

Режим гармонической модуляции излучения полупроводникового лазера с внешней обратной связью

А.Г.Сухарев, А.П.Напартович

Для полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью аналитически описано возникновение режима гармонической модуляции в точке бифуркации Хопфа. Выведено дифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающим аргументом и комплексными коэффициентами. Частота осцилляций, возникающих в точке бифуркации Хопфа, определяется решением двух относительно простых трансцендентных уравнений, из которых одновременно находится сама точка бифуркации. Эти уравнения содержат зависимости от всех управляющих параметров задачи. Найдены точные верхний и нижний пределы значений частоты осцилляций. При сопоставлении с численными результатами установлено, что частота модуляции сохраняется почти постоянной в широком диапазоне фаз обратной связи. Предложена процедура нахождения параметров лазера, обеспечивающих наличие бифуркации с переходом в осцилляцию с заданной частотой. Полученные результаты представляют интерес для систем оптической связи со спектральным уплотнением.

Ключевые слова: полупроводниковый лазер, гармоническая модуляция излучения, внешняя обратная связь.

1. Введение

Полупроводниковый лазер с запаздывающей обратной связью (ЗОС) характеризуется богатством динамических режимов [1], часть которых используется в системах оптической связи [2]. Сложность реализуемых динамических режимов обусловлена наличием двух связанных резонаторов, один из которых образован отражающими торцами полупроводникового кристалла, а другой – комбинацией глухого торца и внешнего зеркала. Лэнг и Кобаяши [3] вывели динамические уравнения для лазерного диода с дополнительным внешним зеркалом в случае, когда отражением падающего извне излучения от грани диода можно пренебречь. Уравнения Лэнга–Кобаяши (ЛК) легли в основу современных теорий, описывающих динамику лазерных диодов с ЗОС. Система уравнений ЛК содержит шесть управляющих параметров, что и приводит к разнообразию режимов, из которых особый интерес вызывают хаотические режимы. Основы теории лазеров с внешней обратной связью и результаты последних (вплоть до 2000 года) исследований содержатся в [1].

Система уравнений ЛК имеет частные решения, называемые стационарными, в которых интенсивность излучения не зависит от времени, а скорость изменения фазы определяется частотой Ω , находимой из самой системы. Количество стационарных решений зависит от управляющих параметров и может быть большим. Многие из этих состояний оказываются неустойчивыми. Усложнение динамики полупроводникового лазера с ЗОС по мере увеличения числа стационарных решений исследовалось

в нашей работе [4]. Одним из результатов этой работы было обнаружение режима квазигармонических автоколебаний интенсивности. Выяснилось, что частота этих колебаний превышает частоту релаксационных колебаний и может быть весьма большой (она попадает в гигагерцовый диапазон частот).

Такие режимы с гармонической автомодуляцией интенсивности могут быть использованы в системах оптической связи со спектральным уплотнением сигнала [2]. Мощность сигнала на входе в канал ограничена возникающими в волоконном световоде нелинейными эффектами. Это приводит к тому, что длина оптоволоконка между соседними усилителями ограничивается величиной 50–100 км. Гармоническая модуляция мощности излучения, расширяя спектральный диапазон сигнала, позволяет увеличить полную мощность входного сигнала и тем самым удлинить участок между усилителями. Таким образом, полупроводниковые лазеры в режимах с автоколебаниями интенсивности излучения в гигагерцовом диапазоне представляют интерес для систем оптической связи.

2. Основные уравнения

Уравнения ЛК, описывающие лазерный диод с дополнительной внешней обратной связью (ОС), в безразмерных переменных имеют следующий вид [5, 6]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (1 - i\alpha)NE(t) + ME(t - \tau) \exp[i(\kappa + \pi/2)], \quad (1)$$

$$T \frac{\partial N}{\partial t} = P - N - (1 + 2N)|E|^2.$$

При выводе уравнений использована зависимость поля от частоты в виде $\exp(-i\omega_0 t)$; $\kappa + \pi/2 = \omega_0 \tau \pmod{2\pi}$. Здесь α – фактор уширения линии (антиволноводный

А.Г.Сухарев, А.П.Напартович. ФГУП «ГНЦ РФ – Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», Россия, 142190 Троицк, Московская обл., e-mail: sure@triniti.ru, napart@mail.ru

параметр); τ – время задержки в петле обратной связи. Все величины, имеющие размерность времени, поделены на время жизни фотона τ_{ph} в собственном резонаторе диода длиной L ; $\tau_{ph}^{-1} = (c/n)[\alpha_{int} + (2L)^{-1} \ln r^{-1}]$; c/n – групповая скорость света в среде; α_{int} – внутренние потери; r – коэффициент отражения от грани кристалла; $T = \tau_s/\tau_{ph}$ – время жизни носителей. Усиление активной среды при не слишком большом превышении порога генерации G_{th} может быть приближенно описано линейной функцией плотности носителей N_c : $G(N_c)/G_{th} = 1 + g\tau_{ph}(N_c - N_{th})$; g – дифференциальное усиление среды. Остальные безразмерные переменные введены следующим образом: амплитуда поля $E = (\frac{1}{2}g\tau_s)^{1/2}|E_{ph}|$ ($|E_{ph}|^2$ – плотность фотонов); отсчитываемая от порога инверсная населенность $N = \frac{1}{2}g\tau_{ph}(N_c - N_{th})$; нормированная интенсивность накачки $P = \frac{1}{2}g\tau_{ph}(j\tau_s - N_{th})$, где $j = J/ed$ – скорость инжекции носителей в активный слой толщиной d (j измеряется в $\text{см}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$) при плотности тока J ; константа связи $M = (1-r)(R/r)^{1/2}(c\tau_{ph}/2nL)$; R – коэффициент отражения от внешнего зеркала или дальнего конца световода с учетом всех потерь на стыковку, поглощение и дифракцию.

Стационарное решение ищется из условий: $\partial N/\partial t = 0$, $\partial E/\partial t = iE\Omega$, где Ω – отстройка частоты излучения относительно ω_0 . Для этого решения $N/M = \sin(\kappa - \Omega\tau)$ и $P - N = (1 + 2N)|E|^2$, а отстройка Ω находится из уравнения

$$\Omega/M(1 + \alpha^2)^{1/2} = \sin[\Omega\tau - \kappa + \arctan(1/\alpha)]. \quad (2)$$

3. Режим гармонических колебаний

Поскольку исходные уравнения (1) обладают строгой 2π -периодичностью как функция параметра κ , то в дальнейшем будем изучать поведение решений при изменении κ внутри интервала $[0, 2\pi]$. Исследования, выполненные ранее [1, 4], свидетельствуют об увеличении числа стационарных решений с ростом эффективной силы обратной связи (ОС) $s = M\tau(1 + \alpha^2)^{1/2}$. Исследование устойчивости этих решений весьма осложняется наличием шести параметров задачи ($\alpha, M, \tau, \kappa, P, T$). Два параметра (α и T) зависят от материала и конструкции полупроводникового лазера, и мы используем их типичные значения: $\alpha = 3$ и $T = 1000$. Хотя формально стационарные решения содержат зависимость от времени, анализ их устойчивости по отношению к малым возмущениям, экспоненциально зависящим от времени как $\exp(\lambda t)$, сводится к системе трех линейных уравнений для вариаций амплитуды и фазы поля, а также инверсии населенности [1]. Некоторые элементы матрицы A этой системы содержат зависимость вида $1 - \exp(-\lambda\tau)$ от собственного числа λ . Значение λ находится из трансцендентного характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

Число его корней при малой эффективной силе ОС s равно трем и растет с увеличением s . Схема, предложенная в [4], позволяет определить число корней λ , попавших в правую половину комплексной плоскости, т. е. число неустойчивых решений n . При изменении параметров корни движутся на комплексной плоскости. Момент пересечения показателем экспоненты λ мнимой оси соответствует точке бифуркации. Для конкретного выбора параметров указанных на рис.1, в зависимости от сочетания Ω и κ стационарное решение может оказаться устойчивым ($n = 0$) либо неустойчивым ($n > 0$).

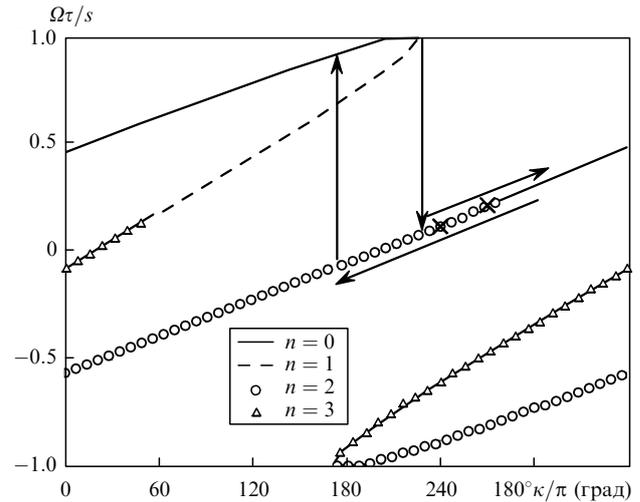


Рис.1. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при $P = 0.21$, $M = 0.02$ и $\tau = 80$; n – число корней характеристического уравнения с $\text{Re}\lambda > 0$ (крестики соответствуют кривым на рис.2).

Упорядочим собственные числа по величине $\text{Re}\lambda$ и изучим фазовый портрет в плоскости пары старших по $\text{Re}\lambda$ собственных векторов. Неустойчивые стационарные решения соответствуют особым точкам: это седло ($n = 1$), неустойчивый фокус ($n = 2$) либо неустойчивый (трехмерный) узел-фокус ($n = 3$). Бифуркация ($n = 0 \rightarrow 2$) характеризуется одновременным рождением неустойчивого фокуса и устойчивого предельного цикла. Наматывание фазовой траектории на предельный цикл приводит к периодическим колебаниям интенсивности. Рождение предельного цикла принято называть бифуркацией Хопфа системы, при этом два комплексно-сопряженных корня одновременно пересекают мнимую ось. При плавном уменьшении κ после точки бифуркации амплитуда осцилляций нарастает, если расчет каждый раз стартует от решения, полученного при предыдущем значении κ . Однако при подходе к точке (вблизи $\kappa = \pi$), отмеченной на рис.1 направленной вверх стрелкой, осцилляции исчезают и происходит перескок на стационарное решение, сохраняющееся при дальнейшем изменении κ .

Нас интересует ситуация, когда появляются осцилляции поля, имеющие место при прохождении через бифуркацию Хопфа. В целом сценарий развития автоколебаний сложен: при некоторых условиях проявляются мультистабильность и гистерезис (стрелки на рис.1 демонстрируют численно обнаруженный гистерезис для многозначного Ω при плавном варьировании κ). Зачастую решение имеет вид импульсов или пакетов импульсов, форма которых далека от гармонической. В [4] найдены условия, при которых автоколебания близки к гармоническим для достаточно больших времен задержки ($\tau = 80$).

При выбранных параметрах бифуркация Хопфа происходит в окрестности $\kappa = 3\pi/2$. Численные расчеты, проведенные при $P = 0.2$, $M = 0.02$ и $\tau = 80$, показывают, что в широком диапазоне фаз ОС, $1.05\pi < \kappa < 3\pi/2$ (рис.2), имеет место режим гармонических колебаний интенсивности поля относительно стационарного уровня. В интервале $\pi < \kappa < 1.28\pi$ может реализовываться как периодическое, так и стационарное решение. Смена режимов происходит на границах интервала и определяется направлением обхода (гистерезис). Изменение κ после перехода точки бифуркации Хопфа практически не влияет на частоту колебаний интенсивности, а форма

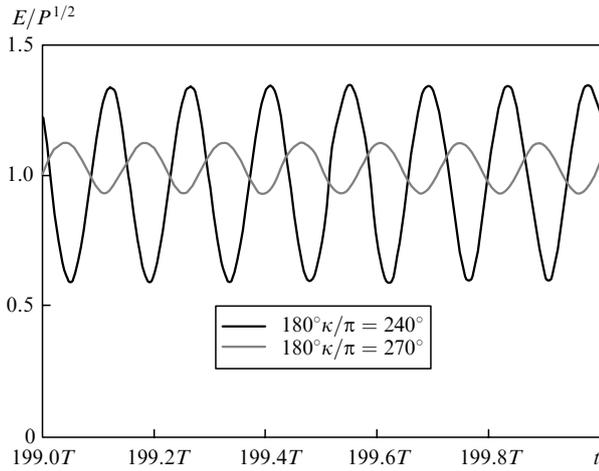


Рис.2. Амплитуда поля для $180^\circ\kappa/\pi = 240^\circ$ и 270° при $P = 0.2$, $M = 0.02$ и $\tau = 80$.

модуляции остается гармонической вплоть до амплитуды модуляции ~ 1 .

Вблизи точки бифуркации ($\kappa < 3\pi/2$) уравнения (1) могут быть линеаризованы по малым отклонениям решений от стационарного решения (2). Представим поле в виде $E = E_{st}(1 + \Psi)$, где $E_{st} = [P + M \sin(\Omega\tau - \kappa)]^{1/2} \times \exp(i\Omega t)$, $|\Psi| \ll 1$ и $|N| \ll 1$. Для малого возмущения Ψ можно вывести дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом:

$$-\ddot{\Psi} = M(\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_\tau) \exp[-i\Omega\tau + i(\kappa + \pi/2)] + (1 - i\alpha)\omega_r^2 \text{Re}\Psi, \quad (3)$$

где

$$\Psi_\tau = \Psi(t - \tau); \quad \omega_r^2 = \frac{2}{T} \left[P + M \sin(\Omega\tau - \kappa) \right]. \quad (4)$$

При выводе (3) учтено то обстоятельство, что обычно в диодных лазерах частота релаксационных колебаний $\omega_r \gg 1/T$. Уравнение (3) относится к классу уравнений с запаздывающим аргументом. Кроме того, появление $\text{Re}\Psi$ в его правой части приводит к дополнительной связи между $\text{Re}\Psi$ и $\text{Im}\Psi$ (аналогичная ситуация возникает в задаче о мелкомасштабной самофокусировке [7]). В соответствии с определением бифуркации Хопфа в самой точке бифуркации возмущение Ψ имеет вид гармонических колебаний. Частота колебаний ω должна находиться из условия существования нетривиальных решений (3). Прямая подстановка решений в виде экспонент с постоянными комплексными коэффициентами дает систему трансцендентных уравнений весьма сложной структуры.

Чтобы выполнить анализ такой системы, изучим групповые свойства (см. [8]) оператора $L_\tau \psi = d/dt[\psi(t) - \psi(t - \tau)]$, входящего в правую часть уравнения (3). Легко убедиться, что действие оператора на функцию $\psi = \cos(\omega t)$ сводится к умножению на параметр $D = -2\omega \sin(\omega\tau/2)$ и к сдвигу назад аргумента исходной функции на $\tau/2$:

$$L_\tau \psi = -2\omega \sin(\omega\tau/2) \cos \omega(t - \tau/2) = D\psi_{\tau/2}.$$

Это обстоятельство указывает на разумность поиска решения (3) в виде линейной комбинации

$$\Psi = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \cos \omega(t - \tau/2). \quad (5)$$

Действие оператора L_τ на второе слагаемое в (5) вызывает появление функции от аргумента, запаздывающего на τ . Чтобы выразить эту функцию через введенные выше функции, отметим следующее. При смене знака сдвига τ действие оператора $L_{-\tau}$ приводит к функции со сдвигом аргумента вперед на $\tau/2$: $L_{-\tau}\psi = -D\psi_{-\tau/2}$. Действие же разности операторов $(L_\tau - L_{-\tau})$ сохраняет аргумент гармонической функции:

$$(L_\tau - L_{-\tau})\psi(t) = -2\omega \sin(\omega\tau)\psi(t) = B\psi(t). \quad (6)$$

Используя это свойство, мы можем выразить результат действия оператора L_τ на $\cos \omega(t - \tau/2)$ через функции, введенные в (5): $L_\tau \psi_{\tau/2} = [L_{-\tau} + (L_\tau - L_{-\tau})]\psi_{\tau/2} = -D\psi + B\psi_{\tau/2}$.

Таким образом, операторы в уравнении (3), действуя на линейную комбинацию (5), сохраняют вид разложения. Вообще говоря, коэффициенты c_1 и c_2 суть комплексные числа, для которых уравнение (3) сводится к однородной системе линейных уравнений. Без ограничения общности коэффициент c_2 можно выбрать чисто мнимым: $c_2 = iy$. Подставляя решение в виде (5) в уравнение (3) и используя описанные выше свойства оператора L_τ и линейную независимость функций $\cos(\omega t)$ и $\cos \omega(t - \tau/2)$, получаем однородную линейную систему уравнений для коэффициентов c_1 и y :

$$\omega^2 c_1 = M \exp(-i\Omega\tau + i\kappa) D y + (1 - i\alpha)\omega_r^2 \text{Re} c_1, \quad (7)$$

$$\exp(i\Omega\tau - i\kappa)\omega^2 y = M D c_1 + i M B y. \quad (8)$$

Из уравнения (8), приравняв друг другу реальные части, находим связь y и $\text{Re} c_1$:

$$\omega^2 y \cos(\Omega\tau - \kappa) = M D \text{Re} c_1. \quad (9)$$

Далее, подставляя данное выражение для y в уравнение (7) и приравняв друг другу реальные части, находим одно из условий существования нетривиального решения (3):

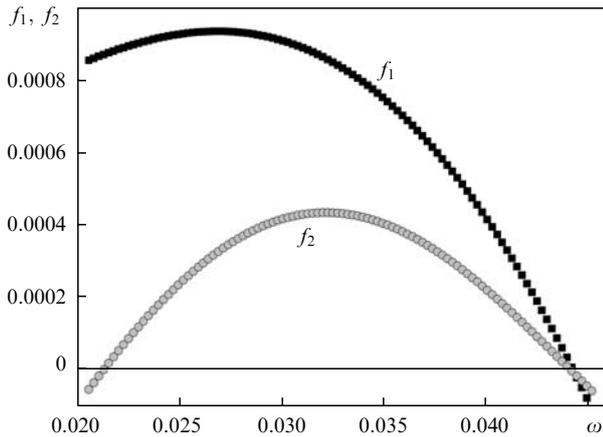
$$f_1(\omega) \equiv -\omega^2 + \omega_r^2 + M^2 D^2 \omega^{-2} = -\omega^2 + \omega_r^2 + 4M^2 \sin^2(\omega\tau/2) = 0. \quad (10)$$

Второе условие, следующее из уравнений (7), (8), содержит явную зависимость от α :

$$f_2(\omega) \equiv \omega^2 + [M\omega \sin(\omega\tau) \sin^{-1}(\Omega\tau - \kappa)] - \frac{1}{2}\omega_r^2 [1 - \alpha \tan^{-1}(\Omega\tau - \kappa)] = 0. \quad (11)$$

Таким образом, согласно (10) $\omega^2 = \omega_r^2 + 4M^2 \sin^2(\omega\tau/2)$. Выведенное соотношение позволяет сразу указать точные верхнюю и нижнюю границы для частоты малых гармонических колебаний ω : $\omega_r \leq \omega \leq (\omega_r^2 + 4M^2)^{1/2}$ при заданном значении ω_r .

Соотношения (10), (11) определяют частоту осцилляций и положение точки бифуркации Хопфа. Функции f_1 и f_2 построены на рис.3 для $\kappa = 3\pi/2$, $P = 0.2$, $M = 0.02$ и $\tau = 80$. В точке бифуркации функции f_1 и f_2 обращаются в нуль, при этом частота ω составляет 0.044, что примерно равно $2.2\omega_r$. При выбранных параметрах и времени жиз-

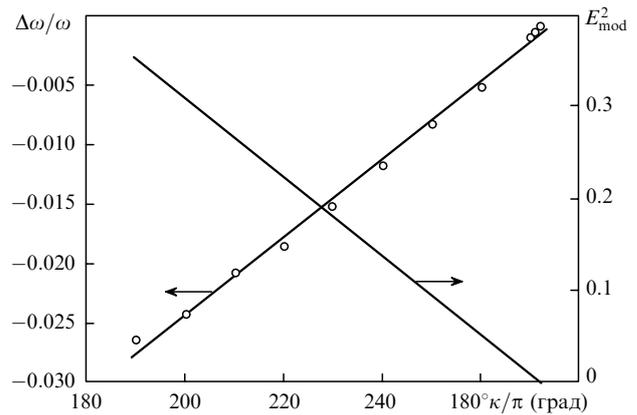
Рис.3. Графики функций $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$.

ни фотона в резонаторе диода $\tau_{ph} = 1$ пс частота осцилляций равна 7 ГГц. Это совпадает со значением, полученным непосредственным численным интегрированием уравнений ЛК с помощью описанной в [4] программы.

В точке $\kappa = 3\pi/2$ при уменьшении интенсивности накачки ($P < 0.2$) исчезает одновременное обращение в нуль функций f_1 и f_2 , т. е. бифуркации Хопфа нет, т. к. стационарное решение $\Omega \approx 0.2M(1 + \alpha^2)^{1/2}$ становится устойчивым. С ростом интенсивности накачки P область неустойчивости по отношению к бифуркации Хопфа (см. рис.1, средняя ветвь с $n = 2$) расширяется, и при $P = 0.2$ граница этой области пересекает точку $\kappa = 3\pi/2$. Прямое численное интегрирование уравнений ЛК показало, что с дальнейшим ростом накачки амплитуда осцилляций интенсивности увеличивается, что объясняется удалением точки бифуркации вправо (см. рис.1). При $P = 0.2$ гармоническая форма осцилляций сохраняется для широкого интервала κ : $4\pi/3 < \kappa < 3\pi/2$ (см. рис.2). Во всем интервале существования осцилляций, $1.05\pi < \kappa < 3\pi/2$, искажения гармонической формы модуляции малы.

По результатам численного интегрирования уравнений ЛК могут быть построены зависимости частоты и квадрата амплитуды осцилляции поля от значения фазы ОС (рис.4). Как видно из рис.4, частота уменьшается практически линейно при уменьшении κ для всего диапазона фаз ОС, и ее относительное изменение не превышает 2.7 %, тогда как квадрат амплитуды колебаний E_{mod}^2 увеличивается при этом до 0.36 (здесь $E_{mod} = (E_{max} - E_{min})/2$). Приведенные на рис.4 зависимости можно найти аналитически, учтя нелинейные поправки к уравнению (3). Нелинейные поправки, как и ангармонизм колебаний в классической механике, вызывают сдвиг частоты осцилляций, растущий с увеличением амплитуды колебаний. При учете квадратичной нелинейности теория возмущений приводит к перенормировке величины релаксационной частоты: $\tilde{\omega}_r^2 = \omega_r^2(1 - I)$, где $I = E_{mod}^2$. При этом вид уравнения (3) сохраняется, происходит только замена, $\omega_r^2 \rightarrow \tilde{\omega}_r^2$. Такая же перенормировка ω_r происходит и в уравнениях (10), (11), определяющих собственную частоту колебаний. Для малой окрестности точки бифуркации на рис.4 можно вывести формулы

$$\frac{1}{\omega} \frac{\Delta\omega}{\Delta I} \approx -\frac{\omega_r^2}{2\omega^2}, \quad \frac{1}{\omega} \frac{\Delta\omega}{\Delta\kappa} \approx \frac{\alpha}{4} \left(\frac{\omega}{2M} - \frac{2M}{\omega} \right)^2$$

Рис.4. Графики функций отстройки частоты $\Delta\omega/\omega$ и квадрата амплитуды модуляции поля E_{mod}^2 ($\kappa < 1.51\pi$).

для скорости изменения частоты как функции I и κ соответственно. Численная оценка дает $I \approx -0.3\Delta\kappa$, тогда как $\Delta\omega/\omega \approx 0.03\Delta\kappa$. Таким образом, относительное изменение частоты действительно намного меньше, чем изменение амплитуды модуляции.

Уравнения (10) и (11), определяющие положение точки бифуркации и частоту возникающих осцилляций, могут быть использованы для нахождения в явном виде параметров лазера, обеспечивающих максимальную частоту осцилляций

$$\omega_i = \frac{\pi}{\tau} (2i + 1) = \left(\omega_r^2 + 4M^2 \right)^{1/2},$$

где i — целое число. Задав ω_i и M , можно определить релаксационную частоту. Фаза, входящая в уравнение для стационарной частоты Ω , может быть найдена по формуле

$$\tan(\kappa - \Omega\tau) = \frac{\alpha\omega_r^2}{2\omega_i^2 - \omega_r^2} \equiv \chi.$$

С использованием последнего выражения и формулы (2) найдем явное выражение для Ω :

$$\frac{\Omega\tau}{s} = \left(\chi - \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ (1 + \chi^2) \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \right] \right\}^{-1/2}.$$

Интенсивность накачки, соответствующая выбранным значениям ω_i и M , находится с помощью определения частоты ω_r (4). Например, при $i = 1$, $M = 0.035$, $\tau = 80$ ($s = 8.85$) и времени жизни фотона 1 пс $f_1 = \omega_1/2\pi\tau_{ph} = 18.75$ ГГц. Эта частота осцилляций достигается при интенсивности накачки $P \approx 4.49$, что соответствует четырехкратному превышению тока накачки над порогом. Частота стационарного решения в точке бифуркации $\Omega/2\pi\tau_{ph} = 10.5$ ГГц, а $\kappa \approx 180^\circ$. Проведенные численные расчеты подтвердили наличие точки бифуркации и осциллирующего решения с частотой 19 ГГц. Описанный подход к нахождению точек бифуркации с высокой частотой осцилляций возникающих решений должен сопровождаться прямым численным расчетом, т. к. нас интересуют только бифуркации из устойчивого стационарного решения. Выведенные формулы описывают также случаи, когда бифуркация происходит из неустойчивого (т. е. нереализуемого) стационарного решения.

4. Заключение

Анализ работы полупроводникового лазера с внешней обратной связью в приближении уравнений Лэнга – Кобаяши позволил описать осцилляторное решение, возникающее в точке бифуркации Хопфа при разрушении устойчивости стационарных решений. Для описания гармонической модуляции мощности излучения лазера выведено дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом и предложен метод его решения. В результате анализа этого уравнения найдено относительно простое трансцендентное уравнение, дающее верхнюю и нижнюю границу частоты осцилляций при заданных параметрах лазера. Предложена процедура нахождения параметров лазера, обеспечивающих наличие бифуркации с переходом в осцилляции с заданной частотой. В частности, для времени жизни фотона в резонаторе диода $\tau_{ph} =$

1 пс найдены параметры лазера и указан режим его работы, при котором осцилляции происходят с частотой 19 ГГц, что может представлять интерес для систем оптической связи со спектральным уплотнением.

1. Verduyn Lunel S.M., Krauskopf B., in 'Fundamental Issues of Non-linear Laser Dynamics'. Ed. by B.Krauskopf, D.Lenstra (Melville, NY: AIP Conf. Proc., 2000, Vol. 548, p. 66).
2. Убайдуллаев Р.Р. *Волоконно-оптические сети* (М.: Эко-Трендз, 2001).
3. Lang R., Kobayashi K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
4. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **34** (7), 630 (2004).
5. Winful H.G., Rahman L. *Phys. Rev. Lett.*, **65** (13), 1575 (1990).
6. Winful H.G., Wang S.S. *Appl. Phys. Lett.*, **53** (20), 1894 (1988).
7. Беспалов В.И., Таланов В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **3** (12), 471 (1966).
8. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* (М.: Мир, 1989).