ЛАЗЕРЫ

PACS 42.55.Px; 42.60.Da; 42.62.Eh

К расчету гирофактора в полупроводниковом кольцевом лазере

П.Г.Елисеев

Рассмотрено расщепление собственных частот вследствие эффекта Саньяка в активном лазерном гироскопе с кольцевым резонатором, заполненном средой с высоким показателем преломления и ненулевой дисперсией. Показано, что влияние среды уменьшает гирофактор в n^* раз, где n^* – групповой показатель. Однако в условиях динамической аномальной дисперсии оказывается принципиально возможным увеличение гирофактора без увеличения размеров кольцевого резонатора.

Ключевые слова: *лазерные гироскопы, полупроводниковый кольцевой резонатор, гирофактор.*

1. Введение

В лазерных гироскопах успешно применяются газовые лазеры, в которых влияние дисперсии среды пренебрежимо мало [1 – 5]. Спектральное расщепление $\Delta\nu$ моды резонатора вследствие эффекта Саньяка в таком активном лазерном гироскопе [1] пропорционально угловой скорости Ω вращения, $\Delta\nu = K\Omega$, где K – гирофактор. В кольцевом лазере с площадью контура A и длиной периметра L имеем $K = 4A/(\lambda L)$; для кругового контура $K = 2R/\lambda$, где λ – длина волны в вакууме; R – радиус круга.

Результаты недавних исследований, проведенных с монолитно-интегрированными полупроводниковыми кольцевыми лазерами (ПКЛ) [6], продемонстрировали определенные перспективы их использования в датчиках вращения. Например, наблюдались биения мод между независимыми ПКЛ с длиной резонатора (периметра) более 1 см [6]. Однако ввиду сравнительной малости размеров ПКЛ фактор K оказывается малым для навигационных применений. И это не единственная, но существенная проблема.

Поскольку полупроводниковая активная среда обладает высокими показателем преломления и дисперсией, большое значение имеет влияние этих величин на гирофактор. Однако теоретические данные весьма неоднозначны. Еще в работе [2] было показано, что увеличение показателя преломления среды ведет к уменьшению $\Delta\nu$. В [7] рассмотрены некоторые статьи, в которых рассчитывалось влияние на гирофактор показателя преломления n. Зависимость частотного расщепления вследствие эффекта Саньяка от n в этих работах варьируется от $\Delta\nu \propto n$ до $\Delta\nu \propto n^{-2}$. Поэтому гирофактор при $n = 3.6$, характерном для полупроводников, в зависимости от принятых приближений изменяется в 46.6 раза. Также нет ясности с влиянием на гирофактор дисперсии показателя преломления. В [3] было показано, что $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\nu$ входит в расчет $\Delta\nu$, однако в работе [4] утверждалось, что в первом порядке дисперсия на величину K не влияет. В работе [7] дисперсия входит в выражение для K вместе с множителем, пропорциональным Ω, и, следовательно, при малых скоростях ее влияние ничтожно.

Надо обратить внимание и на то, что ввиду наличия разных способов повлиять на дисперсию динамически (например, при получении «замедленного» или «ускоренного» света), возникает вопрос: можно ли увеличить K без дальнейшего увеличения размеров ПКЛ? Ответ зависит от того, влияет ли дисперсия на эффект Саньяка. Мы показываем, как она влияет, и даем соответствующий вывод для нерелятивистского случая. Поскольку компоненты расщепления частот вследствие эффекта Саньяка в среде с дисперсией характеризуются разными значениями n, их фазовые скорости оказываются различными. Это дает уменьшение или увеличение расщепления в зависимости от того, нормальная или аномальная дисперсия имеет место.

В настоящей работе рассматривается ПКЛ, в котором резонатор наполнен излучающей средой с показателем $n > 1$ и дисперсией $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\nu \neq 0$. Например, в объемном GaAs на длине волны $\sim$880 нм $n = 3.61$ и $\nu\mathrm{d}n/\mathrm{d}\nu \sim 1.08$. Френелевский коэффициент затягивания равен не нулю, а 0.923. Таким образом, учет этих параметров совершенно необходим. Поскольку фактор K обратно пропорционален групповому показателю преломления, т. е. чувствителен и к n, и к его дисперсии, есть принципиальная возможность повлиять на его величину за счет создания динамической аномальной дисперсии.

2. Расчет расщепления частот

Будем рассматривать однородный кольцевой резонатор круговой формы с радиусом R, образованный, например, интегрально-оптическим волноводом в лазерном полупроводнике. Предполагаем, что в лазере имеются две противоположно направленные бегущие волны, являющиеся независимыми модами резонатора. В неподвижном резонаторе у них одинаковая частота ν_0, связанная с длиной периметра L соотношением

П.Г.Елисеев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; адрес в настоящее время: Center for High Technology Materials, University of New Mexico, Albuquerque, NM, USA; e-mail: eliseev@chtm.unm.edu

Поступила в редакцию 2 сентября 2005 г.; после доработки – 7 марта 2006 г.

$$\nu_0 = \frac{cq}{n_0 L}, \tag{1}$$

где c – скорость света; n_0 – показатель преломления на частоте ν_0;

$$q = n_0 L \nu_0 / c = \nu_0 T_0 \tag{2}$$

– продольный индекс моды; $T_0 = n_0 L/c$ – время обхода резонатора («фазовое»). Величина продольного индекса не уточняется, важно только, что она сохраняется при вращении, т. е. речь все время идет об одних и тех же модах.

Пусть резонатор теперь вращается с постоянной угловой скоростью Ω (для определенности – по часовой стрелке). Встречные волны становятся неэквивалентными, и различие их частот возникает вследствие изменения как длины периметра, на которой должно быть получено воспроизведение фазы, так и фазовой скорости. Поскольку интересный для навигационных измерений интервал Ω соответствует сравнительно малым линейным скоростям, наш случай – заведомо нерелятивистский, т. е. величиной $(\Omega R/c)^2$ можно пренебречь. Другое дело, что результат не должен противоречить теории относительности, в частности величина K не должна зависеть от скорости равномерного прямолинейного движения.

Рассмотрим волну, движущуюся в том же направлении, что и среда. Длина L^+, на которой воспроизводится фаза волны, увеличится на то расстояние, которое среда проходит за время обхода T^+, т. е. на $\Omega R T^+$, и составит $2\pi R + \Omega R T^+$. В этом случае фазовая скорость

$$V^+ = c/n^+ + \alpha^+ \Omega R, \tag{3}$$

где n^+ – показатель преломления на той частоте ν^+, на которую изменится частота рассматриваемой волны; α^+ – коэффициент затягивания. Теперь получим уравнение для T^+,

$$T^+ = \frac{L^+}{V^+} = \frac{2\pi R + \Omega R T^+}{c/n^+ + \alpha^+ \Omega R}, \tag{4}$$

решение которого имеет вид

$$T^+ = \frac{2\pi R}{c/n^+ - \Omega R(1 - \alpha^+)}. \tag{5}$$

Аналогично для встречной волны имеем

$$\begin{gathered} L^- = 2\pi R - \Omega R T^-, \quad V^- = c/n^- - \alpha^- \Omega R, \\ T^- = \frac{2\pi R}{c/n^- + \Omega R(1 - \alpha^-)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Частоты этих мод соответствует условию сохранения индекса моды, о котором говорилось раньше,

$$q = \nu_0 T_0 = \nu^+ T^+ = \nu^- T^-, \tag{7}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu^- - \nu^+ = \nu_0 T_0 \left(\frac{1}{T^-} - \frac{1}{T^+} \right) \\ &= \frac{\nu_0 T_0}{2\pi R} \left[\frac{c}{n^+} + \Omega R(1 - \alpha^+) - \frac{c}{n^-} + \Omega R(1 - \alpha^-) \right] \\ &= \frac{\nu_0 n_0}{c} \left[2\Omega R(2 - \alpha^+ - \alpha^-) + \frac{c}{n^+} - \frac{c}{n^-} \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая дисперсию в первом порядке, можем получить

$$\frac{c}{n^+} - \frac{c}{n^-} \approx -\frac{c}{n_0^2} \, \Delta\nu \, \frac{dn}{d\nu}, \tag{9}$$

и эта подстановка даст следующее уравнение для $\Delta\nu$:

$$\Delta\nu \left(1 + \frac{\nu_0}{n_0} \frac{dn}{d\nu} \right) = 2 \frac{\Omega R \nu_0 n_0}{c} (1 - \alpha). \tag{10}$$

Здесь $\alpha = (\alpha^+ + \alpha^-)/2$, и решение имеет вид

$$\Delta\nu = 2 \frac{\Omega R \nu_0 n_0}{c} (1 - \alpha) \left(1 + \frac{\nu_0}{n_0} \frac{dn}{d\nu} \right)^{-1}. \tag{11}$$

3. Результаты и их обсуждение

Для вращающегося кольцевого лазера с вращающейся средой в [4] дается более общее выражение (формула (51) в работе [4]), однако без учета дисперсии:

$$\Delta\nu = \frac{2\nu}{c} \frac{\oint n^2(1 - \alpha)\, \upsilon \, dr}{\oint n \, ds}, \tag{12}$$

где интегрирование производится по периметру кольцевого резонатора; ds – элемент его длины; dr – элемент радиального смещения; υ – линейная скорость вращения. Эта формула распространима на случай неоднородного заполнения резонатора и на случаи произвольной формы последнего. Если провести интегрирование для однородной окружности радиусом R, то с учетом $\upsilon = \Omega R$ получим

$$\Delta\nu = 2\Omega R \nu n(1 - \alpha)/c, \tag{13}$$

что идентично формуле (11), естественно, без учета дисперсии.

Рассмотрим роль коэффициента затягивания α (см. также дискуссию в работе [4]). Он известен в первоначальном виде, выведенном Френелем:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}. \tag{14}$$

Соответствующий эффект подтвержден Физо в экспериментах с движущейся средой в плече интерферометра. Позднее Лоренц ввел дисперсионную добавку и получил коэффициент затягивания в виде

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu} \tag{15}$$

(вывод приведен в [8]). Если применять формулу (15) в случае вращающихся резонаторов, то возникает проблема с инвариантностью к равномерному поступательному движению, что является требованием теории относительности. Формула (14) такой проблемы не создает. Дисперсия оказывает влияние, если происходит изменение частоты. Замечание Эйнштейна [9] по этому поводу (см. дискуссию в [4]) сводится к тому, что дисперсионная добавка возникает из-за допплер-эффекта между неподвижным источником и движущимся интерферометром в тех экспериментах, которые рассматривал Лоренц. В нашем случае источник движется вместе с резонатором, и это дает основание для использования формулы (14). Подставляя (14) в (11), получаем

$$\Delta\nu = 2 \frac{\Omega R \nu_0}{c} \left[n_0 \left(1 + \frac{\nu_0}{n_0} \frac{dn}{d\nu} \right) \right]^{-1} = \frac{2\Omega R}{\lambda n^*}, \tag{16}$$

где

$$n^* = n_0\left(1 + \frac{\nu_0}{n_0}\frac{dn}{d\nu}\right)$$

– групповой показатель; λ – длина волны в вакууме. Гирофактор

$$K = \frac{2R}{\lambda n^*}, \quad (17)$$

или, в общем виде,

$$K = \frac{4A}{L\lambda n^*}. \quad (18)$$

При выводе формулы (11) мы пренебрегли величиной порядка$[(\Delta\nu/n)dn/d\nu]^2$ по сравнению с единицей. При $n = 3.6$, $dn/d\nu = 3\times10^{-14}$ Гц$^{-1}$ (параметры для GaAs-лазера) и $\Delta\nu = 100$ МГц эта величина составляет 7×10^{-13}. Мы также исключили дисперсию коэффициента α, что соответствует пренебрежению величиной того же порядка. Таким образом, эти приближения вполне приемлемы. При $R = 1$ см, $\lambda = 1$ мкм и $n^* = 3.8$ (InGaAs-лазер) можно достичь $K = 5.2\times10^3$. В Приложении приведены расчеты $\Delta\nu$ для вращающейся системы координат. Полученная формула (П3) полностью эквивалентна формуле (17), что свидетельствует о том, что в данном случае частотное расщепление инвариантно к выбору системы координат.

Согласно этим формулам, помещение кольцевого резонатора в среду с групповым показателем n^* приводит к уменьшению эффекта Саньяка в n^* раз. Это можно объяснить сильным влиянием затягивания. В пределе полного затягивания, $\alpha \to 1$, расщепления частот не происходит.

В опытах с газовыми кольцевыми лазерами [10] введение кварцевой пластинки в резонатор приводило к уменьшению K, что качественно согласуется с формулой (17). В этих опытах вводимая дисперсия была слишком мала, чтобы ее влияние могло иметь значение. Выигрыш может дать уменьшение n^*, например в случае аномальной дисперсии. Однако известные полупроводниковые лазеры работают в области нормальной дисперсии, что проявляется в том, что $n^* > n$.

Рассмотрим возможность повлиять на гирофактор путем создания динамической дисперсии, например за счет нелинейного взаимодействия мод [11–13]. В этом случае сравнительно малые вариации показателя n происходят в малом спектральном интервале, что дает значительную наведенную дисперсию. Таким образом, в окрестности частоты «сильной» моды происходит вариация группового индекса вплоть до изменения его знака. Частоты, при которых n^* проходит через нуль, известны как точки «критически аномальной дисперсии», где групповая скорость стремится к бесконечности. Вблизи такой точки существует принципиальная возможность получить увеличение K согласно формуле (17), когда n^* приближается к нулю. Таким образом, с помощью нелинейного взаимодействия мод в полупроводниковом кольцевом лазере можно получить аномальную дисперсию путем подбора режима и частотной отстройки, соответствующей концепции «быстрого» света.

4. Заключение

В настоящей работе получено выражение для гирофактора K в однородном кольцевом лазере с учетом дисперсии и оптического затягивания. Ввиду противоречивости литературных данных мы посчитали целесообразным привести вывод формул для малых скоростей вращения в стационарной и во вращающейся системах координат. Расчетный гирофактор в нерелятивистском случае не зависит от выбора системы координат. Нормальная дисперсия ведет к уменьшению K, однако существует принципиальная возможность его увеличения за счет динамической аномальной дисперсии. Расчет применим к интегрально-оптическому полупроводниковому лазеру с кольцевым резонатором.

Приложение

Формула (17) во вращающейся системе координат может быть получена следующим образом.

В системе, вращающейся со скоростью Ω в том же направлении, кольцевой резонатор неподвижен, поэтому длина одинакова для обеих волн: $L^+ = L^- = 2\pi R$. Поскольку среда в этом случае также неподвижна, эффект затягивания отсутствует. Однако в этой неинерциальной системе появляется различие в фазовых скоростях встречных волн. В отсутствие среды, как показано в [14], скорости $V_{\mathrm{r}0}^{\pm} = c \pm 2\Omega A/L$, где индекс r соответствует вращающейся системе, а 0 – отсутствию среды. Для случая резонатора, заполненного средой, имеем

$$V_{\mathrm{r}}^{\pm} = V^{\pm} \mp \Omega R = c/n^{\pm} \mp \Omega R/(n^{\pm})^2. \quad (\Pi1)$$

В работе [15] выведены релятивистские соотношения для фазовых скоростей во вращающейся среде (формулы (2.34) и (2.35)). Формулу (П1) можно получить из этих соотношений после перехода к нерелятивистским скоростям. Проделывая расчет, аналогичный вышеприведенному, получаем

$$\Delta\nu = \nu_0 T_0 (L^-/V^- - L^+/V^+)$$
$$= \frac{n_0}{\lambda}\left\{\frac{c}{n^-} - \frac{c}{n^+} + \Omega R\left[\frac{1}{(n^+)^2} + \frac{}{/(n^-)^2}\right]\right\}. \quad (\Pi2)$$

Используя приближение (9) и полагая, что $1/(n^+)^2 + 1/(n^-)^2 \approx 2/n_0^2$, получаем

$$\Delta\nu = \frac{2\Omega R}{\lambda n^*}, \qquad K = \frac{2R}{\lambda n^*}. \quad (\Pi3)$$

Работа поддержана грантом NSF (ECS-0524509) и грантом «Ведущие научные школы» (НШ-6055.2006.2).

1. Rosenthal A.H. *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1143 (1962).
2. Heer C.V. *Phys. Rev.*, **134** (4A), 799 (1964).
3. Хромых А.М. *ЖЭТФ*, **50** (1), 281 (1966).
4. Post E.J. *Rev. Mod. Phys.*, **39**, 475 (1967).
5. Chow W.W., Gea-Banacloche J., Pedrotti L.M., Sanders V.E., Schleich W., Scully M.O. *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 61 (1985).
6. Cao H., Liu C., Deng H., Benavides M., Smagley V., Caldwell R., Peak G.M., Smolyakov G.A., Eliseev P.G., Osinski M. *Appl. Phys. Lett.*, **86**, 041101 (2005).
7. Numai T. *J. Appl. Phys.*, **89**, 1537 (2001).
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1992, с. 430–431).
9. Einstein A. *Astron. Nachr.*, **199**, 9 (1914).
10. Привалов В.Е., Филатов Ю.М. *Квантовая электроника*, **4** (7), 1418 (1977).
11. Bogatov A.P., Eliseev P.G., Sverdlov B.N. *IEEE J. Quantum Electron.*, **11**, 510 (1975).
12. Yamada M. *J. Appl. Phys.*, **66**, 81 (1989).
13. Елисеев П.Г. *Квантовая электроника*, **35** (9), 791 (2005).
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1967, с. 326–328).
15. Wilkinson J.R. *Progr. Quantum Electron.*, **11** (1), 1 (1987).