

Об отражении электромагнитного импульса от докритического сужения волновода и от плазмы со сверхкритической плотностью в волноводе

А.А.Рухадзе, В.П.Тараканов

Методом численного моделирования с использованием программы KAPAT исследуются две родственные задачи: отражение TM_{01} -моды электромагнитного импульса от докритического сужения сечения круглого волновода и отражение такого же импульса от «холодной» бесстолкновительной плазмы с плотностью, нарастающей вдоль оси волновода до сверхкритического значения. Показано, что в первом случае происходит полное отражение импульса с незначительным искажением его формы в соответствии с линейной теорией. Во втором случае характер отражения существенно зависит от длины нарастания плотности плазмы, длительности импульса и амплитуды поля волны, причем вблизи критической точки происходит значительное замедление поля и рост амплитуды; поглощение импульса в плазме намного превышает поглощение, обусловленное линейной трансформацией падающей поперечной волны в продольные колебания плазмы.

Ключевые слова: электромагнитный импульс, отражение электромагнитных волн, металлический волновод, неоднородная плазма.

1. Введение

Настоящее исследование было инициировано недавно появившейся работой [1], в которой рассматривалось отражение монохроматической волны от критической точки волновода. Вблизи критической точки групповая скорость волны резко падает, что, по мнению автора [1], должно приводить к неограниченному росту амплитуды падающей волны, уширению ее частотного спектра и образованию ударноподобной волны. Последние утверждения вызвали у нас сомнения, и мы с помощью программы KAPAT [2] провели численное моделирование отражения импульса ТМ-моды СВЧ излучения от сужающейся части волновода с единственным ограничением: оставили неизменным граничное условие идеальности металлической поверхности волновода*. Никаких существенных отклонений от линейной электродинамики мы не обнаружили, причем усиление поля по амплитуде в области критической точки не превышало двух, что соответствует линейной теории отражения волны от металлической поверхности, т. е. неограниченный рост поля и образование ударноподобной волны не наблюдались. Результаты численного моделирования этой задачи и комментарий к ним приведены в разд.2.

Вторая задача – об отражении ТМ-моды от плазмы, заполняющей волновод постоянного радиуса, плотность

* Тем самым мы пренебрегли нелинейным затуханием на стенках волновода, оставив только возможность уширения спектра и искажения формы импульса падающей волны.

А.А.Рухадзе. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: rukh@fpl.gpi.ru
В.П.Тараканов. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 127412 Москва, Ижорская, 13/19

Поступила в редакцию 28 марта 2006 г., после доработки – 22 мая 2006 г.

которой нарастает до сверхкритического значения, представляет значительно больший интерес. В этом случае вблизи критической точки, где плазменная частота совпадает с частотой волны, групповая скорость волны падает, в связи с чем также должно происходить усиление поля. А поскольку плазма – сугубо нелинейная среда, то нелинейности в этой области должны проявляться с особой силой. Следует отметить, что на усиление продольного поля в области критической плотности при наклонном падении электромагнитной волны на поверхность холодной плазмы с неоднородной плотностью обращал внимание В.Л.Гинзбург [3] (это явление отмечалось еще в монографии [4]).

В работе [5] было показано, что в точке резонансного усиления (получившего название плазменного резонанса) происходит возбуждение продольной плазменной волны, в результате чего электромагнитная волна, падающая на плазму, частично в ней поглощается. Впоследствии это явление интенсивно исследовалось (см. обзоры [6, 7]) и стало называться линейной трансформацией поперечной волны в продольную волну в неоднородной плазме в точке плазменного резонанса. Поглощение электромагнитной волны в точке плазменного резонанса существенно зависит от градиента плотности плазмы, достигая максимума в условиях, когда характерный размер градиента сравним с длиной падающей волны.

В разд.3 линейная теория трансформации волн обобщается на случай отражения TM_{01} -моды от плазмы в волноводе; приводятся результаты численного моделирования данной задачи с учетом градиента плотности плазмы, ее нелинейности в случае конечной амплитуды падающей на плазму волны, а также ограниченности длительности импульса.

В разд.4 статьи результаты численного моделирования сравниваются с результатами линейной теории трансформации волн в точке плазменного резонанса. Значи-

тельное расхождение между ними, с нашей точки зрения, обусловлено накоплением поля в области плазменного резонанса и проявлением в плазме нелинейных явлений.

2. Отражение от докритического сужения круглого волновода

Численное моделирование проводилось с помощью программы КАРАТ [2], которая позволяла решать полную систему уравнений Максвелла явным конечно-разностным методом на сдвинутых сетках, имеющим второй порядок точности.

В металлическом волноводе с радиусом $R = 2$ см на входе и длиной $L = 80$ см запускается импульс с ТМ₀₁-поляризацией (с отличными от нуля компонентами поля E_z , E_r , B_ϕ), несущей частотой $f = 10$ ГГц и длительностью ~ 1 нс. Начиная с $z = 40$ см радиус волновода линейно уменьшается до 0.2 см при $z = 80$ см (геометрия представлена на рис.1).

На рис.1,а показано векторное поле волны до отражения, а на рис.1,б – в момент его наибольшего проникновения в волновод. Амплитуда поля в момент отражения в два раза превышает амплитуду падающей волны, что соответствует линейной теории.

На рис.2 представлена динамика вектора Пойнтинга при прохождении электромагнитного импульса через сечение при $z = 20$ см. Видно, что сначала проходит падающий импульс длительностью 1 нс, а затем появляется отраженная электромагнитная волна. Полные энергии в падающем и отраженном импульсах одинаковы. Форма импульса практически не изменяется.

Описанная картина полностью соответствует линейной теории отражения волны от металлического зеркала [8], т. е. удвоению амплитуды падающей волны у поверхности зеркала без образования ударноподобной волны вблизи критической точки. Этого и следовало ожидать,

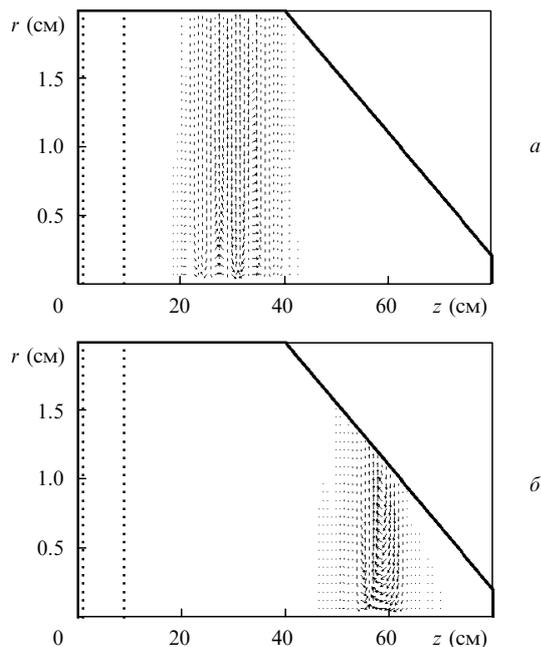


Рис.1. Векторное поле в металлическом волноводе до отражения (а) и в момент его наибольшего проникновения в волновод (б). Жирной линией обозначены границы волновода, слева (пунктир) окно с граничными условиями для ввода и вывода волны, частые короткие линии (стрелки) – полное электрическое поле.

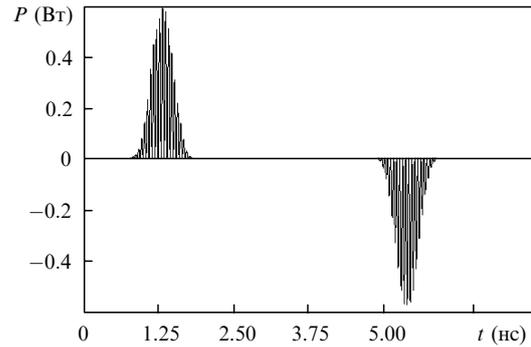


Рис.2. Вектор Пойнтинга падающей и отраженной волн при прохождении электромагнитного импульса через сечение волновода при $z = 20$ см.

поскольку как уравнения поля, так и граничные условия на поверхности волновода линейны и нет причин для появления нелинейных эффектов.

3. Отражение в волноводе от плазмы с нарастающей до сверхкритического значения плотностью

Вторая задача состоит в исследовании отражения того же импульса от плазмы с плотностью, нарастающей до сверхкритической. Плазма заполняет волновод, начиная с $z = 40$ см, и ее плотность нарастает линейно на длине L до максимального значения $n_{\max} = 2.5 \times 10^{12}$ см⁻³ (либо 10^{13} см⁻³), после чего остается постоянной. В расчетах длина L изменялась от нуля до 20 см, длительность импульса варьировалась от 0.2 до 1.0 нс, напряженность поля в падающей волне – от 5 до 5×10^4 В/см. При изменении этих параметров исследовалось влияние на характер отражения волноводной ТМ₀₁-моды максимальной плотности плазмы, градиента плотности, амплитуды поля и длительности импульса. Все они оказывают существенное влияние на характер отражения волны от плазмы с критической плотностью и на поглощение падающей волны в плазме.

3.1. Аналитическая теория отражения

Прежде чем приступить к обсуждению результатов численного моделирования, остановимся на линейной приближенной аналитической теории отражения электромагнитной волны от критической точки плазмы с нарастающей плотностью. При этом будем следовать работе [5] (см. также [9]), обобщая вычисления на цилиндрическую геометрию.

Считаем, что в круглом металлическом волноводе радиусом R при $z \leq 0$ (область I) плазма отсутствует. При $0 < z < L$ (область II) плотность плазмы нарастает до

$$N_{\max} > N_{\text{cr}} = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2},$$

где m и e – масса и заряд электрона; $\omega = 2\pi f$ – частота падающего на плазму импульса. При $z \geq L$ (область III) плазма имеет постоянную плотность $N = N_{\max}$.

Как уже отмечалось выше, мы рассматриваем пространство основной аксиально-симметричной ТМ-моды с отличными от нуля E_z -, E_r - и B_ϕ -компонентами поля. В этом случае

$$E_r = -\frac{ic}{\omega\varepsilon} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{ic}{\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi, \quad (1)$$

$$\varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z) B_\varphi = 0.$$

Здесь

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2)$$

– диэлектрическая проницаемость плазмы; $\omega_p^2 = 4\pi e^2 \times N(z)/m$; $N(z)$ – продольно-неоднородная плотность плазмы. Уравнение (1) пригодно во всей области изменения z , т. е. вне плазмы (при $z < 40$ см), в области нарастания плотности ($0 \leq z \leq L$) и в области $z > 40$ см, где плазма однородна и обладает максимальной плотностью N_{\max} . Легко показать, что решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям на боковой поверхности металлического волновода, можно записать в виде

$$B_\varphi(z, r) = B(z) J_1\left(\frac{\mu r}{R}\right), \quad (3)$$

где $\mu \simeq 2.41$, а $B(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial B}{\partial z} \right) - \frac{\mu^2}{R^2} B + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon B = 0. \quad (4)$$

В области I

$$B(z) = C_{\text{in}} \exp(-i\omega t + ik_{z1}z) + C_{\text{out}} \exp(-i\omega t - ik_{z1}z), \quad (5)$$

где C_{in} , C_{out} – амплитуды падающей и отраженной волн.

В области III (плотная закритическая плазма) волна не распространяется, и

$$B(z) = C_{\text{tr}} \exp(-i\omega t - ik_L z), \quad k_L^2 = \frac{\mu^2}{R^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon. \quad (6)$$

В области II (плазма с нарастающей плотностью) имеется точка плазменного резонанса, в которой при $f = 10$ ГГц

$$\omega_p^2(z) = \omega^2 \approx 3.94 \times 10^{21} \text{ с}^{-1}. \quad (7)$$

Далее рассмотрим предельный случай $\lambda = c/f > L$ (быстрый рост плотности), когда (4) можно решить, следуя [9], т. е. считая второе и третье слагаемые малыми. В области плазменного резонанса при $0 \leq z \leq L$ получим (см. [9], задача 1 из гл. VII)

$$B_\varphi(0, r) = B_\varphi(L, r) = C J_1\left(\frac{\mu r}{R}\right),$$

где C – произвольная постоянная, определяемая из граничных условий

$$E_r(L, r) = E_r(0, r) + \frac{c\pi}{\omega} B_\varphi(0, r) \frac{\mu^2}{R^2} \eta, \quad (8)$$

где $\eta^{-1} = |d\varepsilon/dz|$, причем $E_r(z, r) \propto J_1(\mu r/R)$. Сшивая решение в области $0 \leq z \leq L$ с затухающим решением при $z > L$, находим

$$E_r(L, r) = \frac{i\kappa_L c}{\omega} B_\varphi(L, r) = \frac{i\kappa_L c}{\omega} B_\varphi(0, r), \quad (9)$$

где κ_L – коэффициент затухания поля в области $z > L$;

$$\kappa_L^2 = \frac{\mu^2}{R^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon > 0. \quad (10)$$

Окончательно получим

$$E_r(0, r) = \frac{c}{\omega} \left(\frac{i\kappa_L}{\varepsilon} + \eta \frac{\pi\mu^2}{R^2} \right) B_\varphi(0, r) = \frac{c}{4\pi} Z(0, r) B_\varphi. \quad (11)$$

Здесь $Z(0, r)$ – поверхностный импеданс отражающего плазменного слоя (с нарастающей плотностью), связанный с комплексным коэффициентом отражения ТМ-волны по амплитуде

$$\mathcal{R} = - \left[1 - \frac{\omega}{4\pi} \frac{Z}{\kappa(0)} \right] \left(1 + \frac{\omega Z}{4\pi\kappa_0} \right)^{-1}, \quad \kappa_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu^2}{R^2}. \quad (12)$$

Параметр $|\mathcal{R}|^2$ характеризует отражение мощности, а величина $A = 1 - |\mathcal{R}|^2$ – поглощаемую в плазме мощность.

Из (11) и (12) окончательно находим

$$|\mathcal{R}|^2 = \left[\left(1 - \frac{\pi\eta\mu^2}{R^2\kappa_0} \right)^2 + \frac{\kappa_L^2}{\kappa_0^2} \frac{1}{\varepsilon} \right] \left[\left(1 + \frac{\pi\eta\mu^2}{R^2\kappa_0} \right)^2 + \frac{\kappa_L^2}{\kappa_0^2} \frac{1}{\varepsilon} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Для неизменных параметров задачи, используемых при численном моделировании, формулу (13) можно записать в виде

$$|\mathcal{R}|^2 = \frac{(1 - 2.61LN_{\text{cr}}/N)^2 (N/N_{\text{cr}} - 1)^2 + 0.48 + 1.48(N/N_{\text{cr}} - 1)}{(1 + 2.61LN_{\text{cr}}/N)^2 (N/N_{\text{cr}} - 1)^2 + 0.48 + 1.48(N/N_{\text{cr}} - 1)}. \quad (13a)$$

Здесь $N_{\text{cr}} = 1.3 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$; L измеряется в сантиметрах. Формулы (13) и (13a) являются приближенными: они пригодны только при $\lambda > L$, только для монохроматического поля (т. е. бесконечно длинного импульса) и только в линейном приближении. Несмотря на это мы будем пользоваться ими при обсуждении результатов численного моделирования, свободного от указанных ограничений.

3.2. Результаты численного моделирования

Как уже отмечалось, для моделирования поля использовалась программа КАРАТ [2], с помощью которой решается полная система уравнения Максвелла, а для моделирования плазмы – PIC-метод, что является численной реализацией решения кинетической модели плазмы. Поэтому точно учитываются не только геометрия системы, но и самосогласованная нелинейная динамика электронов в полях падающей и отраженной волн. Большая часть расчетов проведена при численных параметрах, когда дебаевская длина была меньше или порядка шага сетки, однако контрольные расчеты показали, что этот факт не влияет на результаты моделирования. Анализировались все параметры системы, но в качестве основного использовался коэффициент отражения импульса. Коэффициенты отражения для различных наборов параметров приведен в табл. 1.

Табл.1. Коэффициенты отражения электромагнитных импульсов \mathcal{R} для различных наборов параметров (колонки I–VIII) исследуемой ситемы.

L (см)	Численное моделирование						Аналитический расчет	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	0.82	0.82	0.92	0.82	0.995	0.73	1.0	1.0
0.5	0.64	0.60	0.60	0.60	0.93	0.67	0.46	0.58
1.0	0.56	0.51	0.51	0.53	0.86	0.55	0.30	0.49
1.5	0.53	0.52	0.52	0.51	0.65	0.54	0.29	0.22
2.0	0.53	0.54	0.54	0.52	0.65	0.53	0.35	0.14
5.0	0.68	0.70	0.70	0.70	0.50	0.50	0.52	0.10
10.0	0.88	0.94	0.91	0.91	0.57	0.55	0.75	0.48
20.0	0.96	0.99	0.99	0.99	0.70	0.71	0.83	0.58

Примечание. Для вариантов I и II амплитуда поля $E = 5 \times 10^2$ В/см при длительности импульсов $T = 0.2$ и 1 нс соответственно, а для IV и V – 5×10^4 В/см при $T = 1$ нс. Плотность плазмы n_e^{\max} составляет 2.5×10^{12} см $^{-3}$ (I–IV, VII) и 1×10^{13} см $^{-3}$ (V, VI, VIII).

Результаты, приведенные в колонках VII, VIII табл.1, соответствуют формулам (13). Их в первую очередь следует сравнивать с результатами численного моделирования отражения в случае слабого поля (колонки III и V) и большого градиента, соответствующего $L = 0 - 1.5$ см. Но даже в этом случае наблюдается сильное расхождение, что мы связываем с проявлением нелинейности плазмы в неоднородном поле отражающей волны. Электроны осциллируют в поле волны конечной амплитуды и вследствие неоднородности поля как бы образуют «нагретую» плазму, в которой происходит как поглощение энергии волны, так и излучение отраженной волны.

Нелинейность имеет несколько иной характер в случае длинного импульса: из-за замедления волны в области резонансной точки происходит накопление энергии поля и вновь проявляются нелинейные осцилляции, а следовательно, поглощается энергия даже в случае малой амплитуды падающей волны (см. табл.1, колонки III, V и VI). Кроме поглощения энергии отраженного импульса в резонансной точке, происходит и его сильное искажение. В целом приближенная теория лишь качественно согласуется с численным моделированием: максимальное поглощение наблюдается при длине волны, сравнимой с длиной неоднородности L .

Рассмотрим результаты численного моделирования подробнее.

На рис.3 изображены три зависимости кинетической энергии электронов плазмы от времени при максимальной плотности 2.5×10^{12} см $^{-3}$. Зависимость на рис.3,а относится к случаю, когда длина неоднородности L больше длины волны. Результаты в этом случае для амплитуд 5 и 5×10^4 В/см близки, а энергия электронов после отражения волны обращается в нуль. При большем градиенте ($L = 5$ см) и малой амплитуде поля ($E = 5$ В/см) кинетическая энергия электронов после отражения остается отличной от нуля и колебания наблюдаются во всей области, занятой плазмой. С увеличением амплитуды до 5×10^4 В/см после отражения кинетическая энергия электронов в плазме остается отличной от нуля и носит не колебательный, а тепловой характер.

На рис.4 изображены изменения во времени энергий магнитного и электрического полей при максимальной плотности плазмы 2.5×10^{12} см $^{-3}$. Видно, что при большем градиенте даже в поле с малой амплитудой в плазме возбуждаются колебания электронной компоненты, которые не излучаются и остаются в плазме.

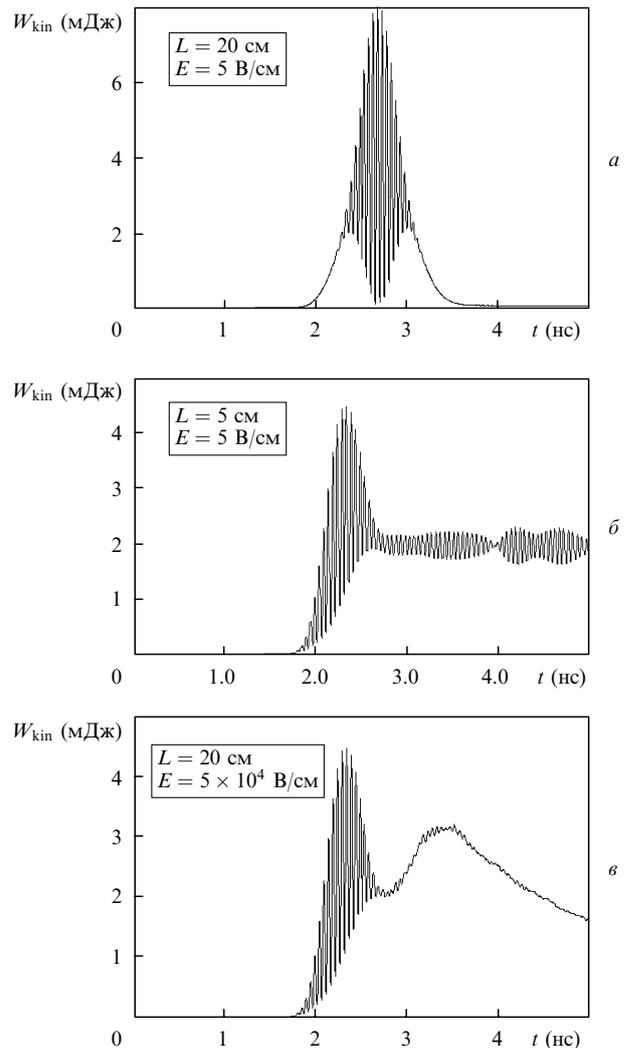


Рис.3. Зависимости кинетической энергии W_{kin} электронов от времени при $N_{\max} = 2.5 \times 10^{12}$ см $^{-3}$ и разных значениях L и E .

На рис.5 и 6 представлены фазовые портреты поля в момент отражения волны и после ее отражения. В случае малого градиента плотности видно упорядоченное, когерентное в поле волны движение электронов, причем оно наблюдается как до точки отражения (критической точки), где падающее поле слабо искажено, так и за критической точкой, в которой поле экспоненциально падает. При большем градиенте ($L = 5$ см) длина волны колебаний уменьшается по мере увеличения плотности плазмы.

После отражения (при $L = 20$ см) плазма остается холодной, поэтому фазовая плоскость для этого случая не представлена. При большем градиенте электроны приобретают энергию, причем в малом поле – колебательную, и эти колебания распространяются в глубь плазмы. В поле с большей напряженностью (5×10^4 В/см) после отражения импульса колебаний нет, а наблюдается только тепловое движение электронов.

4. Краткое обсуждение результатов

Начнем с задачи отражения импульса от закритического сужения волновода, для которой при численном моделировании мы получили результаты, совпадающие с результатами линейной теории отражения от зеркала. В этом нет ничего удивительного, поскольку в данной зада-

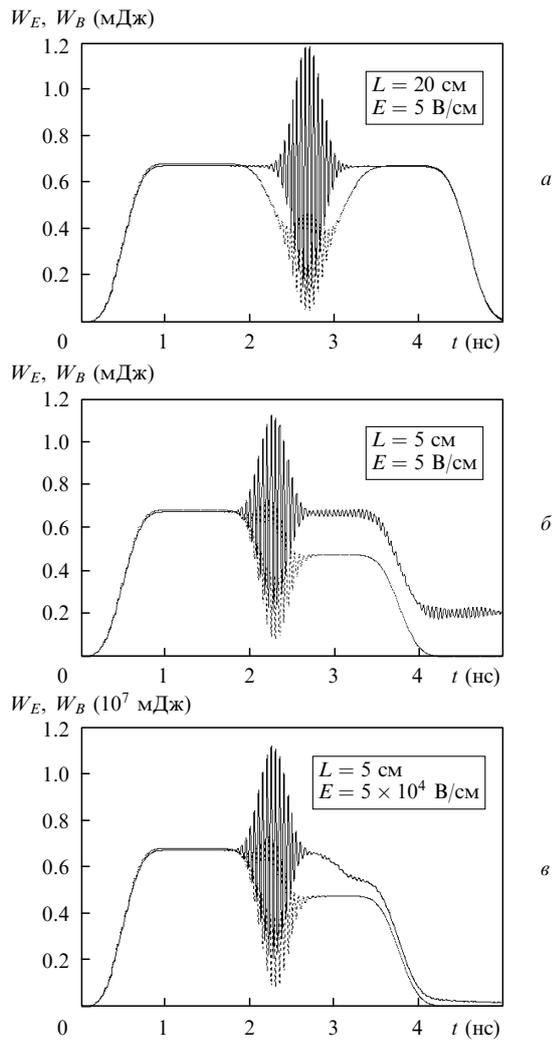


Рис.4. Изменение во времени полных энергий магнитного (W_B) и электрического (W_E) полей при $N_{\max} = 2.5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и разных значениях L и E .

че длина сужения (40 см) намного больше средней длины волны падающего излучения ($\lambda = 3 \text{ см}$) и его сателлитов (из-за конечности импульса). Как следствие, применимо приближение геометрической оптики, которое с точностью до величин порядка $\lambda/L = 7\%$ сохраняет форму импульса падающего и отраженного излучений. Поскольку граничные условия и сами уравнения поля оставались линейными, то и ожидать появления нелинейных эффектов в задаче отражения не приходится.

Иное положение в задаче отражения импульса от плазмы с нарастающей вдоль оси волновода плотностью. Здесь между линейной теорией (VII и VIII колонки табл.1) и численным моделированием имеется лишь качественное согласие: наиболее эффективное поглощение падающего излучения и уменьшение отражения наблюдаются при $L \approx \lambda$, где λ – длина волны излучения в плазме, сильно зависящая от ее плотности. Расхождение между приближенной линейной теорией и численным моделированием, с нашей точки зрения, обусловлено нелинейностью плазмы. Так, при $L = 0$ (отражение от плазмы с резкой границей) мы связываем расхождение с проникновением в плазму поля падающей волны, причем в области до критической точки оно происходит почти без искажений, а за ней сопровождается экспоненциальным спадом напряженности поля на глубине c/ω_p , где ω_p –

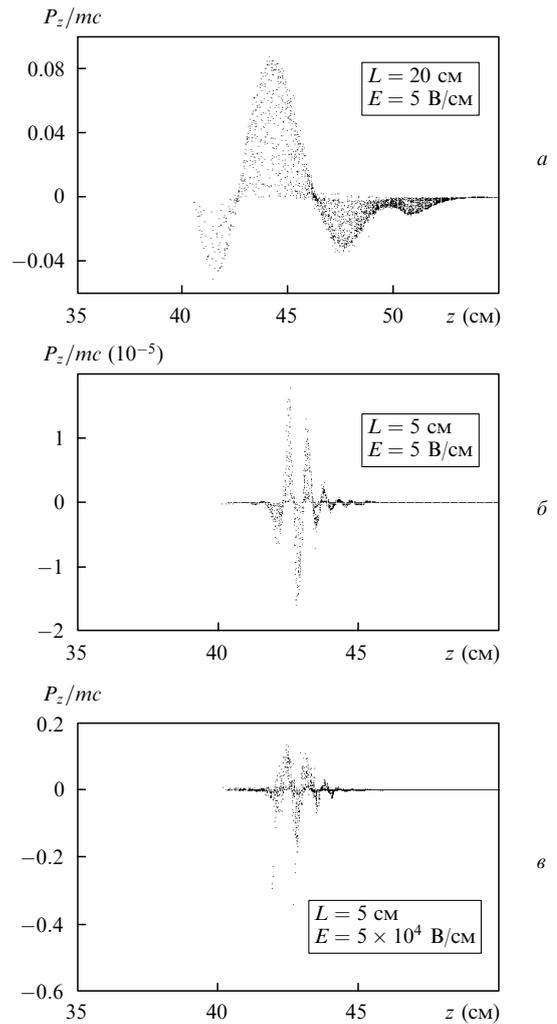


Рис.5. Фазовая плоскость электронов плазмы а момент отражения волны при разных значениях L и E .

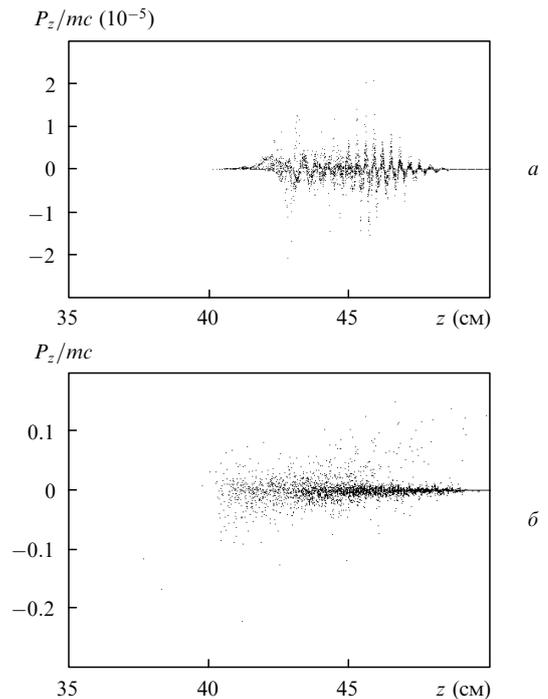


Рис.6. Фазовая плоскость электронов плазмы после отражения волны при разных значениях L и E .

ленгмюровская частота плазмы при максимальной плотности. Неоднородное поле конечной амплитуды приводит к неоднородным осцилляциям электронов плазмы с перекрещиванием их траекторий, что проявляется в виде температурных изменений и обуславливает бесстолкновительное поглощение поля волны типа затухания Ландау. Этот эффект должен усиливаться с уменьшением n_{\max} и увеличением амплитуды падающей волны, что как раз и следует из табл.1. Кроме того, такое поглощение должно усиливаться с ростом длительности импульса, поскольку в этом случае должен проявиться эффект накопления поля волны в критической точке вследствие уменьшения групповой скорости. В свою очередь этот эффект эквивалентен увеличению амплитуды волны и указанному эффекту «теплового» поглощения. Неожиданным является также наблюдение сильного поглощения при малом градиенте плотности плазмы ($L = 20$ см), что противоречит как изложенной выше приближенной теории, так и геометрической оптике. Нам представляется, что это связано с затуханием Ландау на длинном участке медленно меняющегося поля.

Наконец, обратим внимание на еще одно весьма серьезное расхождение между линейной теорией и численным моделированием: в теории поглощение оказывается большим, чем в моделировании. Это обусловлено возникновением регулярных колебаний электронов плазмы в поле падающей волны, которые в конечном счете возвращаются назад в виде излучения (рассеяние назад падающего излучения). В теории это явление не учитывается. В ней любые колебания электронов, возбуждаемые падающей волной, связываются с поглощением. Из фазовых портретов полей и колебаний видно, что при регулярных колебаниях электронов действительно имеет место хорошее отражение. Если же колебания полей и электронов

успевают хаотизироваться, то поглощение велико и отражение падает.

Таким образом, результаты, полученные при численном моделировании и использовании линейной теории, различаются, главным образом, из-за нелинейных эффектов. Последние должны быть существенными в условиях, когда амплитуда осцилляций превышает тепловую скорость электронов, которую мы оценили исходя из перекрещивания траекторий электронов. При амплитудах поля $E \sim 10^2 - 10^3$ В/см такая оценка соответствует температуре плазмы 0.1 – 1 эВ. Условие

$$\frac{eE}{m\omega} \geq v_{Te}$$

при $v_{Te} \approx 3 \times 10^7$ см/с (т.е. $T = 1$ эВ) выполняется в полях с напряженностью свыше 10^3 В/см. Отметим, что приведенная оценка порога возникновения нелинейности в плазме носит чисто иллюстративный характер.

1. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **36** (1), 90 (2006).
2. Tarakanov V. *User's Manual for Code KARAT* (Springfield, VA: Berkley Research Associates Inc., 1992).
3. Гинзбург В.Л. *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967).
4. Альперт Я.Л., Гинзбург В.Л., Фейнберг Е.Л. *Распространение радиоволн* (М.: Физматгиз, 1949).
5. Гильденбург В.Б. *ЖЭТФ*, **41** (6), 1978 (1963).
6. Голант В.Е., Пилюя А.Д. *УФН*, **104** (3), 413 (1971).
7. Ерохин Н.И., Кузев М.В., Моисеев С.С. и др. *Неравновесные резонансные процессы в плазменной радиофизике* (М.: Наука, 1982).
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982).
9. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред* (М.: изд. МГУ, 1999).