

# Когерентное распространение короткого импульса поляризованного излучения в одномерной резонансной брэгговской решётке

А.И.Маймистов, В.В.Поликарпов

*Рассмотрено распространение оптического УКИ в резонансной брэгговской решётке с учетом поляризации электромагнитного излучения. Предполагается, что решётка образована тонкими плёнками, содержащими двухуровневые атомы с трехкратно вырожденным верхним энергетическим уровнем. Выведена система уравнений для огибающих электромагнитных импульсов, распространяющихся в такой решётке в противоположных направлениях. В длинноволновом (континуальном) приближении получена система уравнений, обобщающая ранее известную систему в случае скалярных волн. Найдены решения, отвечающие стационарным импульсам эллиптической (в частности, линейной и круговой) поляризации излучения. Произвольная степень эллиптичности возможна только в среде с предварительно подготовленным состоянием резонансных атомов.*

**Ключевые слова:** брэгговская решётка, поляризованное излучение, когерентное распространение импульса.

## 1. Введение

Одним из объектов нелинейной оптики, довольно давно привлекающих внимание, является локализованная электромагнитная волна в нелинейной среде, линейный показатель преломления которой периодически меняется вдоль направления её распространения. Если волновые векторы распространяющихся в противоположных направлениях волн связаны условием Брэгга, то такие локализованные волны принято называть брэгговскими солитонами, а сами среды – брэгговскими решётками или одномерными фотонными кристаллами [1–3]. Периодически меняться может не только линейный показатель преломления – чередующиеся слои линейного и нелинейного материала дают пример нелинейной брэгговской решётки. В [4, 5] была рассмотрена однородная линейная диэлектрическая среда, в которой с шагом  $a$  расположены параллельно друг другу тонкие плёнки, содержащие резонансные примеси. Такая среда получила название резонансной брэгговской решётки (РБР). Слова «тонкая пленка» здесь означают, что толщина плёнки  $l_f$  меньше длины волны излучения, проходящего через такую среду. С использованием модели двухуровневых атомов, взаимодействующих с оптическим УКИ, было показано [5–11], что в РБР может распространяться стационарный импульс, подобный  $2\pi$ -импульсу самоиндуцированной прозрачности. Установлено [9], что помимо светлых солитонов в РБР могут распространяться также тёмные брэгговские солитоны. Учёт диполь-дипольного взаимодействия между резонансными атомами выполнен в [12]. Многие результаты исследований в этой об-

ласти представлены в обзоре [13]. Недавно с помощью численного моделирования было показано, что в РБР существует нестационарный импульс, который выглядит как  $2\pi$ -импульс с периодически меняющейся скоростью распространения – оптический зумерон [14]. В [14] получено также приближенное аналитическое выражение, с хорошей точностью описывающее этот импульс.

Во всех упомянутых здесь исследованиях предполагалось, что электромагнитное поле все время линейно поляризовано. Такое предположение справедливо, если состояния двухуровневого атома – синглетные. Оно остается справедливым, если одно или оба состояния являются дуплетными, но излучение поляризовано по кругу. Поляризационные свойства брэгговских солитонов в РБР могут оказаться непростыми, если энергетические уровни атомов вырождены по проекциям угловых моментов [15–17].

В настоящей работе будет рассмотрена наиболее простая модель примесных атомов в тонкой плёнке, которая позволяет проанализировать возможности распространения стационарного импульса электромагнитного поля, т. е. векторного брэгговского солитона (ВБС). Будут выведены точные уравнения для амплитуд волн, распространяющихся в противоположных направлениях в РБР. Для УКИ, длительность которых меньше всех времен релаксации резонансной среды, в длинноволновом приближении можно получить систему уравнений Максвелла–Блоха. Эта система служит обобщением уравнений скалярной теории брэгговских солитонов в РБР, решения которой описывают различные ВБС.

## 2. Уравнения связи

Пусть оптический импульс распространяется вдоль оси  $x$ , пересекая последовательно тонкие изотропные плёнки, расположенные в плоскостях с координатами  $\dots x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \dots$  (рис.1). Между слоями среда имеет диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ . Ради определённости

А.И.Маймистов, В.В.Поликарпов. Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31;  
e-mail: amaimistov@hotmail.com, anywhere@mtu-net.ru

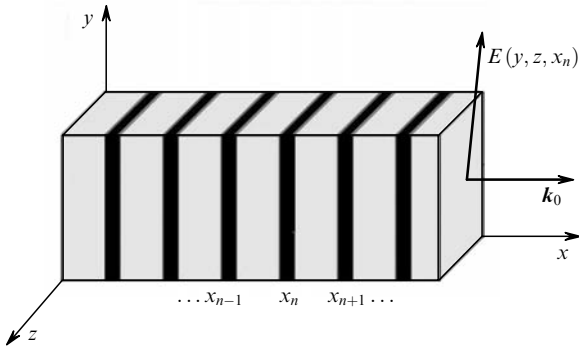


Рис.1. Схематическая структура брэгговской решётки, образованной слоями резонансных атомов.

рассмотрим волну типа ТЕ. Предположим, что векторы напряжённости полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости тонких плёнок. Эти векторы, как и поляризация атомов  $\mathbf{P}$ , находящихся внутри тонкой плёнки, представляются интегралами

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \exp(-i\omega t + i\mathbf{r}\mathbf{k}_{\perp}) \mathbf{E}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega),$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \exp(-i\omega t + i\mathbf{r}\mathbf{k}_{\perp}) \mathbf{H}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega),$$

$$\mathbf{P}(x_n, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \exp(-i\omega t + i\mathbf{r}\mathbf{k}_{\perp}) \mathbf{P}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega).$$

Здесь вектор  $\mathbf{k}_{\perp}$  лежит в плоскости, нормальной к направлению распространения волн. Вне плёнки фурье-компоненты векторов  $\mathbf{E}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)$  и  $\mathbf{H}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)$  определяются уравнениями Максвелла, а при  $x = x_n$  – условием непрерывности, так что для рассматриваемого случая поперечных волн приходим к анализу системы уравнений

$$\frac{d^2 E_j}{dx^2} + k_0 \varepsilon E_j = 0, \quad j = z, y, \quad (1a)$$

$$H_z = -\frac{i}{k_0} \frac{dE_y}{dx}, \quad H_y = \frac{i}{k_0} \frac{dE_z}{dx}$$

с граничными условиями

$$E_z(x_n - 0) = E_z(x_n + 0),$$

$$H_z(x_n + 0) - H_z(x_n - 0) = 4\pi i k_0 P_y(\mathbf{k}_{\perp}, \omega), \quad (16)$$

$$E_y(x_n - 0) = E_y(x_n + 0),$$

$$H_y(x_n + 0) - H_y(x_n - 0) = -4\pi i k_0 P_z(\mathbf{k}_{\perp}, \omega).$$

Здесь  $k_0 = \omega/c$ . Решение уравнений (1a) в области  $x_n < x < x_{n+1}$  записывается как

$$E_y(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = A_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[iq(x - x_n)]$$

$$+ B_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[-iq(x - x_n)],$$

$$E_z(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = C_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[iq(x - x_n)]$$

$$+ D_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[-iq(x - x_n)],$$

$$H_z(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = qk_0^{-1} \{ A_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[iq(x - x_n)]$$

$$- B_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[-iq(x - x_n)] \},$$

$$H_y(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = -qk_0^{-1} \{ C_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[iq(x - x_n)]$$

$$- D_n(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \exp[-iq(x - x_n)] \},$$

где  $q = k_0 \sqrt{\varepsilon}$ . Следовательно, амплитуды  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$  определяют электромагнитное поле в исследуемой среде. Рассмотрим точку  $x_n$ . Электрическое поле при  $x = x_n - \delta x$  ( $\delta x \ll a$ ) определяется амплитудами  $A_n^L$ ,  $B_n^L$ ,  $C_n^L$  и  $D_n^L$ , а поле при  $x = x_n + \delta x$  – амплитудами  $A_n^R$ ,  $B_n^R$ ,  $C_n^R$  и  $D_n^R$ . Условия непрерывности (16) позволяют установить соотношение между этими амплитудами:

$$A_n^R + B_n^R = A_n^L + B_n^L,$$

$$A_n^R - B_n^R = A_n^L - B_n^L + 4\pi i k_0^2 q^{-1} P_{yn}, \quad (2)$$

$$C_n^R + D_n^R = C_n^L + D_n^L,$$

$$C_n^R - D_n^R = C_n^L - D_n^L + 4\pi i k_0^2 q^{-1} P_{zn},$$

где  $P_{jn} = P_j(A_n^R + B_n^R, C_n^R + D_n^R)$  – декартовы компоненты вектора поверхностной поляризации тонкой пленки в точке  $x_n$ , индуцированной электрическим полем внутри этой плёнки. Из уравнений (2) можно найти, что

$$A_n^R = A_n^L + 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{yn}, \quad B_n^R = B_n^L - 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{yn}, \quad (3)$$

$$C_n^R = C_n^L + 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{zn}, \quad D_n^R = D_n^L - 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{zn}.$$

Учитывая зависимость напряжённости электрического поля от  $x$  в пространстве между плёнками, получаем

$$A_{n+1}^L = A_n^R \exp(iqa), \quad B_{n+1}^L = B_n^R \exp(-iqa), \quad (4)$$

$$C_{n+1}^L = C_n^R \exp(iqa), \quad D_{n+1}^L = D_n^R \exp(-iqa).$$

Выражения (3) и (4) позволяют записать рекуррентные соотношения

$$A_{n+1}^L = A_n^L \exp(iqa) + 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{yn} \exp(iqa),$$

$$B_{n+1}^L = B_n^L \exp(-iqa) - 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{yn} \exp(-iqa), \quad (5)$$

$$C_{n+1}^L = C_n^L \exp(iqa) + 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{zn} \exp(iqa),$$

$$D_{n+1}^L = D_n^L \exp(-iqa) - 2\pi i k_0^2 q^{-1} P_{zn} \exp(-iqa).$$

В дальнейшем верхний индекс у амплитуд может быть опущен. Уравнения (5) являются точными уравнениями, аналогичными дифференциальным уравнениям метода связанных волн, но здесь не использовались никакие предположения относительно скорости изменения амплитуд электромагнитного поля или условий резонанса. Если считать, что шаг решётки  $a$  зависит от номера узла, в котором расположена тонкая плёнка, то получится модель неоднородной решётки.

### 3. Уравнения связи в континуальном пределе

Предположим, что выполняется неравенство  $a\Delta q = aq - 2\pi \ll 1$ , которое отвечает условию брэгговского резонанса [4, 5]. В этом случае амплитуды прямой и обратной волн меняются медленно в масштабе порядка нескольких межплоскостных расстояний и можно перейти от дискретных уравнений (5) к дифференциальным уравнениям. Такие приближенные уравнения отвечают континуальному (или длинноволновому) пределу в исходной задаче. Обозначив  $na = x$  (где  $n$  – целое число), перепишем уравнения (5) в виде системы дифференциальных уравнений, которая может быть получена стандартным образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= i\Delta q A + iKP_y, & \frac{\partial B}{\partial x} &= -i\Delta q B - iKP_y, \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= i\Delta q C + iKP_z, & \frac{\partial D}{\partial x} &= -i\Delta q D - iKP_z, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $K = 2\pi k_0^2 q^{-1}$ ;  $\Delta q = q - 2\pi/a$ . В этих уравнениях  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  являются фурье-компонентами быстро меняющихся во времени амплитуд электромагнитных полей, распространяющихся в противоположных направлениях. Если рассматривать квазигармонические волны, то можно использовать связь между фурье-компонентами медленно меняющихся огибающих импульсов  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$  и величинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  [15]:

$$\begin{aligned} A(\omega_0 + \omega) &= \tilde{A}(\omega), & B(\omega_0 + \omega) &= \tilde{B}(\omega), \\ C(\omega_0 + \omega) &= \tilde{C}(\omega), & D(\omega_0 + \omega) &= \tilde{D}(\omega). \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (6) следует система

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} &= i\Delta q(\omega_0 + \omega)\tilde{A} + iK(\omega_0 + \omega)\tilde{P}_y, \\ \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} &= -i\Delta q(\omega_0 + \omega)\tilde{B} - iK(\omega_0 + \omega)\tilde{P}_y, \\ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} &= i\Delta q(\omega_0 + \omega)\tilde{C} + iK(\omega_0 + \omega)\tilde{P}_z, \\ \frac{\partial \tilde{D}}{\partial x} &= -i\Delta q(\omega_0 + \omega)\tilde{D} - iK(\omega_0 + \omega)\tilde{P}_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Медленность изменения во времени огибающих импульсов означает, что соответствующие им фурье-компоненты отличаются от нуля только при малых значениях аргументов, т. е. только при  $\omega \ll \omega_0$ . Для коэффициентов в уравнениях (7) используются приближенные выражения

$$\Delta q(\omega_0 + \omega) \approx q_0 - \frac{2\pi}{a} + q_1\omega + \frac{q_2\omega^2}{2}, \quad (8)$$

$$K(\omega_0 + \omega) \approx K_0.$$

Здесь  $q_m = d^m q(\omega)/d\omega^m$  (где  $m = 0, 1, 2$ ) при  $\omega = \omega_0$ . В частности,  $q_0$  является волновым числом, а  $q_1^{-1} = v_g$  – групповой скоростью. Возвращаясь к динамическим переменным

$$\mathcal{A}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega, x) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

$$\mathcal{B}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\omega, x) \exp(-i\omega t) d\omega \text{ и т. д.,}$$

с учётом разложений (8) можно получить уравнения, описывающие эволюцию медленно меняющихся огибающих:

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{A} - \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} + \Delta q_0 \mathcal{A} &= -K_0 \mathcal{P}_y, \\ i \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{B} + \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} - \Delta q_0 \mathcal{B} &= +K_0 \mathcal{P}_y, \\ i \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{C} - \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial t^2} + \Delta q_0 \mathcal{C} &= -K_0 \mathcal{P}_z, \\ i \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{D} + \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial t^2} - \Delta q_0 \mathcal{D} &= +K_0 \mathcal{P}_z, \end{aligned} \quad (9)$$

где медленно меняющаяся во времени поляризация определяется через параметры двухуровневых атомов тонких плёнок;  $\Delta q_0 = q_0 - 2\pi/a$ .

В уравнениях (9) электромагнитное поле импульса представлено проекциями векторов в декартовых координатах. При обсуждении явлений, связанных с изменением вектора поляризации электромагнитной волны, часто вместо декартовых координат используются сферические. В этих координатах напряжённость электрического поля излучения с правой ( $E^{(+)}$ ) и левой ( $E^{(-)}$ ) круговыми поляризациями определяется выражением  $E^{(\pm)} = E_y \pm iE_z$ . Сферические координаты вектора поляризации атомов плёнки определяются аналогично:  $P^{(\pm)} = P_y \pm iP_z$ . Соответствующие комплексные огибающие импульсов могут быть записаны как  $\mathcal{A}^{(\pm)} = \mathcal{A} \pm i\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B}^{(\pm)} = \mathcal{B} \pm i\mathcal{D}$  и  $\mathcal{P}^{(\pm)} = \mathcal{P}_y \pm i\mathcal{P}_z$ . Уравнения (9) трансформируются в следующую систему уравнений:

$$i \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{A}^{(\pm)} - \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}^{(\pm)}}{\partial t^2} + \Delta q_0 \mathcal{A}^{(\pm)} = -K_0 \mathcal{P}^{(\pm)}, \quad (10a)$$

$$i \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{B}^{(\pm)} + \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{B}^{(\pm)}}{\partial t^2} - \Delta q_0 \mathcal{B}^{(\pm)} = +K_0 \mathcal{P}^{(\pm)}. \quad (10б)$$

Представленная система уравнений описывает распространение импульса поляризованного излучения в РБР, образованной тонкими плёнками поляризующегося вещества (например, резонансными атомами), с учётом дисперсии групповых скоростей второго порядка. Волны, распространяющиеся в прямом направлении, задаются уравнениями (10a), а волны, распространяющиеся в обратном направлении, – уравнениями (10б).

### 4. Резонансная система

Систему уравнений (10) необходимо дополнить уравнениями, которые определяют эволюцию состояний атомов, образующих тонкие плёнки или погружённых в них. Предположим, что эти атомы могут быть представлены

двухуровневыми атомами с квантовыми переходами между уровнями, вырожденными по проекциям угловых моментов  $j_a$  и  $j_b$  [16, 17], и рассмотрим случай  $j_a = 1 \rightarrow j_b = 0$ . Для матричных элементов матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , описывающей переходы между состояниями  $|a, m\rangle = |j_a = 1, m = \pm 1\rangle$  и  $|b\rangle = |j_b = 0, m = 0\rangle$ , удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \langle a, -1 | \hat{\rho} | a, +1 \rangle, \quad \rho_{13} = \langle a, -1 | \hat{\rho} | b \rangle, \quad \rho_{23} = \langle a, +1 | \hat{\rho} | b \rangle, \\ \rho_{11} &= \langle a, -1 | \hat{\rho} | a, -1 \rangle, \quad \rho_{22} = \langle a, +1 | \hat{\rho} | a, +1 \rangle, \quad \rho_{33} = \langle b | \hat{\rho} | b \rangle, \\ \rho_{kl} &= \rho_{lk}^*, \quad l, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагается, что длительность импульса много меньше всех времён релаксации резонансной системы. Обобщённые уравнения Блоха для этого случая записываются в виде

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho_{13}}{\partial t} &= \hbar \Delta \omega \rho_{13} - d_{13}(\rho_{33} - \rho_{11})A_1^{\text{in}} + d_{23}\rho_{12}A_2^{\text{in}}, \\ i\hbar \frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} &= \hbar \Delta \omega \rho_{23} - d_{23}(\rho_{33} - \rho_{22})A_2^{\text{in}} + d_{13}\rho_{21}A_1^{\text{in}}, \\ i\hbar \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} &= -d_{13}\rho_{32}A_1^{\text{in}} + d_{32}\rho_{13}A_2^{\text{in}*}, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{33} - \rho_{11}) &= 2(d_{13}\rho_{31}A_1^{\text{in}} - d_{31}\rho_{13}A_1^{\text{in}*}) \\ &\quad + (d_{23}\rho_{32}A_2^{\text{in}} - d_{32}\rho_{23}A_2^{\text{in}*}), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{33} - \rho_{22}) &= (d_{13}\rho_{31}A_1^{\text{in}} - d_{31}\rho_{13}A_1^{\text{in}*}) \\ &\quad + 2(d_{23}\rho_{32}A_2^{\text{in}} - d_{32}\rho_{23}A_2^{\text{in}*}). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $d_{kl}$  – матричные элементы оператора дипольного момента;  $A_{1,2}^{\text{in}}$  – медленно меняющиеся огибающие электромагнитных импульсов, действующих на резонансные атомы. В рассматриваемой задаче они определяются выражениями  $A_1^{\text{in}} = \mathcal{A}^{(+)} + \mathcal{B}^{(+)}$  и  $A_2^{\text{in}} = \mathcal{A}^{(-)} + \mathcal{B}^{(-)}$  [15, 18, 19].

Граничными условиями (при  $t \rightarrow -\infty$ ) для недиагональных элементов матрицы плотности  $\hat{\rho}$  являются условия  $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$ . Для диагональных элементов можно положить  $\rho_{33} = 1$ ,  $\rho_{22} = \rho_{11} = 0$ , что соответствует положению атомов в основном состоянии до прихода импульса. Взаимодействие с резонансными атомами определяется через элементы матрицы плотности следующими выражениями:

$$K_0 \mathcal{P}^{(+)} = \frac{2\pi\omega_0 n_{\text{at}} d_{13}}{c\tilde{n}(\omega_0)} \langle \rho_{13} \rangle, \quad K_0 \mathcal{P}^{(-)} = \frac{2\pi\omega_0 n_{\text{at}} d_{13}}{c\tilde{n}(\omega_0)} \langle \rho_{23} \rangle.$$

Здесь угловые скобки обозначают суммирование по всем атомам с частотной отстройкой  $\Delta\omega$  от центра неоднородно уширенной линии поглощения;  $\tilde{n}(\omega_0)$  – показатель преломления диэлектрической среды, в которую погружены плёнки;  $n_{\text{at}}$  – эффективная плотность атомов в тонкой плёнке, определённая через объёмную плотность

атомов  $N_{\text{at}}$ , толщину плёнки  $l_f$  и шаг решётки  $a$  по формуле  $n_{\text{at}} = N_{\text{at}}(l_f/a)$ .

Удобно ввести безразмерные переменные

$$e_1^{(\pm)} = \frac{t_0 d_{13} \mathcal{A}^{(\pm)}}{\hbar}, \quad e_2^{(\pm)} = \frac{t_0 d_{13} \mathcal{B}^{(\pm)}}{\hbar}, \quad \zeta = \frac{z}{v_g t_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad (13)$$

где  $t_0$  – интервал времени, определяющий характерный масштаб, например это может быть длительность исходного импульса. Если обозначить  $\delta = v_g t_0 \Delta\omega_0$  и пренебречь дисперсией групповых скоростей второго порядка, то полученная система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e_1^{(\pm)} + \delta e_1^{(\pm)} &= -\kappa \langle \sigma^{(\pm)} \rangle, \\ i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e_2^{(\pm)} - \delta e_2^{(\pm)} &= +\kappa \langle \sigma^{(\pm)} \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \rho_{13}}{\partial \tau} &= \Delta \rho_{13} - n_1 e_1 + \rho_{12} e_2, \quad i \frac{\partial \rho_{23}}{\partial \tau} = \Delta \rho_{23} - n_2 e_2 + \rho_{12}^* e_1, \\ i \frac{\partial \rho_{12}}{\partial \tau} &= -\rho_{23}^* e_1 + \rho_{13} e_2^*, \\ \frac{\partial n_1}{\partial \tau} &= -4 \text{Im}(\rho_{13} e_1^*) - 2 \text{Im}(\rho_{23} e_2^*), \\ \frac{\partial n_2}{\partial \tau} &= -2 \text{Im}(\rho_{13} e_1^*) - 4 \text{Im}(\rho_{23} e_2^*), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\kappa = v_g t_0 / L_a$ ;  $L_a = cn(\omega_0)\hbar / (2\pi\omega_0 t_0 n_{\text{at}} |d_{13}|^2)$  – длина резонансного поглощения;  $\Delta = \Delta\omega t_0$  – нормированная частотная отстройка;  $n_1 = \rho_{33} - \rho_{11}$  и  $n_2 = \rho_{33} - \rho_{22}$  – разности населённости;  $e_1 = e_1^{(+)} + e_2^{(+)}$ ;  $e_2 = e_1^{(-)} + e_2^{(-)}$ . В уравнениях (14) использованы обозначения  $\sigma^{(+)} = \rho_{13}$  и  $\sigma^{(-)} = \rho_{23}$ .

Если сделать замену переменных

$$e_1^{(\pm)} + e_2^{(\pm)} = f_s^{(\pm)} \exp(i\delta\tau), \quad e_1^{(\pm)} - e_2^{(\pm)} = f_a^{(\pm)} \exp(i\delta\tau), \quad (16)$$

$$\rho_{13} = r_{13} \exp(i\delta\tau), \quad \rho_{23} = r_{23} \exp(i\delta\tau), \quad \rho_{12} = r_{12},$$

то систему уравнений (14), (15) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_s^{(\pm)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_a^{(\pm)}}{\partial \tau} = 0, \quad (17a)$$

$$\frac{\partial f_a^{(\pm)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_s^{(\pm)}}{\partial \tau} = 2i\kappa \langle r^{(\pm)} \rangle, \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial r_{13}}{\partial \tau} &= (\delta + \Delta)r_{13} - n_1 f_s^{(+)} + r_{12} f_s^{(-)}, \\ i \frac{\partial r_{23}}{\partial \tau} &= (\delta + \Delta)r_{23} - n_2 f_s^{(-)} + r_{12}^* f_s^{(+)}, \\ i \frac{\partial r_{12}}{\partial \tau} &= -r_{23}^* f_s^{(+)} + r_{13} f_s^{(-)*}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \tau} = -4 \text{Im}(r_{13} f_s^{(+)*}) - 2 \text{Im}(r_{23} f_s^{(-)*}),$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \tau} = -2 \text{Im}(r_{13} f_s^{(+)*}) - 4 \text{Im}(r_{23} f_s^{(-)*}).$$

Дальнейшие исследования возможны на основе численного решения системы уравнений (17) и (18). Аналитические решения этих уравнений проще всего найти, предположив, что неоднородное уширение линии поглощения можно не учитывать и что условие брэгговского и оптического резонансов  $\delta + \Delta = 0$  выполнено.

## 5. Стационарные решения, описывающие поляризованные солитоны

Если предположить, что все переменные в уравнениях (17) и (18) являются функциями одной переменной  $\xi = \tau + \alpha\zeta$ , то система уравнений в частных производных приводит к системе обыкновенных уравнений, описывающих стационарное распространение прямой и обратной волн. Из уравнений (17а) следует, что

$$\alpha \frac{\partial f_s^{(\pm)}}{\partial \xi} + \frac{\partial f_a^{(\pm)}}{\partial \xi} = 0.$$

Положив, что в некоторой точке пространства (в частности, на бесконечности) поля обращаются в нуль, результат интегрирования этого уравнения дает следующее соотношение:  $\alpha f_s^{(\pm)} + f_a^{(\pm)} = 0$ . Подстановка  $f_a^{(\pm)}$  в (17б) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial f_s^{(+)}}{\partial \xi} = \frac{2i\kappa}{1 - \alpha^2} r_{13}, \quad \frac{\partial f_s^{(-)}}{\partial \xi} = \frac{2i\kappa}{1 - \alpha^2} r_{23}. \quad (19)$$

Уравнения Блоха в этом случае принимают следующий вид:

$$i \frac{\partial r_{13}}{\partial \xi} = -n_1 f_s^{(+)} + r_{12} f_s^{(-)}, \quad (20а)$$

$$i \frac{\partial r_{23}}{\partial \xi} = -n_2 f_s^{(-)} + r_{12}^* f_s^{(+)},$$

$$i \frac{\partial r_{12}}{\partial \xi} = -r_{23}^* f_s^{(+)} + r_{13} f_s^{(-)*}, \quad (20б)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \xi} = -4 \operatorname{Im}(r_{13} f_s^{(+)*}) - 2 \operatorname{Im}(r_{23} f_s^{(-)*}), \quad (20в)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \xi} = -2 \operatorname{Im}(r_{13} f_s^{(+)*}) - 4 \operatorname{Im}(r_{23} f_s^{(-)*}). \quad (20г)$$

Из (19) получаем

$$r_{13} = -\frac{i}{a_0} \frac{\partial f_s^{(+)}}{\partial \xi}, \quad r_{23} = -\frac{i}{a_0} \frac{\partial f_s^{(-)}}{\partial \xi}, \quad (21)$$

где  $a_0 = 2\kappa(1 - \alpha^2)$ . С учетом (21) уравнение (20б) запишется в виде

$$i \frac{\partial r_{12}}{\partial \xi} = -\frac{i}{a_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (f_s^{(+)} f_s^{(-)*}).$$

Откуда следует, что

$$r_{12} = -\frac{1}{a_0} (f_s^{(+)} f_s^{(-)*}). \quad (22)$$

Таким образом, уравнения (20а) приобретают следующий вид:

$$i \frac{\partial r_{13}}{\partial \xi} = -n_1 f_s^{(+)} - \frac{1}{a_0} |f_s^{(-)}|^2 f_s^{(+)}, \quad (23)$$

$$i \frac{\partial r_{23}}{\partial \xi} = -n_2 f_s^{(-)} - \frac{1}{a_0} |f_s^{(+)}|^2 f_s^{(-)}.$$

Исходя из уравнений (23) и (19), можно показать, что если напряжённость электрического поля выбрать вещественной величиной, то переменные  $r_{13}$  и  $r_{23}$  будут мнимыми величинами, т. е.  $f_s^{(+)} = a_1$ ,  $f_s^{(-)} = a_2$ ,  $r_{13} = iu_1$  и  $r_{23} = iu_2$ . Учитывая (21), можно записать уравнения для разностей населённости:

$$\frac{\partial n_1}{\partial \xi} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (2a_1^2 + a_2^2), \quad \frac{\partial n_2}{\partial \xi} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (a_1^2 + 2a_2^2),$$

что даёт

$$n_1 = n_{10} + \frac{1}{a_0} (2a_1^2 + a_2^2), \quad n_2 = n_{20} + \frac{1}{a_0} (a_1^2 + 2a_2^2), \quad (24)$$

где  $n_{10}$  и  $n_{20}$  – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий при  $\xi \rightarrow \infty$ . Если до прихода импульсов резонансная система находилась в неинвертированном состоянии, то параметр  $a_0$  должен быть отрицательным, или  $\alpha^2 > 1$ . Используя определение переменной  $\xi$ , можно получить, что скорость стационарного импульса  $v_{st}$  и групповая скорость  $v_g$  связаны соотношением  $\alpha v_{st} = v_g$ . Следовательно, в среде с неинвертированной населённостью резонансных состояний стационарный импульс движется медленнее, чем линейные волны. Подстановка (24) в (23) с учётом (21) приводит к уравнениям для амплитуд стационарных электромагнитных импульсов

$$\frac{d^2 a_1}{d\eta^2} + (a_1^2 + a_2^2) a_1 - \frac{1}{2} |a_0| n_{10} a_1 = 0, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 a_2}{d\eta^2} + (a_1^2 + a_2^2) a_2 - \frac{1}{2} |a_0| n_{20} a_2 = 0,$$

где  $\eta = \sqrt{2}\xi$ .

Как правило, населённость возбуждённых состояний, отвечающих разным проекциям углового момента, одинакова. Если считать, что в отсутствие УКИ все атомы среды находятся в основном состоянии, то  $n_{10} = n_{20} = 1$ . Эта ситуация отвечает предварительно неполяризованной резонансной среде. Уравнения (25) становятся симметричными по отношению к перестановке индексов вещественных огибающих  $a_1$  и  $a_2$ . Можно нарушить эту симметрию, пропустив, например, через резонансную среду слабое поляризованное по кругу излучение. Если это излучение является непрерывным, то установившаяся разность населённостей между энергетическими уровнями, связанными различными переходами, будет зависеть от интенсивности и типа поляризации данного излучения. Для мощного короткого импульса, который направляется затем в приготовленную таким образом среду, она будет поляризованной, т. е. населённости возбуждённых уровней будут различаться:  $n_{10} \neq n_{20}$ .

Система уравнений (25) ранее встречалась при изучении распространения оптических солитонов в волокнах,

обладающих двулучепреломлением [20, 21]. В некоторых случаях анализ распространения УКИ поляризованного излучения в резонансной или нерезонансной нелинейной среде сводится к решению таких же уравнений [22, 23]. Результаты работ [20–23] можно использовать, чтобы сразу записать частные решения (25). Следуя [20, 21], надо положить  $a_1 = g/f$ ,  $a_2 = h/f$  и переписать (25) в билинейной форме

$$D_y^2(g \cdot f) = b_1^2 g f, \quad D_y^2(h \cdot f) = b_2^2 h f, \quad (26)$$

$$D_y^2(f \cdot f) = g^2 + h^2$$

с использованием  $D$ -операторов Хироты [24]

$$D_y(\tilde{a} \cdot \tilde{b}) \equiv \lim_{x \rightarrow y} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{a}(x) \tilde{b}(y)$$

и обозначений  $2b_1^2 = |a_0|n_{10}$  и  $2b_2^2 = |a_0|n_{20}$ . Для решения билинейных уравнений функции  $g$ ,  $h$ ,  $f$  записываются в форме полиномов, например

$$g = \chi g_1 + \chi^3 g_3, \quad h = \chi h_1 + \chi^3 h_3, \quad f = 1 + \chi^2 f_2 + \chi^4 f_4. \quad (27)$$

Подстановка этих разложений в (26) и приравнивание друг другу коэффициентов при одинаковых степенях  $\chi$  даёт систему зацепляющихся линейных уравнений с переменными коэффициентами [20–23]. Решая эти уравнения одно за другим, можно получить решение системы (26) для выбранных полиномов (27), где  $\chi$  полагается равным единице

$$g = 2\sqrt{2}b_1 \exp \theta_1 [1 + \exp(2\theta_2 + b_{12})],$$

$$h = 2\sqrt{2}b_2 \exp \theta_2 [1 - \exp(2\theta_1 + b_{12})],$$

$$f = 1 + \exp 2\theta_1 + \exp 2\theta_2 + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2b_{12}),$$

где

$$\exp b_{12} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2};$$

$\theta_{1,2} = b_{1,2}(y - y_{1,2})$ ;  $y_{1,2}$  – постоянные интегрирования; прочие постоянные интегрирования были выбраны такими, чтобы получаемое решение отвечало уединённой волне. Теперь решение исходной системы уравнений (25) можно записать в виде

$$a_1(y) = \frac{2\sqrt{2}b_1 \exp \theta_1 [1 + \exp(2\theta_2 + b_{12})]}{1 + \exp 2\theta_1 + \exp 2\theta_2 + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2b_{12})}, \quad (28)$$

$$a_2(y) = \frac{2\sqrt{2}b_2 \exp \theta_2 [1 - \exp(2\theta_1 + b_{12})]}{1 + \exp 2\theta_1 + \exp 2\theta_2 + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2b_{12})}.$$

Это решение содержит важные предельные случаи. Пусть среда приготовлена в состоянии с  $n_{10} \neq 0$ ,  $n_{20} = 0$ . В этом случае  $b_2 = 0$  и  $\exp b_{12} = 1$ . Из (28) тогда следуют выражения  $a_1(y) = \sqrt{2}b_1 \operatorname{sech}[b_1(y - y_1)]$ ,  $a_2(y) = 0$ , описывающие правополяризованный импульс. Аналогично можно получить выражения для левополяризованного по кругу импульса:  $a_1(y) = 0$ ,  $a_2(y) = \sqrt{2}b_2 \operatorname{sech}[b_2(y - y_2)]$ , если среда находится в состоянии с  $n_{10} = 0$  и  $n_{20} \neq 0$ . Скорость распространения такого импульса не зависит

от поляризации и совпадает с той, которая была получена в [4–7] для скалярного поля. Для неполяризованной среды  $b_1 = b_2 = b_0$  и  $\exp b_{12} = 0$ . В этом случае из (28) следуют выражения

$$a_1(y) = \frac{2\sqrt{2}b_0 \exp \theta_1}{1 + \exp 2\theta_1 + \exp 2\theta_2},$$

$$a_2(y) = \frac{2\sqrt{2}b_0 \exp \theta_2}{1 + \exp 2\theta_1 + \exp 2\theta_2}.$$

Если ввести параметр  $y_0$  с помощью уравнения

$$\exp(-2by_0) = \exp(-2by_1) + \exp(-2by_2),$$

то огибающая импульса определяется вектором с компонентами

$$a_{1,2}(y) = \sqrt{2}bl_{1,2} \operatorname{sech}[b(y - y_0)], \quad (29)$$

где

$$l_{1,2} = \exp[b(y_0 - y_{1,2})].$$

Это решение отвечает эллиптически поляризованному стационарному импульсу электромагнитного излучения, распространяющемуся в РБР.

## 6. Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследовано распространение УКИ поляризованного электромагнитного излучения в одномерной РБР, образованной периодически расположенными слоями резонансно поглощающих атомов. В приближении медленно меняющейся огибающей импульсов были выведены уравнения для УКИ прямой и отражённой волн в РБР. Результирующая система уравнений является обобщением уравнений Максвелла–Блоха, которые использовались для описания формирования и распространения резонансного брэгговского солитона скалярного электромагнитного поля.

В работе рассматривались тонкие плёнки, содержащие резонансные атомы, но вместо них могут рассматриваться плёнки, содержащие молекулы, молекулярные агрегаты\*, квантовые точки, металлические наночастицы, микрорезонаторы, капли бозе-конденсата и т. д.

Проведённый анализ возможности распространения ВБС показал, что характер распространения такого импульса зависит от состояния среды. Так, если разность населённостей между основным состоянием и возбуждёнными состояниями с различными проекциями углового момента удовлетворяет условию  $n_{10} = n_{20} = 1$ , то ВБС в одномерной РБР представляет собой импульс эллиптически поляризованного излучения. В частности, поляризованные по кругу и линейно поляризованные ВБС являются тривиальным обобщением стационарных импульсов, известных для скалярной теории РБР [4–13].

Показано, что новое решение системы уравнений Максвелла–Блоха возникает при условии, что резонансная среда была приготовлена предварительно в состоянии с несимметричным распределением населённостей

\* Исследование таких РБР выполнено А.А.Заболотским (Институт автоматизации и электротехники СО РАН, Новосибирск).

возбуждённых состояний с различными проекциями углового момента:  $n_{10} \neq n_{20}$ . В этом случае эллиптичность ВБС меняется внутри самого импульса.

Из полученных результатов не следует, что нет иных уединённых волн, подобных солитонам в фотонных кристаллах и в РБР. Такие волны, если они существуют, не являются стационарными, как бризеры, зумероны или многосолитонные волны. Их распространение можно исследовать, видимо, только численными методами. Опираясь на рассмотренную в данной работе модель, можно изучать отражение импульсов поляризованного излучения от границы решётки, генерацию гармоник в РБР и многомерные ВБС.

Нам доставляет удовольствие поблагодарить Б.И. Манцызова за полезные дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16406).

- De Sterke С.М., Sipe J.E., in *Prog. in Optics* (Amsterdam: Elsevier, 1994, vol. 33, p. 203).
- Kashyap R. *Fiber Bragg Gratings* (San Diego: Acad. Press, 1999).
- Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
- Манцызов Б.И., Кузьмин Р.Н. *Письма в ЖТФ*, **10**, 857 (1984).
- Манцызов Б.И., Кузьмин Р.Н. *ЖЭТФ*, **91**, 65 (1986).
- Kozhekin A., Kurizki G. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 5020 (1995).
- Mantsyzov B.I. *Phys. Rev. A*, **51**, 4939 (1995).
- Mantsyzov B.I., Silnikov E.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, 2203 (2002).
- Opatrny T., Malomed B.A., Kurizki G. *Phys. Rev. E*, **60**, 6137 (1999).
- Blaauboer M., Kurizki G., Malomed B.A. *Phys. Rev. E*, **62**, 57 R (2000).
- Boren Luo, Hong-Yih Tseng, Sien Chi. *J. Opt. Soc. Am. B*, **20**, 1866 (2003).
- Cheng J., Zhou J. *Phys. Rev. E*, **66**, 036606 (2002).
- Kurizki G., Kozhekin A.E., Opatrny T., Malomed B.A., in *Progr. in Optics* (Amsterdam: Elsevier, 2001, vol. 42, pp 93–146).
- Манцызов Б.И. *Письма в ЖТФ*, **82**, 284 (2005).
- Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves* (Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1999).
- Башаров А.М., Маймистов А.И. *ЖЭТФ*, **87**, 1594 (1984).
- Башаров А.М., Маймистов А.И. *ЖЭТФ*, **94**, 61 (1988).
- Рупасов В.И., Юдсон В.И. *Квантовая электроника*, **9**, 2179 (1982).
- Рупасов В.И., Юдсон В.И. *ЖЭТФ*, **93**, 494 (1987).
- Tratnik M.V., Sipe J.E. *Phys. Rev. A*, **38**, 2011 (1988).
- Radhakrishnan R., Lakshmanan M. *J. Phys. A*, **28**, 2683 (1995).
- Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **24**, 963 (1997).
- Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 104 (1999).
- Hirota R., Satsuma J. *Progr. Theor. Phys., Suppl.*, **59**, 64 (1976).