

Применение функции Вигнера и матричной оптики для описания изменения формы лазерных УКИ при прохождении их через линейные оптические системы

А.В.Гитин

Преобразование формы лазерных УКИ во времени можно описать по аналогии с процессом формирования изображения в пространстве. Показано, что волновое описание процесса формирования изображения упрощается при использовании функции Вигнера, причем в квадратичном приближении это описание эквивалентно применению ABCD-матриц. Для описания преобразований лазерных УКИ при прохождении их через линейные оптические системы и для классификации этих систем использовались методы и методология матричной оптики.

Ключевые слова: ультракороткие импульсы, функция Вигнера, матричная оптика.

1. Введение

Как когда-то появление точечных источников света позволило понять «пространственный» процесс формирования изображения в оптических системах, так и появление генераторов оптических УКИ позволяет понять «временной» процесс формирования изображения в этих системах. Более того, между так называемыми пространственными и временными оптическими системами наблюдается формальная аналогия [1]: ширина сечения узконаправленного волнового пучка при прохождении оптически однородных сред и линз трансформируется точно так же, как и длительность узкополосного импульса при прохождении среды с дисперсией и фазовых модуляторов. Отмеченная аналогия позволяет рассматривать фазовые модуляторы как временные линзы, с помощью которых можно создавать временные аналоги традиционных пространственных оптических систем: временные микроскопы, телескопы, фурье-конверторы и т. д. Для описания процессов формирования изображения в таких временных системах используется математический аппарат, традиционно применяемый для описания процессов формирования изображения в пространственных оптических системах.

В настоящее время все чаще для описания процесса формирования оптического изображения в пространстве применяют функцию Вигнера (Wigner distribution function (WDF)), которая позволяет с единой точки зрения рассмотреть как волновую, так и геометрическую трактовку оптики [2, 3] и сохранить при этом основанное на дуальности представление аппарата этих теорий [4, 5]. При использовании WDF характерная для волновой оптики дуальность «модуляторы – фильтры» [6] в квадратичном приближении естественно переходит в характер-

ную для геометрической оптики дуальность «матрица преломления – матрица переноса» [7].

Цель настоящей работы – применение функции Вигнера и ее матричной аппроксимации для описания преобразования формы УКИ в оптических системах с временными линзами, т. е. для описания временных аналогов традиционных пространственных оптических систем.

2. Функция Вигнера и ее свойства

Скалярный сигнал можно описать как зависимость комплексной амплитуды U от времени t так и зависимость комплексного спектра \tilde{U} от частоты ω . Эти описания эквивалентны, т. е.

$$\tilde{U}(\omega) = F_{t \rightarrow \omega}\{U(t)\} \quad \text{и} \quad U(t) = F_{\omega \rightarrow t}^{-1}\{\tilde{U}(\omega)\}, \quad (1)$$

т. к. связаны преобразованиями Фурье

$$F_{t \rightarrow \omega}\{\dots\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\dots\} \exp(-i\omega t) dt$$

и

$$F_{\omega \rightarrow t}^{-1}\{\dots\} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\dots\} \exp(i\omega t) d\omega.$$

Для описания «квазиточечного» импульса удобно использовать временное представление $U(t)$, а для описания «квазимонохроматического» колебания – спектральное представление $\tilde{U}(\omega)$. Сигнал же общего вида целесообразнее описывать с помощью действительной функции, заданной на двумерной плоскости с координатами t, ω . Поэтому для описания и оценки параметров лазерных УКИ все чаще используют такие функции, как FROG [8], «спектрограмма» [9] или WDF [10–12]. Заметим, что использование WDF позволяет описать лазерные импульсы до и после преобразований в оптических системах и тем самым описать эти системы.

Формально функция Вигнера W определяется дуально [2, 3, 10–12], как через временное представление сигнала $U(t)$,

А.В.Гитин. Max-Born-Institut für Nichtlineare Optik und Kurzzeitspektroskopie, Max-Born-Str. 2A, 12489 Berlin, Germany; www.mbi-berlin.de, e-mail: andrey.gitin@gmx.de

Поступила в редакцию 7 июня 2005 г., после доработки – 9 декабря 2005 г.

$$W(t, \omega) \equiv F_{\Delta t \rightarrow \omega} \left\{ U \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) U^* \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\}, \quad (2)$$

так и через частотное представление сигнала $\tilde{U}(\omega)$,

$$W(t, \omega) \equiv F_{\Delta \omega \rightarrow t}^{-1} \left\{ \tilde{U} \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) \tilde{U}^* \left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) \right\}. \quad (3)$$

Функция W обладает многими полезными свойствами. При интегрировании ее по времени t и частоте ω получим энергию сигнала

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) dt d\omega,$$

при интегрировании по частоте (проекция W на координатную ось t (рис.1, δ)) – интенсивность

$$I(t) = |U(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) d\omega,$$

а при интегрировании по времени (проекция W на координатную ось ω (рис.1, ϵ)) – спектр интенсивности

$$\tilde{I}(\omega) = |\tilde{U}(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(t, \omega) dt.$$

Рассмотрим матрицы первых и вторых моментов функции W [3]:

$$\begin{aligned} E &\equiv \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} W(t, \omega) dt d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) dt d\omega \right]^{-1}, \\ D &\equiv \begin{pmatrix} \sigma_t^2 & m_{t\omega} \\ m_{\omega t} & \sigma_\omega^2 \end{pmatrix} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} (t - \bar{t})(t - \bar{t})^* & (t - \bar{t})(\omega - \bar{\omega})^* \\ (\omega - \bar{\omega})(t - \bar{t})^* & (\omega - \bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})^* \end{bmatrix} W(t, \omega) dt d\omega \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) dt d\omega \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

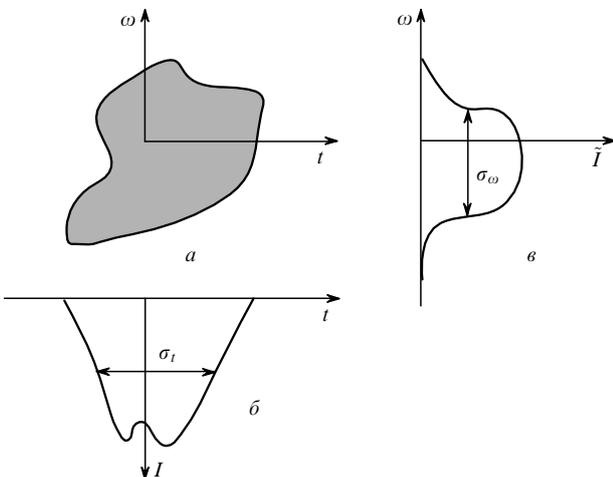


Рис.1. Функция Вигнера (а) и ее проекции на координатные оси t (δ) и ω (ϵ).

Заметим, что элементы главной диагонали матрицы вторых моментов представляют собой квадраты длительности импульса σ_t и ширины полосы частот импульса σ_ω . Импульс и его WDF называются спектрально ограниченными [13, 14], если матрица вторых моментов WDF является диагональной:

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_t^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(\sigma_t^2, \sigma_\omega^2).$$

В общем случае длительность и ширина полосы частот импульса связаны неравенством Гейзенберга

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \sqrt{\det D}.$$

В частности, спектрально ограниченным является сигнал с WDF прямоугольной формы [15, 16] (рис.2, a):

$$W_0(t - t_0, \omega - \omega_0) = \text{rect} \left(\frac{t - t_0}{\sigma_t} \right) \text{rect} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma_\omega} \right),$$

где t_0 – центральный момент времени; ω_0 – несущая частота импульса;

$$\text{rect}(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < 1/2, \\ 1/2 & \text{при } |t| = 1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > 1/2 \end{cases}$$

– прямоугольная функция.

3. Преобразование функции Вигнера в линейных системах

В работе [6] показано, что существует два дополняющих друг друга (дуальных) класса линейных систем – модуляторы и фильтры.

3.1. Модуляторы

Модулятор, т.е. линейная система, инвариантная в пространстве частот, описывается во временной области выражением [6]

$$U_M(t) = U(t)g(t), \quad (5)$$

где $g(t)$ – модуляционная функция. Если

$$g(t) = \exp[-i\psi(t)], \quad (6)$$

то формула (5) описывает фазовый модулятор.

Подставив выражение (5) для фазового модулятора в (2), получим

$$\begin{aligned} &W_M(t - t_0, \omega) \\ &\equiv F_{(t-t_0) \rightarrow \Delta \omega} \left\{ U_M \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) U_M^* \left(t - t_0 - \frac{\Delta \omega}{2} \right) \right\} \\ &= F_{(t-t_0) \rightarrow \Delta \omega} \left\{ U \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) U^* \left(t - t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right. \\ &\times \left. \exp \left[-i\psi \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) + i\psi \left(t - t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

В линейном приближении имеем

$$\begin{aligned}
 &W_M \left\{ \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega \end{pmatrix} \right\} \\
 &= F_{(t-t_0) \rightarrow \Delta\omega} \left\{ \left\langle U \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) U^* \left(t - t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\rangle \right. \\
 &\times \exp \left[-i\psi \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) + i\psi \left(t - t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \left. \right\} \\
 &\approx F_{(t-t_0) \rightarrow \Delta\omega} \left\{ \left\langle U \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) U^* \left(t - t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\rangle \right. \\
 &\times \exp \left(-i \frac{d\psi}{dt} \Delta t \right) \left. \right\}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

а воспользовавшись теоремой о сдвиге [6], получим

$$\begin{aligned}
 &W_M(t - t_0, \omega) \\
 &\approx F_{(t-t_0) \rightarrow \Delta\omega} \left\{ U \left(t - t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) U^* \left(t - t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right. \\
 &\times \exp \left(-i \frac{d\psi}{dt} \Delta t \right) \left. \right\} = W \left(t - t_0, \omega + \frac{d\psi}{dt} \right). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Отметим, что выражение (9) много проще исходного соотношения

$$U_M(t) = U(t) \exp[-i\psi(t)],$$

т. к. оно сводится к сдвигу W в частотной области на производную фазового сдвига ψ по времени. Таким образом, наличие модулятора не меняет длительности исходного спектрально ограниченного прямоугольного импульса, но увеличивает его полосу частот (рис.2,б) и создает chirпированный по частоте импульс.

Считая, что длительность импульса мала, разложим фазовую функцию $\psi(t - t_0)$ в окрестности центрального момента времени t_0 в ряд Тейлора:

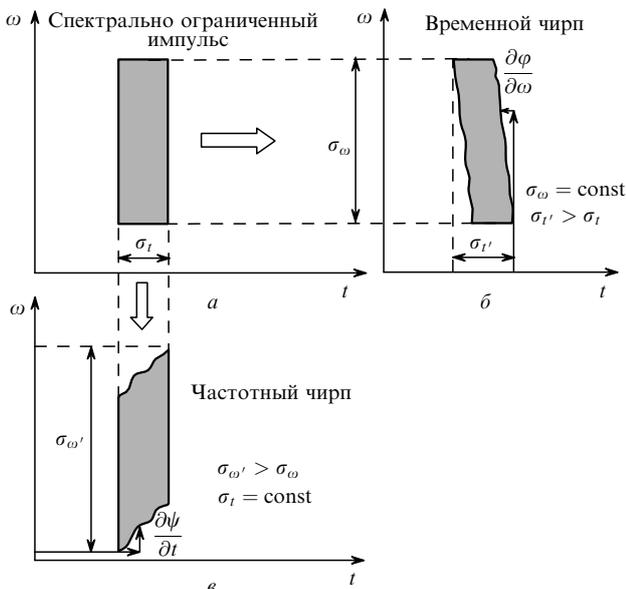


Рис.2. Преобразование прямоугольного сигнала (а) фильтром (б) и модулятором (в).

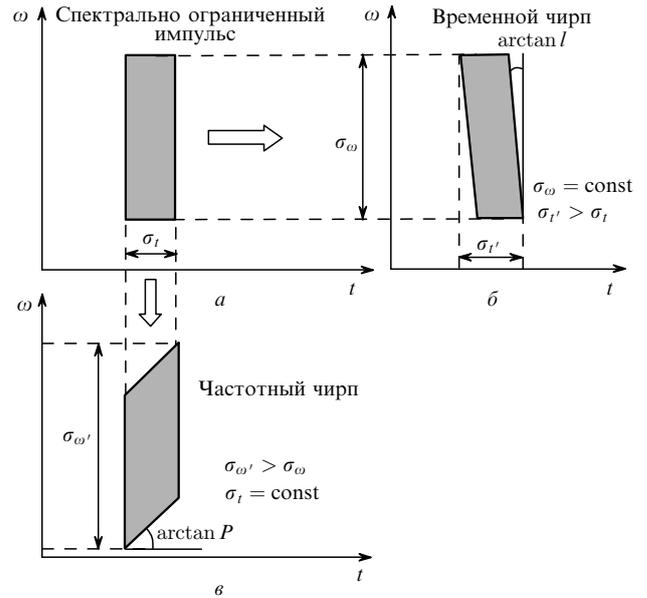


Рис.3. Преобразование прямоугольного сигнала (а) квадратичным фильтром (б) и модулятором (в).

$$\psi(t - t_0) = \psi_0 - \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}P(t - t_0)^2 + \dots,$$

где

$$\omega_0 \equiv \frac{d\psi}{dt} \Big|_{t=t_0}; \quad P \equiv \frac{d^2\psi}{dt^2} \Big|_{t=t_0}.$$

Если ограничиться членами второго порядка, то в этом квадратичном приближении выражение (9) примет вид (рис.3,в)

$$W_M(t - t_0, \omega) \approx W[t - t_0, \omega - \omega_0 + (t - t_0)P]. \tag{10}$$

3.2. Фильтры

Фильтр, т. е. линейная система, инвариантная во времени, описывается в частотной области выражением [6]

$$\tilde{U}_F(\omega) = \tilde{U}(\omega)\tilde{f}(\omega), \tag{11}$$

где $\tilde{f}(\omega)$ – передаточная функция. Если

$$\tilde{f}(\omega) = \exp[-i\varphi(\omega)], \tag{12}$$

то формула (11) описывает фазовый фильтр.

Подставив выражение (11) для фазового фильтра в (3), получим

$$\begin{aligned}
 &W_F(t, \omega - \omega_0) \\
 &\equiv F_{\Delta\omega \rightarrow t}^{-1} \left\{ \tilde{U}_F \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tilde{U}_F^* \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right\} \\
 &= F_{\Delta\omega \rightarrow t}^{-1} \left\{ \tilde{U} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tilde{U}^* \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right. \\
 &\times \exp \left[-i\varphi \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) + i\varphi \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right] \left. \right\}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

В линейном приближении имеем [17]

$$\begin{aligned}
 W_F(t, \omega - \omega_0) &= F_{\Delta\omega \rightarrow t}^{-1} \left\{ \tilde{U} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tilde{U}^* \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right. \\
 &\times \exp \left[-i\varphi \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) + i\varphi \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right] \left. \right\} \\
 &\approx F_{\Delta\omega \rightarrow t}^{-1} \left\{ \tilde{U} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tilde{U}^* \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right. \\
 &\times \exp \left(-i \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} \Delta\omega \right) \left. \right\}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

а воспользовавшись теоремой о сдвиге [6], получим

$$\begin{aligned}
 W_F(t, \omega - \omega_0) &\approx F_{\Delta\omega \rightarrow t}^{-1} \left\{ \tilde{U} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \tilde{U}^* \left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right. \\
 &\times \exp \left(-i \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} \Delta\omega \right) \left. \right\} = W \left(t - \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}, \omega - \omega_0 \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Отметим, что выражение (15) много проще исходного соотношения

$$\tilde{U}_F(\omega) = \tilde{U}(\omega) \exp[-i\varphi(\omega)],$$

т. к. оно сводится к сдвигу W во временной области на производную фазового сдвига φ по времени. Таким образом, наличие фильтра не меняет полосы частот исходного спектрально ограниченного прямоугольного импульса, но увеличивает его длительность (рис.2,б) и создает chirпированный по времени импульс.

Считая, что полоса частот импульса мала, разложим фазовую функцию $\varphi(\omega - \omega_0)$ в окрестности несущей частоты ω_0 в ряд Тейлора:

$$\varphi(\omega - \omega_0) = \varphi_0 + t_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}l(\omega - \omega_0)^2 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned}
 t_0 &\equiv \left. \frac{d\varphi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}; \\
 l &\equiv \left. \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}
 \end{aligned}$$

– эффективная толщина фильтра, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Если ограничиться членами второго порядка, то в этом квадратичном приближении выражение (15) примет вид (рис.3,б)

$$W_F(t, \omega - \omega_0) \approx W[t - t_0 - (\omega - \omega_0)l, \omega - \omega_0]. \tag{16}$$

4. Матричный формализм теории идеальных оптических систем

В основу инженерных расчетов и классификации систем пространственной оптики положена теория идеаль-

ных (безабберационных) оптических систем Максвелла [18] и математический аппарат матричной алгебры. Поэтому и во временной оптике очень важно проследить переход от общего волнового описания [1] к матричному безабберационному описанию [19–22].

Заметим, что точку (t, ω) в фазовом пространстве (см. рис.2) можно характеризовать матрицей-столбцом

$$\begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix},$$

и поэтому W можно представить как функцию матрицы-столбца:

$$W \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} \right\} \equiv W(t, \omega). \tag{17}$$

Используя эту матричную форму записи, выражения для WDF модулятора (10) и фильтра (16) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 W_M \left\{ \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} \right\} &= W \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= W \left\{ M \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

где

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 W_F \left\{ \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} \right\} &= W \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= W \left\{ F \begin{pmatrix} t - t_0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{19}
 \end{aligned}$$

где

$$F \equiv \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичный фазовый модулятор описывается матрицей M , создающей линейный сдвиг по частоте: от спектрально ограниченного прямоугольного импульса (рис.3,а) к импульсу, линейно chirпированному по частоте (рис.3,в). Квадратичный фазовый фильтр описывается матрицей F , создающей линейный сдвиг по времени: от спектрально ограниченного прямоугольного импульса к импульсу, линейно chirпированному по времени (рис.3,б).

5. Модуляторы и фильтры во временной оптике

Во временной оптике УКИ физической реализацией фазового фильтра является слой среды с дисперсией толщиной z (или, например, компрессор – пара параллельных дифракционных решеток, расположенных на расстоянии z одна от другой [23], или стретчер – прибор, содержащий элементы с дисперсиями противоположного знака [24]). В квадратичном приближении слой среды с дисперсией описывается выражением (19) [1], причем эффективная толщина фильтра l пропорциональна реальной толщине z среды с дисперсией.

Фазовым модулятором является, например, электрооптический модулятор, изменяющий фазу проходящего лазерного пучка по гармоническому закону [1]:

$$\psi(t) = \Phi_m \cos(\omega_m t + \theta),$$

где Φ_m , ω_m и θ – амплитуда, частота и начальная фаза модуляции. Если фаза θ равна нулю и длительность импульса много меньше периода модуляции $T_m = 2\pi/\omega_m$, то, разложив сдвиг фазы в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$ и ограничившись членом второго порядка, получим

$$\psi(t) \approx \Phi_m \left(1 - \frac{\omega_m^2 t^2}{2} \right).$$

В этом приближении электрооптический модулятор описывается функцией (18), если $P \equiv 1/f$, где $f = 1/(\Phi_m \omega_m^2)$ – «фокальное время» модулятора (временной линзы) [1].

6. Модуляторы и фильтры в пространственной оптике

Согласно двойному смыслу понятия пространственных частот [25], пространственная частота u определяет направление распространения дифрагировавшего светового луча. Поэтому, заменив время t на расстояние x от светового луча до оптической оси, а частоту ω на пространственную частоту u , получим из рассмотренной выше матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix}$$

матрицу-столбец светового луча

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}.$$

Заметим, что преобразования этого луча в линзе с оптической силой $P \equiv 1/f$ (в фазовом модуляторе) и в слое свободного пространства толщиной l (в фазовом фильтре) описываются теми же матрицами (18) и (19) соответственно.

7. ABCD-матрицы оптических систем

Комбинируя модуляторы и фильтры, можно синтезировать множество самых разных систем, получаемых перемножением матриц M и F [7]. Каждая из таких систем описывается $ABCD$ -матрицей T :

$$T \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = M_1 F_2 M_3 M_4 M_5 F_6 \dots$$

Матрицы M и F некоммутативны, поэтому важно не менять порядок их перемножения. Поскольку

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ и } \det \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

то

$$\det T \equiv \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC = 1.$$

Следовательно, матрица T описывает линейное преобразование носителя WDF, и это преобразование не меняет его объема.

Классификацию временных оптических систем построим по аналогии с классификацией оптических систем геометрической оптики [7], которая базируется на приравнивании разных элементов $ABCD$ -матрицы нулю. При этом используется правило знаков: эффективная длина слоя свободного пространства считается положительной, если он находится перед линзой, и отрицательной, если он расположен за линзой. Рассмотрим эту классификацию. Отметим, что величины со штрихом относятся к пространству изображений оптической системы.

1. В геометрической оптике случай $A = 0$, т. е. $x' = Bu$ (рис.4,а), соответствует определению задней фокальной плоскости и реализуется в каскаде из модулятора с фокусом f и следующего за ним фильтра толщиной l' при выполнении условия

$$F'M = \begin{pmatrix} 1 & -l' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - l'/f & -l' \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

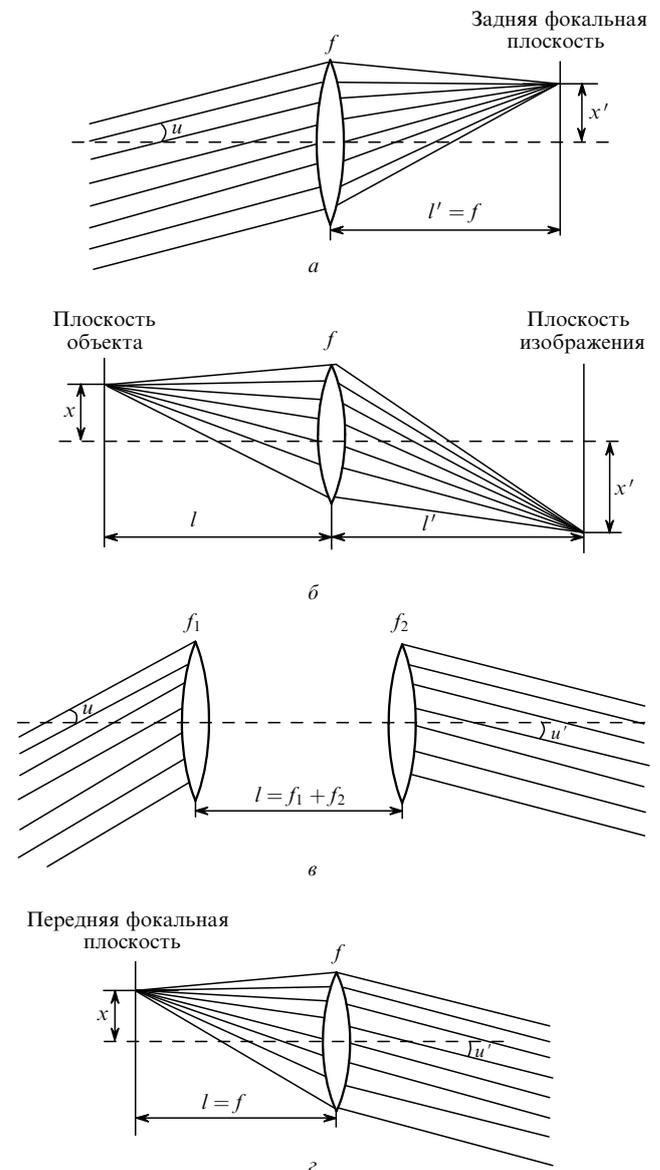


Рис.4. Классификация оптических систем: определение задней фокальной плоскости (а), оптически сопряженных плоскостей (б), телескопа (в) и передней фокальной плоскости (г).

Следовательно, $1 - l'/f = 0$, т. е. $l' = f$. При выполнении этого условия исходная матрица системы упрощается:

$$F'M = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

Во временной оптике такая система перекодирует частотную модуляцию сигнала (волновой формы) во временную [13, 14].

2. В геометрической оптике случай $B = 0$, т. е. $x' = Ax$ (рис.4,б), соответствует линейному преобразованию координат в оптически сопряженных плоскостях и реализуется в каскаде из фильтра толщиной l , следующего за ним модулятора с фокусом f и далее фильтра толщиной l' при выполнении условия

$$F'MF = \begin{pmatrix} 1 & -l' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - l'/f & l - l' + l'/f \\ 1/f & 1 - l'/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

т. е. $l - l' + l'/f = 0$. Отсюда получим формулу тонкой линзы в отрезках:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} = \frac{1}{f}.$$

При выполнении этого условия исходная матрица системы упрощается:

$$F'MF = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1/f & 1/\mu \end{pmatrix},$$

где $\mu \equiv l'/l$ – временное увеличение системы. Во временной оптике такая матрица описывает временной микроскоп, т. е. оптическую систему, изменяющую временной масштаб сигнала (волновой формы) [1].

3. В геометрической оптике случай $C = 0$, т. е. $u' = Du$ (рис.4,в), соответствует линейному преобразованию наклонов входного и выходного параллельных пучков и реализуется в каскаде из модулятора с фокусом f_1 , фильтра толщиной l и модулятора с фокусом f_2 при выполнении условия

$$M_2FM_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - l/f_1 & -l \\ (-l + f_1 + f_2)/(f_1f_2) & 1 - l/f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $(-l + f_1 + f_2)/(f_1f_2) = 0$, т. е. $l = f_1 + f_2$. При выполнении этого условия матрица системы упрощается:

$$M_2FM_1 = \begin{pmatrix} -1/\eta & f_1 + f_2 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix},$$

где $\eta \equiv f_1/f_2$ – спектральное увеличение системы. Во временной оптике такая матрица описывает временной телескоп, т. е. оптическую систему, изменяющую частотный масштаб сигнала (волновой формы) [26].

4. В геометрической оптике случай $D = 0$, т. е. $u' = Cx$ (рис.4,г), соответствует определению передней фокаль-

ной плоскости и реализуется в каскаде из фильтра толщиной l и следующего за ним модулятора с фокусом f при выполнении условия

$$MF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 1/f & 1 - l/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $1 - l/f = 0$, т. е. $f = l$. При выполнении этого условия исходная матрица системы упрощается:

$$MF = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 1/f & 0 \end{pmatrix}.$$

Во временной оптике такая система перекодирует временную модуляцию сигнала (волновой формы) в частотную.

Рассмотрим два особых случая. В геометрической оптике $2f$ -система (при $l = l' = f$) соответствует фурье-конвертору, описываемому выражением

$$FMF' = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 1/f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ 1/f & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае временной оптики эта матрица реализуется в каскаде из фильтра толщиной f , следующего за ним модулятора с фокусом f и далее фильтра той же толщины f и описывает «конвертор $t-\omega$ » [27].

В геометрической оптике $4f$ -система – каскад из двух одинаковых оптических $2f$ -систем – описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -f \\ 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -f \\ 1/f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Во временной оптике соответствующая система обращает последовательность импульсов как по времени (заменяет «прошлое» на «будущее»), так и по частоте [27].

8. Выводы

Таким образом, показана простота описания лазерных УКИ и их преобразований в оптических системах с временными линзами с использованием функции Вигнера.

Отмечено, что с помощью функций Вигнера можно описать преобразование импульса в самой общей форме, но при этом в квадратичном приближении такое описание эквивалентно применению известных из геометрической оптики $ABCD$ -матриц.

Методы матричной оптики позволяют классифицировать и определить основные эксплуатационные параметры временных оптических систем: временных линзы, микроскопа, телескопа, фурье-конвертора и т. д.

1. Kolner H. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 1951 (1994).
2. Bastiaans M.J. *Opt. Commun.*, **25**, 26 (1978).
3. Baastians M.J. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1710 (1979).
4. Гитин А.В. *Оптич. журн.*, **65**, 55 (1998).
5. Гитин А.В. *Автореф. докт. дис. Принцип дуальности в оптике*,

- радиометрии и светотехнике (С.-Петербург, ГОИ им. С.И.Вавилова, 1999).
6. Литвиненко О.Н. *Основы радиооптики* (Киев: Техника, 1974, с. 206).
 7. Джеррард А., Бёрч Дж.М. *Введение в матричную оптику* (М.: Мир, 1978, с. 343).
 8. Kane D.J., Trebino R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **29**, 571 (1993).
 9. Reid D.T. *IEEE J. Quantum Electron.*, **35**, 1584 (1999).
 10. Gasse R. *J. Opt. Am. B*, **14**, 2915 (1997).
 11. Yaremenko S., Baltuska A., Pschenichnikov M.S., Wiersma D.A. *Appl. Phys. B*, **70**, 109 (2000).
 12. Hong K.-H., Kim J.-H., Kang Y.H., Nam C.H. *Appl. Phys. B*, **74**, 231 (2002).
 13. Херман И., Вильгельми Б. *Лазеры сверхкоротких световых импульсов* (М.: Мир, 1986, с. 368).
 14. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чирков А.С. *Оптика фемтосекундных лазеров импульсов* (М.: Наука, 1988, с. 310).
 15. Ozaktas H.M., Kutay M.A., Zeev Z. *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* (New York, Toronto: John Wiley & Sons, 2001, p. 513).
 16. Andres P., Furlan W.D., Saavedra G., Lohmann A.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4** (4), 853 (1997).
 17. Гитин А.В. *Оптика и спектроскопия*, **64**, 893 (1988).
 18. Гитин А.В. *Оптика и спектроскопия*, **63**, 183 (1997).
 19. Payne J., Migus A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, 1480 (1997).
 20. Kostenbauder A.G. *IEEE J. Quantum Electron.*, **26**, 1148 (1990).
 21. Dijaili S.P., Dienes A., Smith J.S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **26**, 1158 (1990).
 22. Nakazawa M., Kubota H., Sahara A., Tamura K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **34**, 1075 (1998).
 23. Treacy E.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **5**, 454 (1969).
 24. Martinez O.E. *IEEE J. Quantum Electron.*, **23**, 59 (1987).
 25. Зверев В.А. *Радиооптика* (М.: Сов. радио, 1975, с. 304).
 26. Christov I.P. *Opt. Quantum Electron.*, **22**, 1027 (1990).
 27. Mendlovic D., Melamed O., Ozaktas H.M. *Appl. Opt.*, **34**, 4113 (1995).