

# Простой способ аподизации при записи волоконных брэгговских решёток гауссовым пучком

С.Р.Абдуллина, С.А.Бабин, А.А.Власов, С.И.Каблуков

*Рассмотрены возможности аподизации волоконных брэгговских решёток, записываемых голографическим методом с помощью лазерного излучения с гауссовым профилем интенсивности. Продемонстрирован простой способ сглаживания спектрального контура высокоотражающих решёток с помощью дополнительной засветки записанной интерференционной структуры гомогенным гауссовым пучком.*

**Ключевые слова:** брэгговская решётка, аподизация, интерференция, спектр отражения.

## 1. Введение

Волоконные брэгговские решётки (ВБР) имеют большие перспективы использования в телекоммуникационных и сенсорных системах и являются ключевым элементом волоконных лазеров [1, 2]. Широкий круг применений ВБР определяется их уникальными спектральными свойствами, полностью волоконным исполнением, малыми вносимыми потерями. Разработанные к настоящему времени технологии создания ВБР позволяют использовать их в промышленности и технике.

ВБР представляет собой отрезок оптического волокна с периодическим изменением показателя преломления. Формирование такой структуры происходит вследствие фотомодификации стекла при засветке волоконного световода УФ излучением с пространственной модуляцией интенсивности, например в области интерференции пучков [3]. Относительное изменение показателя преломления  $\Delta n/n$  может достигать значений  $\sim 10^{-2}$  [4]. Спектр ВБР имеет резонансный характер вследствие конструктивной интерференции волн, отраженных от слоев с различными показателями преломления. Коэффициент отражения максимален вблизи так называемой брэгговской длины волны  $\lambda_B = 2nL$ , где  $n$  – эффективный показатель преломления волоконного световода,  $L$  – период модуляции. При конечной длине ВБР из-за отражения на краях формируется эффективный резонатор Фабри–Перо, приводящий к появлению в спектре боковых резонансов.

В спектрах высокоотражающих решёток величина боковых резонансов может составлять несколько процентов и более, что неприемлемо для некоторых приложений. Для подавления боковых резонансов используют так называемую аподизацию решеток [1, 2, 5, 6], заключающуюся в реализации плавного изменения амплитуды наведённого показателя преломления вдоль ВБР, приводящего к уменьшению влияния на спектр эффектов, связанных с конечной длиной ВБР. Существует множество профилей наведённого показателя преломления  $\Delta n(z)$ ,

обеспечивающих получение спектра ВБР с подавленными боковыми резонансами [1]. При этом практическая реализация большинства из них требует технологически сложных сканирующих методик.

Цель настоящей работы состояла в исследовании возможностей записи высокоотражающих решёток с гладким спектральным контуром отражения без сканирования при использовании присущей лазерному излучению гауссовой формы профиля интенсивности. Особенностью предлагаемой методики является способ аподизации ВБР, не требующий трансформации пучка УФ лазера. При относительной простоте этот способ оказался достаточно эффективным: достигнуто подавление боковых резонансов до уровня  $-20$  дБ.

## 2. Основные формулы

Форма спектра ВБР определяется изменением показателя преломления вдоль волокна:

$$n(z) = n_0 + \Delta n(z) = n_0 + \Delta n_{dc}(z) + \Delta n_{ac}(z) \cos\left(\frac{2\pi}{L}z\right), \quad (1)$$

где  $n_0$  – эффективный показатель преломления волоконного световода;  $\Delta n_{dc}(z)$  – среднее значение наведённого УФ лазером показателя преломления;  $\Delta n_{ac}(z)$  – амплитуда модуляции. В случае интерференционных схем записи ВБР при линейной зависимости наведённого показателя преломления от дозы УФ излучения выполняется соотношение  $\Delta n_{ac}(z) = s\Delta n_{dc}(z)$ , где  $s$  – видность интерференционной картины. Для ВБР с однородным профилем показателя преломления, т. е. постоянным по амплитуде изменением показателя преломления на длине  $L$  волоконного световода ( $\Delta n_{ac}(z) = \text{const}$ ), спектр отражения находится аналитически [1]. Максимальный коэффициент отражения

$$R = \tanh^2 \left[ \pi \frac{\Delta n_{ac}}{2(n_0 + \Delta n_{dc})L} \right]. \quad (2)$$

Относительная ширина спектра, определяемая как расстояние между первыми нулями в спектре отражения, нормированное на длину волны,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left[ \left( \frac{\Delta n_{ac}}{n_0} \right)^2 + \left( \frac{2L}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

С.Р.Абдуллина, С.А.Бабин, А.А.Власов, С.И.Каблуков. Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 1; e-mail: babin@iae.nsk.su

Поступила в редакцию 18 апреля 2006 г., после доработки – 15 июня 2006 г.

В спектре ВБР такого типа боковые резонансы сильно выражены, и в высокоотражающих ( $R \sim 1$ ) решётках достигают десятков процентов [1].

В случае интерференции гауссовых пучков

$$\Delta n_{dc}(z) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right), \quad \Delta n_{ac}(z) = s\Delta n_0 \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right),$$

$$\Delta n(z) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right) \left[1 + s \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right)\right], \quad (4)$$

где  $w$  – радиус гауссова пучка. При этом брэгговская длина волны  $\lambda_{Br} = 2n\Lambda$  максимальна в центре решётки, где  $n(z = 0) = n_0 + \Delta n_0$ , и уменьшается к её краям. Следовательно, краевые области могут формировать эффективный резонатор Фабри – Перо, приводящий к появлению боковых резонансов в коротковолновой части спектра высокоотражающих ВБР [7]. Для устранения эффекта необходимо обеспечить постоянство среднего значения наведённого показателя преломления вдоль ВБР:  $\Delta n_{dc} = \text{const}$  [1, 2, 6]. В этом случае

$$\Delta n(z) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right) \left[1 + s \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right)\right] + \Delta n_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right)\right]$$

$$= \Delta n_0 s \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) + \Delta n_0, \quad (5)$$

а амплитуда боковых резонансов может быть уменьшена до  $-30$  дБ [6]. Однако сформировать такой сложный профиль пучка (постоянная интенсивность с провалом гауссовой формы) путём засветки можно, только изготовив специальную амплитудную маску либо применив метод сканирования. В данной работе мы рассмотрим возможность получения однородного распределения постоянной составляющей показателя преломления, используя как для записи периодической структуры, так и для аподизации только имеющийся гауссов пучок. А именно, применение гомогенной засветки волоконного световода гауссовым пучком в точках  $z_1$  справа и  $-z_2$  слева от центра ВБР с гауссовой огибающей

$$\Delta n(z) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right) \left[1 + s \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right)\right] + \Delta n_1 \exp\left[-\frac{2(z - z_1)^2}{w^2}\right] + \Delta n_2 \exp\left[-\frac{2(z + z_2)^2}{w^2}\right] \quad (6)$$

позволяет обеспечить постоянство среднего значения показателя преломления вдоль ВБР на отрезке от  $-w$  до  $w$  с точностью  $\sim 10\%$  при  $z_1 \approx z_2 \approx w$  и  $\Delta n_1 \approx \Delta n_2 \approx \Delta n_0$ .

### 3. Эксперимент

Для реализации интерференционных схем записи ВБР ранее нами был создан источник когерентного УФ излучения повышенной мощности [8]. Внутррезонаторное удвоение частоты аргонового лазера ( $\lambda = 488$  нм) с широкоапертурной газоразрядной трубкой позволяет получить в непрерывном режиме УФ излучение мощностью до 1 Вт (с длиной когерентности  $\sim 5$  см), оптимальное для

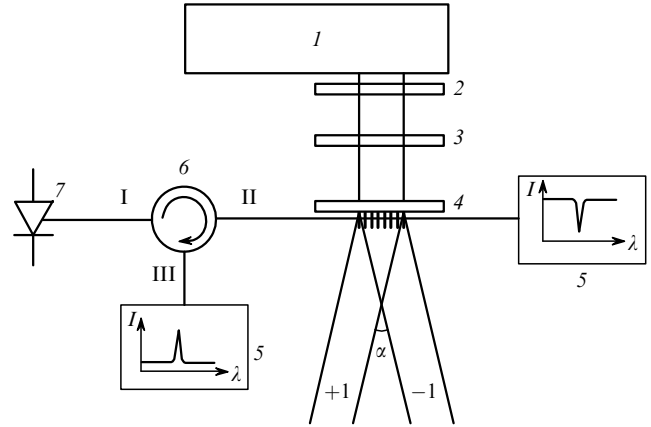


Рис.1. Схема эксперимента: 1 – УФ лазер; 2 – расширитель пучка; 3 – цилиндрическая линза; 4 – фазовая маска; 5 – оптический спектроанализатор; 6 – циркулятор; 7 – светоизлучающий диод; I, II, III – порты.

записи ВБР в области максимального поглощения ( $\lambda \sim 240$  нм) легированных германием волоконных световодов. В качестве нелинейного элемента использовался кристалл ВВО.

На рис.1 представлена реализованная интерференционная схема. Излучение УФ лазера 1 через фазовую маску 4 попадает на свободный от защитного полимерного покрытия волоконный световод, который располагается вплотную к фазовой маске, т. е. в области интерференции волн, дифрагировавших в  $+1$ -й и  $-1$ -й порядки фазовой маски. Профиль штрихов фазовой маски обеспечивает подавление нулевого порядка дифракции до 7% и сосредоточение в  $+1$ -м и  $-1$ -м порядках 75% энергии (что в первом приближении соответствует видности интерференционной картины  $s = 0.75$ ). Цилиндрическая линза 3 фокусирует излучение вдоль волоконного световода, обеспечивая увеличение интенсивности до  $\sim 100$  Вт/см<sup>2</sup>. Все эксперименты проводились примерно в одинаковых условиях. Использование расширителя пучка 2 позволяет изменить область засветки вдоль волоконного световода. Для регистрации спектральных характеристик применяется оптический спектроанализатор 5 с разрешением до 0.017 нм и широкополосный светоизлучающий диод 7. Для регистрации спектров отражения дополнительно применяется циркулятор 6, обеспечивающий однонаправленное пропускание из порта I в II и из порта II в III.

В экспериментах использовалось волокно AllWave™. Для увеличения фоточувствительных свойств волоконный световод предварительно был выдержан в атмосфере водорода при давлении 100 атм в течение  $\sim 10$  дней [4].

Была проведена серия экспериментов по записи ВБР гауссовым пучком с радиусом  $w = 3.5 \pm 0.4$  и  $1.1 \pm 0.2$  мм. На рис.2 и 3 показаны спектры отражения ВБР для различных времён засветки. В процессе записи резонансный пик смещается в длинноволновую часть спектра и уширяется. На определённом этапе в спектре появляются боковые резонансы в коротковолновой области. При этом у длинной ВБР спектр уже, чем у короткой, в примерном соответствии с формулой (3).

На рис.4 показана зависимость изменения наведённого показателя преломления  $\Delta n_{dc}$  от времени экспозиции, определённого из аппроксимации экспериментальных спектров теоретическими кривыми, рассчитанными численно, что соответствует изменению резонансной длины волны ВБР  $\lambda_{Br} = 2(n_0 + \Delta n_{dc})\Lambda$ . Динамика записи ре-

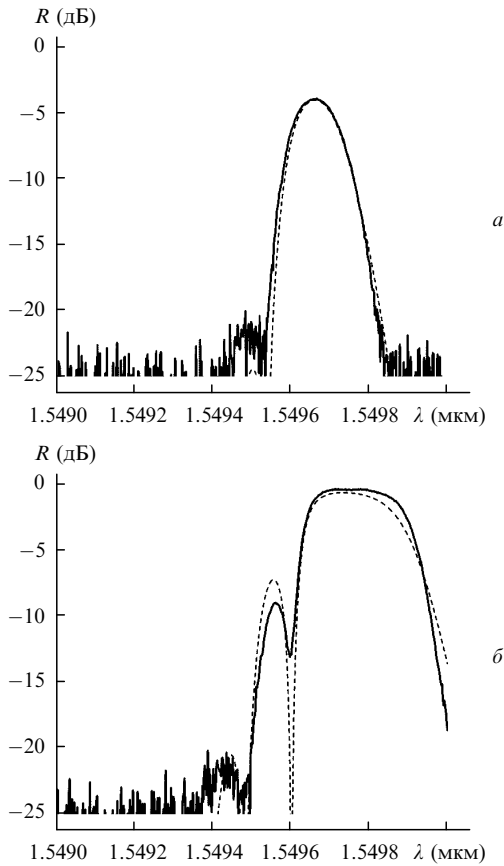


Рис.2. Коэффициент отражения  $R$  в зависимости от длины волны  $\lambda$  для ВБР при  $w = 3.5 \pm 0.4$  мм и времени экспозиции 52 (а) и 120 с (б). Штриховые кривые – результаты численного моделирования спектра ВБР, описываемой формулой (4), при  $w = 3.89$  мм,  $s = 0.75$ ,  $n_0A = 0.7748$  мкм,  $\Delta n_0 = 0.1 \times 10^{-3}$  (а) и  $0.27 \times 10^{-3}$  (б).

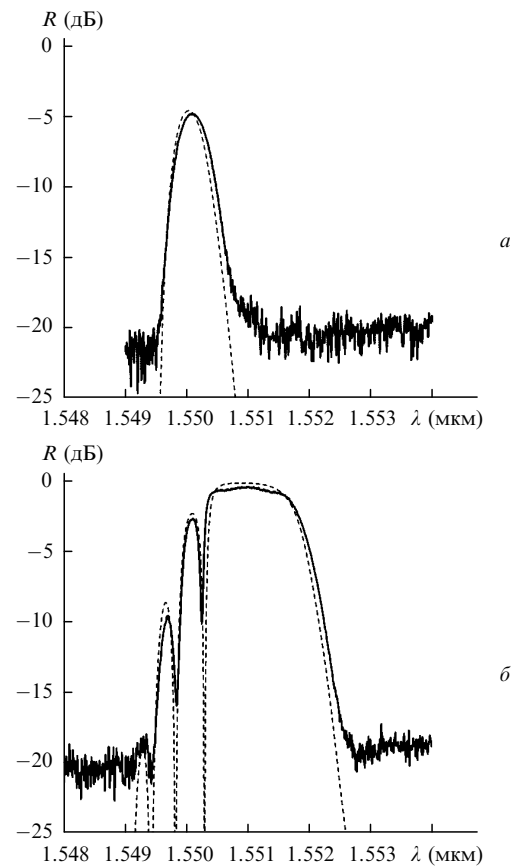


Рис.3. Коэффициент отражения  $R$  в зависимости от длины волны  $\lambda$  для ВБР при  $w = 1.1 \pm 0.2$  мм и времени экспозиции 15 (а) и 100 с (б). Штриховые кривые – результаты численного моделирования спектра ВБР, описываемой формулой (4), при  $w = 1$  мм,  $s = 0.75$ ,  $n_0A = 0.7748$  мкм,  $\Delta n_0 = 0.37 \times 10^{-3}$  (а) и  $1.6 \times 10^{-3}$  (б).

щёток достаточно хорошо изучена и в нашем случае соответствует общеизвестной [1, 2]. В условиях эксперимента наведённый показатель преломления в первом приближении линейно изменялся с ростом дозы облучения, которая при фиксированной мощности УФ лазера пропорциональна времени облучения.

Использование для записи ВБР интерференции гауссовых пучков позволило получить спектр с амплитудой боковых резонансов менее  $-20$  дБ, коэффициентом отражения до 30 % и шириной по уровню  $-3$  дБ от  $\sim 0.13$  нм (рис.2,а) до  $\sim 0.58$  нм (рис.3,а). При увеличении коэффициента отражения появлялись боковые резонансы, связанные с интерференционным эффектом (см. рис.2,б и 3,б). Для их подавления мы использовали гомогенную засветку, выравнивающую значение среднего наведённого показателя преломления вдоль ВБР. Для этого согласно формуле (6) волоконный световод после записи ВБР гауссовым УФ пучком с радиусом  $w = 1.1 \pm 0.2$  мм смещался вправо и влево на расстояние 1 мм (близкое к радиусу пучка) и засвечивался тем же пучком с примерно равной экспозицией, но уже без фазовой маски. На рис.5 представлен исходный спектр ВБР и спектр ВБР после амплитудной засветки гауссовым пучком, на вставках приведены соответствующие профили наведённого показателя преломления. Данная техника позволила получить спектр высокоотражающей решётки с подавлением боковых резонансов до уровня, не превышающего  $-20$  дБ, который определялся чувствительностью использованной регистрирующей аппаратуры.

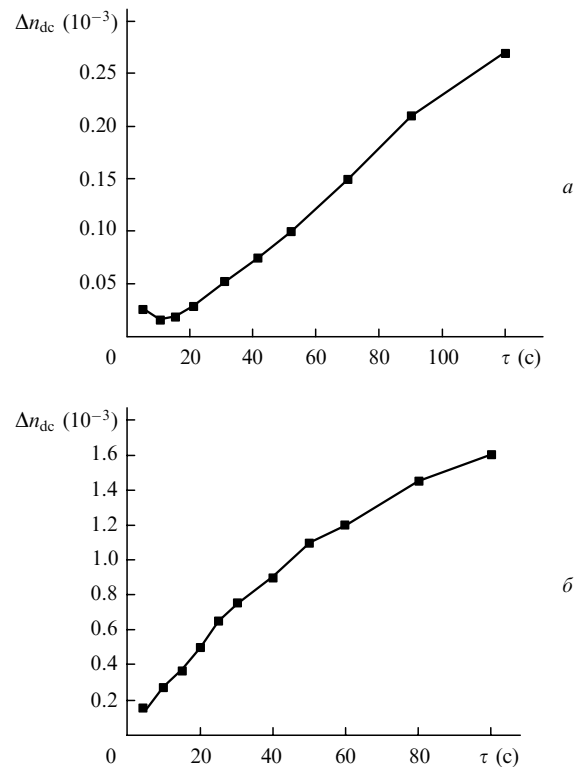


Рис.4. Изменение наведённого показателя преломления  $\Delta n_{dc}$  в зависимости от времени экспозиции  $\tau$  для ВБР при  $w = 3.5 \pm 0.4$  (а) и  $1.1 \pm 0.2$  мм (б).

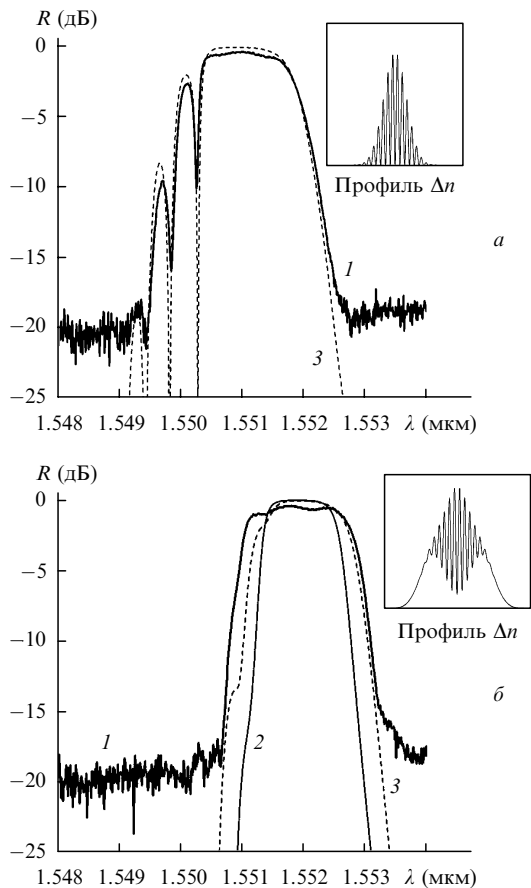


Рис. 5. Спектр решётки (1) до (а) и после (б) амплитудной засветки и результаты численного моделирования формы спектра ВБР, описываемой формулой (6), при  $w = 1$  мм,  $s = 0.75$ ,  $n_0\Lambda = 0.7748$  мкм,  $\Delta n_0 = \Delta n_{1,2} = 1.6 \times 10^{-3}$  для симметричной амплитудной засветки при  $z_1 = z_2 = 1$  мм (2) и несимметричной амплитудной засветки при  $z_1 = 0.8$  мкм,  $z_2 = 1.2$  мм (3).

#### 4. Численное моделирование

Для сравнения результатов эксперимента с теорией проводилось численное моделирование спектра ВБР. Рассмотрим исходные уравнения. Известно, что распространение одномерной скалярной монохроматической волны в среде описывается волновым уравнением [9]

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = 0, \quad (7)$$

где  $E = E(z)$  – скалярное поле, точнее одна из компонент вектора электромагнитного поля;  $k = k_0 n(z)$ ;  $k_0$  – волновое число световой волны в вакууме;  $n$  – заданный показатель преломления среды.

Рассматривалась задача о рассеянии (частичном отражении) волны с единичной амплитудой, падающей слева на область неоднородности – отрезок  $(-L/2, L/2)$ . В этом случае поле  $E$  при  $z \leq -L/2$  представляется в виде

$$E = A_1 \exp(ik_1 z) + B_1 \exp(-ik_1 z),$$

где  $A_1$  и  $B_1$  – комплексные амплитуды падающей и отраженной волн соответственно;  $k_1 = k_0 n_0$  – волновое число;

$$|A_1| = 1. \quad (8)$$

При  $z \geq L/2$  имеется только прошедшая волна  $E = A_2 \exp(ik_1 z)$  с комплексной амплитудой  $A_2$ . Поле  $E$  внутри

отрезка  $(-L/2, L/2)$  и амплитуды  $A_2, B_1$  определялись в результате численного решения уравнения (7). В силу линейности уравнения (7) можно задать начальные условия на правой границе, решить уравнение, а затем полученное решение домножить на некоторый коэффициент  $K_c$ , чтобы оно удовлетворяло условию (8). Поскольку фаза волнового решения (7) определена с точностью до постоянного сдвига, а амплитуда – с точностью до постоянного множителя, комплексная амплитуда  $A_2$  произвольна и была задана в виде

$$A_2 = (1, 0). \quad (9)$$

Коэффициент  $K_c$  определялся по формуле  $K_c = 1/|\tilde{A}_1|$ , где  $\tilde{A}_1$  – амплитуда падающей волны, найденная из решения уравнения (7) при условии (8).

Для решения исходного уравнения (7) использовались два численных метода: метод Т-матрицы (см., напр., [10]) и метод Рунге – Кутты четвертого порядка [11]. Методом Т-матрицы здесь называется следующая процедура. Распределение коэффициента преломления  $n(z)$  аппроксимируется кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией. Точное решение на каждой ступеньке известно и может быть записано в виде

$$E = A_j \exp(ik_j z) + B_j \exp(-ik_j z),$$

где  $j$  – номер ступеньки;  $A_j$  и  $B_j$  – комплексные амплитуды волн;  $k_j = k_0 n_j$ ;  $n_j$  – показатель преломления на  $j$ -й ступеньке. Между соседними ступеньками задаются условия непрерывности функции  $E$  и её первой производной. Метод является точным, если функция  $n(z)$  ступенчатая, в случае же гладкой функции  $n(z)$  порядок точности совпадает с порядком аппроксимации функции  $n(z)$ .

Для численного расчета использовались программы, предоставленные авторами работы [12], в которых вычислялась амплитуда и фаза коэффициента отражения, а также групповая задержка для среды с заданным неоднородным распределением коэффициента преломления. Входные данные для программ (значения координаты в возрастающем порядке и соответствующие им значения коэффициента преломления) задавались в программе Mathematica. Проводилась проверка на сходимость численной процедуры, которая заключалась в определении оптимальной длины решётки (области интегрирования) и оптимального шага расчёта. Для решётки с гауссовым профилем показателя преломления её достаточная длина была равна  $4w$ , при дальнейшем увеличении длины несовпадение с предыдущим результатом расчёта составляет менее  $-30$  дБ (меньше предела чувствительности экспериментальной установки). Оптимальный шаг расчёта получился равным  $0.075$  мкм, при дальнейшем уменьшении шага несовпадение также меньше  $-30$  дБ.

Сначала рассчитывался спектр решётки с гауссовым профилем наведённого показателя преломления (4). В результате моделирования для коэффициента отражения  $R \sim 1$  получены следующие основные зависимости.

С увеличением параметра  $\Delta n_0$  возрастают ширина и амплитуда основного пика, растет амплитуда боковых резонансов и соответственно увеличивается число резонансов с относительной амплитудой более  $-20$  дБ, при этом расстояние между резонансами остаётся практически неизменным. Это отвечает тому, что с увеличением амплитуды модуляции показателя преломления при не-

изменной ширине гауссова распределения эффективная база интерферометра не меняется, но увеличивается ширина спектра в соответствии с оценочной формулой (3). Результаты моделирования для условий эксперимента достаточно хорошо согласуются с измеренными спектрами ВБР (рис.2 и 3).

С увеличением радиуса  $w$  при постоянном  $\Delta n_0$  ширина и амплитуда основного резонанса меняются менее значительно, чем при увеличении  $\Delta n_0$ , но при этом боковые резонансы сильно сгущаются (уменьшается расстояние между ними) и соответственно увеличивается число резонансов с амплитудой более  $-20$  дБ. Качественное объяснение этого состоит в том, что при увеличении параметра  $w$  растет эффективная интерференционная база, вследствие чего уменьшается интервал между резонансами. Сравнение экспериментальных кривых (и соответствующих им расчётных кривых) с близкими значениями наведённого показателя преломления, но сильно различающимися длинами решётки (ср. рис.2,б и рис.3,а) наглядно демонстрирует уменьшение интервала между нулями коэффициента отражения при увеличении длины решётки.

С увеличением видности интерференционной картины  $s$  происходит увеличение глубины модуляции показателя преломления, что проявляется в увеличении амплитуды и ширины основного пика и боковых резонансов.

Для расчёта ВБР, аподизированной с помощью дополнительной гауссовой засветки, использовалась формула (6). В результате моделирования было выявлено, что наилучшее подавление боковых резонансов наблюдается при близких амплитудах промодулированной и гомогенной гауссовых составляющих ( $\Delta n_0 \approx \Delta n_1 \approx \Delta n_2$ ) и симметричной засветке со смещением, примерно равным радиусу пучка ( $z_1 \approx z_2 \approx w$ ).

Численный анализ чувствительности формы спектра к отклонению параметров от оптимальных показал, что боковые резонансы становятся заметными при одновременном отклонении смещений  $z_{1,2}$  в меньшую сторону от оптимального значения  $z_1 \approx z_2 < w$ . К аналогичному эффекту приводит одновременное уменьшение амплитуды гомогенной засветки  $\Delta n_1 \approx \Delta n_2 < n_0$ . При этом ширина основного резонанса в обоих случаях меняется слабо. Отметим, что изменение только одного из параметров  $z_{1,2}$  при фиксированном значении другого вблизи оптимального значения  $z_{1,2} \approx w$  (и аналогично изменение  $\Delta n_{1,2}$  при фиксированном  $\Delta n_{1,2} \approx \Delta n_0$ ) не приводит к сильному росту амплитуды боковых резонансов, но при этом значительно уширяется основной резонанс.

Сравнение данных эксперимента с дополнительной гомогенной засветкой (рис.5,б) и результатов численного расчёта с параметрами, примерно соответствующими оптимальным, реализованным в эксперименте, показывает, что вследствие засветки боковые резонансы подавляются до уровня менее  $-20$  дБ как в теории, так и в эксперименте. При этом положение основного резонанса в эксперименте соответствует расчётному, однако его ши-

рина несколько больше теоретической (рис.5,б, кривая 2). Учёт в расчёте небольшой асимметрии сдвига  $z_2 - z_1 \sim 0.4$  мм (что было возможно из-за реальных условий эксперимента) приводит к уширению резонанса (кривая 3) практически до полного совпадения его с экспериментальным спектром.

## 5. Заключение

Теоретическое обоснование и экспериментальная реализация предложенного нами метода аподизации ВБР показали, что гауссов профиль излучения позволяет реализовать простую технику записи высокоотражающих ВБР с подавлением боковых резонансов до уровня менее  $-20$  дБ. Методика состоит в дополнительной (после записи ВБР с гауссовым профилем наведённого показателя преломления) засветке волоконного световода гомогенным гауссовым пучком с двух сторон от середины ВБР со сдвигом на величину, близкую к радиусу гауссова пучка. Это приводит к выравниванию среднего значения показателя преломления и устранению эффективного резонатора, приводящего к появлению боковых резонансов в коротковолновой части спектра ВБР. Численное моделирование спектра ВБР с гауссовым профилем продемонстрировало хорошее согласие эксперимента с расчётом, позволило найти оптимальные параметры дополнительной засветки и проанализировать чувствительность формы спектра к отклонению параметров от оптимальных.

Авторы выражают благодарность О.В.Белаю за помощь в численном расчёте, а Д.В.Чуркину за помощь в эксперименте. Работа выполнена при финансовой поддержке ФАНИ Министерства образования и науки РФ (проекты № НШ-7214.2006.2 и 2006-РП-19.0/001/644), программ Президиума и ОФН РАН, а также интеграционных проектов СО РАН (3.11; 31).

1. Kashyap R. *Fiber Bragg Gratings* (San Diego: Acad. Press, 1999).
2. Васильев С.А., Медведков О.И., Королев И.Г., Божков А.С., Курков А.С., Дианов Е.М. *Квантовая электроника*, **35**, 1085 (2005).
3. Meltz G., Morey W.W., Glenn W.H. *Opt. Lett.*, **14**, 823 (1989).
4. Lemaire P.J., Atkins R.M., Mizrahi V., Reed W.A. *Electron. Lett.*, **29**, 1191 (1993).
5. Erdogan T. *J. Lightwave Technol.*, **15**, 1277 (1997).
6. Othonos A., Kalli K. *Fiber Bragg Gratings: Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing* (Norwood: Artech Hous, 1999).
7. Mizrahi V., Sipe J.E. *J. Lightwave Technol.*, **11**, 1513 (1993).
8. Абдуллина С.Р., Бабин С.А., Власов А.А., Каблуков С.И. *Квантовая электроника*, **35**, 857 (2005).
9. Ярив А., Юх П. *Оптические волны в кристаллах* (М.: Мир, 1987).
10. Коткин Г.Л., Ткаченко О.А., Ткаченко В.А. *Лабораторные работы по квантовой механике* (Новосибирск: Изд-во НГУ, 1987).
11. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Наука, 1965).
12. Belai O.V., Podivilov E.V., Shapiro D.A. *Opt. Commun.* (2006) (in press).