ и 0.9 , и с коэффициентом рассеяния $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$. Детектирование

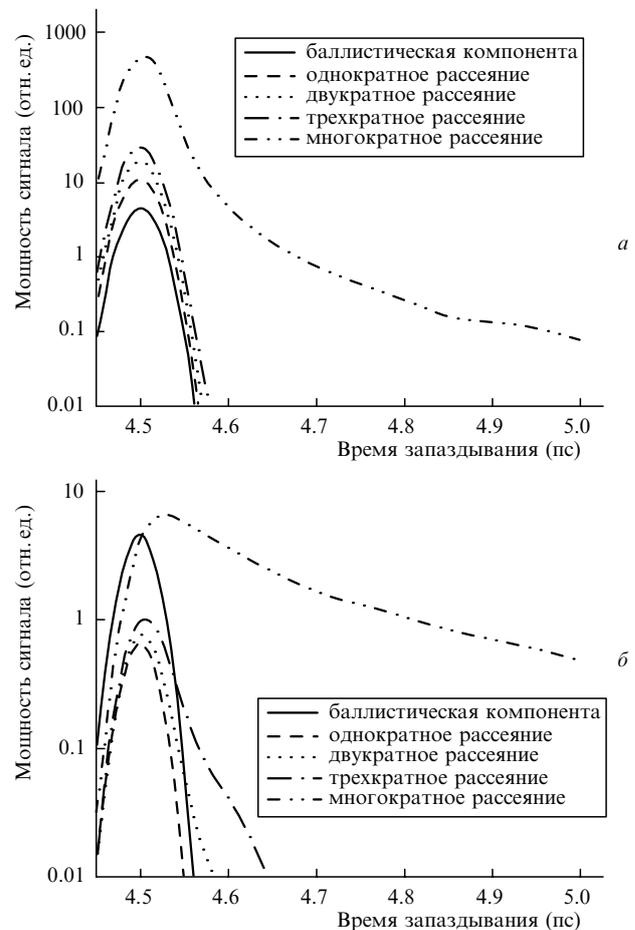


Рис.3. Вклады фотонов различных кратностей рассеяния в прошедший импульс для среды с $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$ и фазовой функцией Хеньи–Гринштейна при $g = 0.98$ (а) и 0.9 (б).

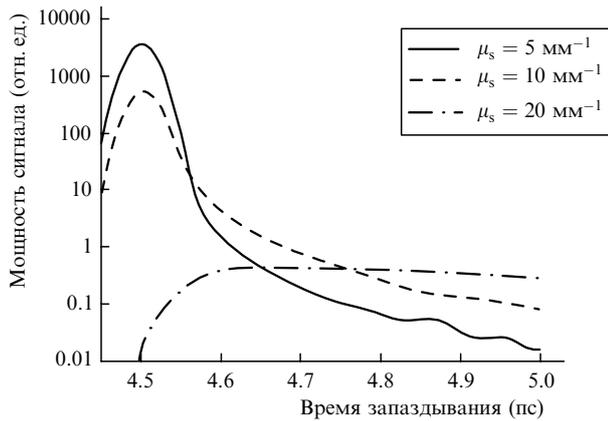


Рис.4. Форма импульса, прошедшего через рассеивающую среду (фазовая функция Хеньи – Гринштейна, $g = 0.98$) для различных значений коэффициента рассеяния μ_s .

ведется приемником с узкой угловой диаграммой. Очевидно, что абсолютный вклад баллистической компоненты в импульс одинаков для обоих значений g , поскольку ее интенсивность зависит только от коэффициента рассеяния, а не от фактора анизотропии среды. Однако относительный вклад баллистической компоненты оказывается большим в случае $g = 0.9$, поскольку при меньших g фазовая функция менее вытянута вперед и большая часть рассеянных фотонов «отфильтровывается» малым углом детектирования. Для случая $g = 0.98$, характеризующего меньшими отклонениями фотонов при рассеянии, вклад малых кратностей рассеяния превышает вклад баллистической компоненты (при заданном коэффициенте рассеяния). Меньший фактор анизотропии приводит к более значительным отклонениям фотонов, что проявляется в формировании медленно спадающего заднего фронта импульса, обусловленного большими временами задержки рассеянных фотонов.

Рис.4 иллюстрирует влияние коэффициента рассеяния на форму импульса. Приведены временные профили импульса для трех различных значений коэффициента рассеяния среды с фазовой функцией Хеньи – Гринштейна и фактором анизотропии 0.98. С увеличением коэффициента рассеяния баллистическая компонента, формирующая передний пик мощности с максимумом при задержке 4.5 пс, ослабляется, а ее энергия передается рассеянным фотонам. В результате многократного рассеяния, формирующего сигнал в области больших задержек, уровень заднего фронта импульса возрастает. При $\mu_s = 20 \text{ мм}^{-1}$ максимум мощности смещается в сторону больших запаздываний, что говорит о значительном преобладании в сигнале многократно рассеянных фотонов.

Интегральные вклады в импульс всех рассматриваемых компонент для различных значений коэффициента рассеяния и фактора анизотропии, рассчитанные для среды с фазовой функцией Хеньи – Гринштейна, представлены на рис.5. Видно, что с увеличением коэффициента рассеяния для обоих значений фактора анизотропии снижается доля баллистических фотонов и фотонов меньших кратностей с одновременным увеличением доли фотонов кратностей рассеяния более высоких порядков. Это объясняется увеличением среднего количества актов рассеяния, испытываемых фотоном при прохождении через слой. Кроме того, при любом заданном значении μ_s доля баллистических фотонов для меньшего фактора анизотропии ($g = 0.9$) превышает долю баллистических фо-

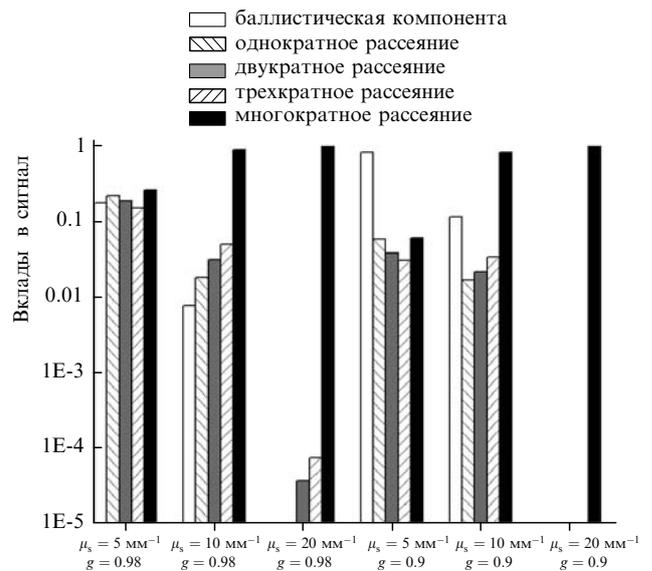


Рис.5. Относительные вклады фотонов различных кратностей рассеяния в импульс, рассеянный вперед, для различных оптических параметров среды.

тонов для большего значения g . Это, как уже было замечено, является особенностью геометрии задачи и связано с высокой угловой селективностью детектора.

О влиянии формы фазовой функции рассеяния на временную структуру импульса можно судить на основании результатов, представленных на рис.6. На нем приведены профили импульса для сред с фазовыми функциями разных типов и $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$, $g = 0.9$. При указанных параметрах рассеяния толщина среды равна одной транспортной длине, так что световое поле вблизи приемника формируется в основном диффузно рассеянными фотонами. Из рис.6 видно, что форма фазовой функции является определяющей для структуры рассеянного импульса, даже если фактор анизотропии остается постоянным. Для среды с фазовой функцией Хеньи – Гринштейна основная энергия рассеянного импульса содержится в баллистических фотонах и фотонах, приходящих на детектор с малой задержкой (поскольку пик импульса соответствует времени прихода фотонов баллистической компоненты с погрешностью порядка временного разрешения детектора, равного 10 фс), но при этом не обязательно являющихся фотонами малых кратностей рассеяния. В то же время для среды с гауссовой функцией рас-

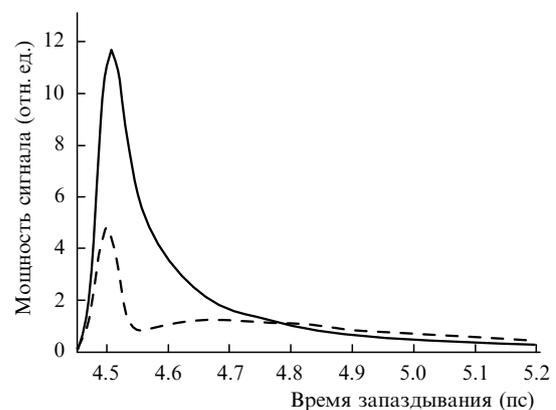


Рис.6. Формы импульса на выходе из среды ($\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$, $g = 0.9$) для фазовой функции Хеньи – Гринштейна (сплошная кривая) и гауссовой фазовой функции (штриховая кривая).

сеяния импульс разделяется на две четко различимые фракции, первая из которых содержит, в основном, баллистические фотоны, а вторая формируется многократно рассеянными фотонами, обладающими значительными задержками по сравнению с шириной исходного импульса. Такое различие профилей рассеянного импульса определяется степенью вытянутости вперед функции рассеяния, т. е. соотношением между вероятностями рассеяния фотона вблизи нулевого направления и рассеянием на углы, превышающие средний угол. При заданном факторе анизотропии для фазовой функции Хеньи – Гринштейна внутри конуса с углом раствора 10° рассеивается 50 % света, в то время как для гауссовой функции – около 14 %. Это сказывается на средних временах задержки фотонов, формирующих задний фронт импульса, и на появлении провала между фракциями в профиле импульса, распространяющегося в среде с гауссовой функцией рассеяния.

3.2. Сравнение теоретического и численного расчетов структуры рассеянного импульса

В аналитических расчетах форма рассеянного импульса с начальной длительностью 50 фс определяется временной сверткой гауссового профиля падающего импульса с заданной энергией и функций P_b, P_1, P_2 и P_d , которые определяют вклады соответствующих компонент рассеяния входного δ -импульса, обладающего единичной энергией $W = 1$. Результаты сравнения структур рассеянного импульса, рассчитанных на основе разработанной аналитической модели и МК-метода для двух значений фактора анизотропии гауссовой фазовой функции, представлены на рис.7.

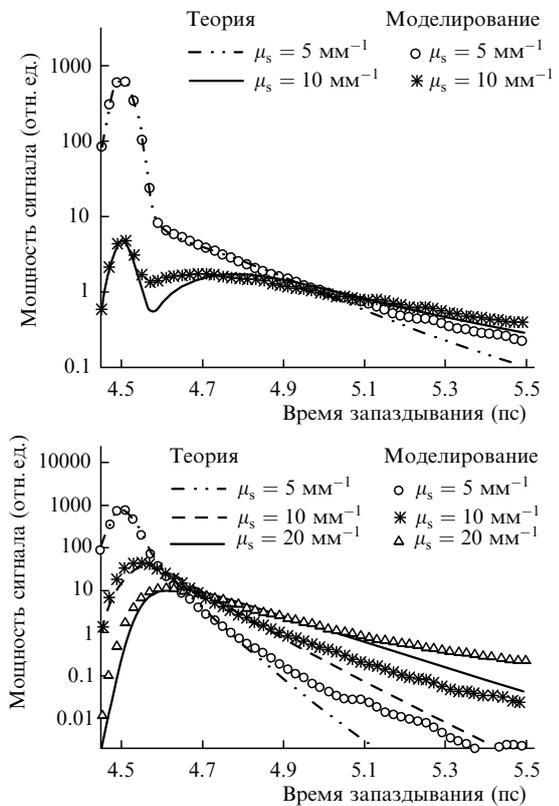


Рис.7. Профили импульса после прохождения через рассеивающую среду, рассчитанные с помощью теоретического и численного методов для фактора анизотропии гауссовой фазовой функции $g = 0.9$ (а) и 0.98 (б).

Из рисунка видно, что в целом теоретическая модель адекватно отражает характерные особенности рассеянного импульса и с приемлемой точностью описывает смещение максимума импульса и его уширение. Для всех предложенных комбинаций параметров рассеяния, кроме среды с $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$ и $g = 0.9$, в области небольших временных задержек модель хорошо согласуется с результатами МК-моделирования, однако при больших временах задержки теория дает заниженные значения интенсивности сигнала. Это, очевидно, связано с использованием в теоретическом подходе приближения малоуглового рассеяния, которое некорректно учитывает существенные отклонения фотонов от продольной оси, ответственные за большие запаздывания. Наибольшее различие в результатах аналитического расчета и моделирования наблюдается для среды с $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$ и $g = 0.9$: теория дает недостаточное количество рассеянных фотонов с запаздываниями порядка длительности исходного импульса. Аналогичная особенность наблюдается и на рис.8, где сравниваются вклады в рассеянный импульс двукратно рассеянных фотонов и фотонов, рассеянных свыше двух раз.

Видно, что парциальный вклад фотонов второй кратности рассеяния может быть с приемлемой точностью получен аналитически для обоих значений параметра анизотропии. Однако при использовании двукратно рассеянного излучения в качестве источника многократно рассеянных фотонов хорошее соответствие результатов теории и моделирования возможно только при довольно узкой фазовой функции рассеяния. Причина в том, что малоугловое диффузионное приближение, используемое в модели, применимо при условии $\mu_s(1 - g)z < 1$ [12], что

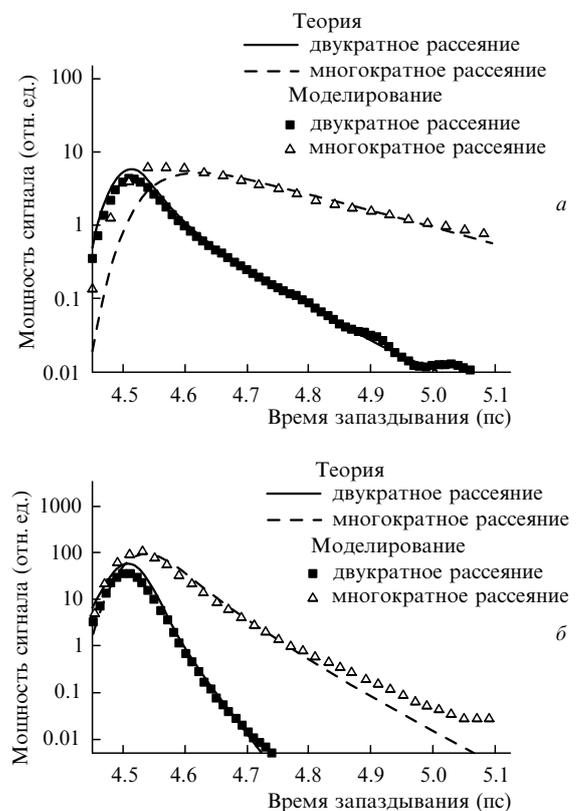


Рис.8. Сравнение вкладов фотонов различных кратностей рассеяния в импульс, прошедший через рассеивающую среду ($\mu_s = 5 \text{ мм}^{-1}$, гауссова фазовая функция, $g = 0.9$ (а) и 0.98 (б)), рассчитанных теоретически и методом Монте-Карло.

при $\mu_s = 5 \text{ мм}^{-1}$ соответствует $g \geq 0.9$, а при $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$ – $g \geq 0.95$. Как видно из рис.7, для сред с фактором анизотропии $g = 0.98$ теория хорошо согласуется с данными численного расчета при всех выбранных значениях коэффициента рассеяния. При $g = 0.9$ несоответствие результатов теории и моделирования, по всей видимости, обусловлено нарушением условия применимости малоуглового диффузионного приближения для некоторой части многократно рассеянных фотонов. Можно ожидать, что расхождение уменьшится, если в качестве источника диффузной компоненты выбрать фотоны более высокого порядка рассеяния. К сожалению, нам не удалось получить аналитическое выражение для расчета вклада фотонов с кратностью рассеяния выше второй, даже используя гауссову фазовую функцию рассеяния.

Нужно отметить, что указанное различие в результатах теории и моделирования наблюдается при толщине рассеивающего слоя порядка транспортной длины (например, для среды с $\mu_s = 10 \text{ мм}^{-1}$ и $g = 0.9$ транспортная длина $l_t = 1 \text{ мм}$), когда для решения УПИ следует использовать другие приближения. В то же время параметры всех рассмотренных сред с $g = 0.98$ соответствуют режиму многократного, но «додиффузного» рассеяния, т. е. толщины сред не превышают транспортной длины. Сравнение с МК-моделированием также демонстрирует, что предложенное аналитическое решение применимо и в режиме малократного рассеяния ($\mu_s z < 10$). Таким образом, модель, содержащая вклады баллистической компоненты, первых двух кратностей рассеяния и многократно рассеянной компоненты, может быть с успехом использована для описания рассеяния фемтосекундного импульса в более широком интервале толщин рассеивающих слоев, чем область применения малоуглового диффузионного приближения.

4. Выводы

В работе проведен теоретический и численный анализ эволюции профиля фемтосекундного лазерного импульса при его распространении в рассеивающей среде. Предложена аналитическая модель рассеяния сверхкороткого импульса, основанная на расчете вкладов фотонов различных кратностей рассеяния. Итерационное вычисление парциальных компонент импульса проводилось в рамках решения уравнения переноса излучения с учетом разброса фотонов по временам запаздывания. Для гауссовой фазовой функции рассеяния получены аналитические выражения для вкладов однократно и двукратно рассеянных фотонов при регистрации излучения протяженным приемником с узкой угловой диаграммой. Яркость многократно рассеянного излучения рассчитана в малоугловом диффузионном приближении УПИ с распределенным источником, которым является двукратно рассеянный свет. Предложенная модель применима в области параметров рассеяния, где не работают другие известные приближенные решения УПИ. Параллельно проведено МК-моделирование структуры рассеянного импульса с выделением баллистической компоненты, однократно и двукратно рассеянных фотонов, а также фотонов, рассеянных свыше двух раз. На основании численного расчета показано, что форма импульса сильно зависит от вида фазовой функции рассеяния при сохранении значения фактора анизотропии, поскольку степень

вытянутости фазовой функции определяет величину запаздывания фотонов при малоугловом отклонении. Также количественно проанализированы доли различных компонент в рассеянном импульсе в зависимости от оптических свойств среды. Для гауссовой фазовой функции выполнено сравнение профилей рассеянного импульса, полученных из теоретического расчета и моделирования методом Монте-Карло. Достигнуто хорошее соответствие теории и моделирования. Продемонстрировано, что предложенная аналитическая модель распространения фемтосекундного импульса в рассеивающей среде обладает более широкой областью применения, чем малоугловое диффузионное приближение, и может быть использована для описания как квазибаллистического, так и квазидиффузного режима рассеяния импульса в оптически-неоднородной среде.

Авторы выражают благодарность Л.С. Долину за полезные обсуждения и замечания, сделанные им при подготовке рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 04-02-17108, 04-02-16748, 06-02-17015), школы GETA (GETA Graduate School, Finland), а также при частичной поддержке грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ России № НШ 2071.2003.4 и НШ 6043.2006.2.

1. Тучин В.В. *УФН*, **167**, 517 (1997).
2. Тучин В.В. *Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях* (Саратов: изд-во СГУ, 1998).
3. *Biomedical Photonics Handbook*. Ed. by T. Vo-Dinh (Boca Raton, FL: CRC Press, 2003).
4. Исмаири А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* (М.: Мир, 1981).
5. Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A. *Multiple Scattering of Light by Particles: Radiative Transfer and Coherent Backscattering*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2006).
6. Зере Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. *Перенос изображения в рассеивающей среде* (Минск: Наука и техника, 1985).
7. Winn J.N., Perelman L.T., Chen K., Wu J., Dasari R.R., Feld M.S. *Appl. Opt.*, **37**, 8085 (1998).
8. Kokhanovsky A.A. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **30**, 2837 (1997).
9. Долин Л.С. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **9**, 61 (1966).
10. Минин И.М. *Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света* (Минск: Наука и техника, 1971).
11. Романова Л.М. *Нестационарное световое поле в мутных средах* (Минск: Наука и техника, 1971).
12. Rogozkin D.B. *Изв. АН СССР: Сер. Физ. атм. океана*, **23**, 275 (1987).
13. Wang L., Jacques S. L., Zheng L. *Computer Methods and Progr. in Biomed.*, **47**, 131 (1995).
14. Кандидов В.П. *УФН*, **166**, 1309 (1996).
15. Jacques S.L. *Appl. Opt.*, **28**, 2223 (1989).
16. Blanca C.M.Y., Saloma C. *Appl. Opt.*, **38**, 5433 (1999).
17. Долин Л.С. *ДАН СССР*, **260**, 1344 (1981).
18. Соболев В.В. *Курс теоретической астрофизики* (М.: Наука, 1967).
19. Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. *Теория переноса излучения* (М.: Наука 1983).
20. Furutsu K. *J. Math. Phys.*, **20**, 617 (1979).
21. Рыгов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Статистическая радиофизика. Ч. II. Случайные поля* (М.: Наука, 1980).
22. Долин Л.С. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **26**, 300 (1983).
23. Wang R K. *Phys. Med. Biol.*, **47**, 2281 (2002).
24. Кириллин М.Ю., Меглинский И.В., Приезжев А.В. *Квантовая электроника*, **36**, 247 (2006).
25. Kirillin M.Yu. Priezhev A.V., Tuchin V.V., Wang R.K., Myllyla R. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **38**, 2582 (2005).
26. Turchin I.V., Sergeeva E.A., Dolin L.S., Kamensky V.A. *Laser Phys.*, **13**, 1524 (2003).