

# Динамика генерации сфазированной трехканальной голографической Nd : YAG лазерной системы

Т.Т.Басиев, А.В.Гаврилов, В.В.Осико, С.Н.Сметанин, А.В.Федин

*Развит метод фазовой синхронизации параллельной многоканальной лазерной системы на голографических решетках коэффициента усиления в активной лазерной среде при дальнедействующей голографической связи лазерных каналов. Проведено математическое моделирование динамики генерации трехканальной голографической лазерной системы на основе Nd : YAG, в которой условия фазовой синхронизации рассматриваются в зависимости от относительной расстройки коэффициентов усиления в каналах генерации. Выявлены условия генерации с выделенным по усилению управляющим лазерным каналом, при которых синхронизация управляемых каналов наблюдается даже в случае трехкратного различия их усиления.*

**Ключевые слова:** голографическая связь, условия генерации, многоканальная лазерная система, фазовая синхронизация.

В работе [1] нами предложен способ фазовой синхронизации оптически связанных петлевых лазерных резонаторов на решетках усиления, записанных при четырехволновом взаимодействии непосредственно в среде активных элементов лазера. Экспериментально показана принципиальная возможность фазовой самосинхронизации двухканальной лазерной системы на основе Nd : YAG с параллельным соединением каналов генерации. Такой способ не требует дополнительных нелинейных сред и источников внешней лазерной накачки, поэтому мы предлагаем использовать его в высокомошных многоканальных голографических лазерных системах при осуществлении дальнедействующей связи каналов генерации (связь каждого лазерного канала с каждым) [2] в среде общего активного элемента.

В настоящей работе проведено численное моделирование динамики лазерной генерации при дальнедействующей дифракционной связи трех голографических лазеров для изучения возможности осуществления фазовой синхронизации с целью создания разветвленной последовательно-параллельной многоканальной лазерной системы. Экспериментальные результаты приведены в работе [3].

Рассмотрим процесс развития генерации в лазере с вырожденным многоволновым взаимодействием (ВМВВ) в активной среде, используя подход, предложенный нами в [1, 4]. Будем учитывать только пропускающие решетки усиления, поскольку их дифракционная эффективность в  $G$  раз больше дифракционной эффективности отражающих

решеток [4] ( $G$  – однопроходное усиление активной среды). Для упрощения модели решетками показателя преломления пренебрегаем, т. к. согласно [5] при коэффициенте усиления активных элементов  $\alpha \leq 0.4 \text{ см}^{-1}$  мнимая часть нелинейной восприимчивости в два и более раз превышает действительную, а следовательно, решетки показателя преломления не играют решающей роли во внутрирезонаторном процессе ВМВВ [6]. Также полагаем, что время ВМВВ мало по сравнению с временем жизни  $T_1$  верхнего лазерного уровня. Это хорошо согласуется с длительностями импульсов как при самомодуляции ( $\sim 10^{-7}$  с [1, 7]), так и при модуляции добротности ( $\sim 10^{-8}$  с [8, 9]), которые малы по сравнению с временем  $T_1$  для неодимовых активных сред ( $\sim 10^{-4}$  с). Тогда коэффициент усиления активной среды по амплитуде поля определяется как [10]

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp \left[ - \frac{U_{\text{tot}}(t)}{U_s} \right], \quad (1)$$

где  $\alpha_0$  – коэффициент усиления слабого сигнала по амплитуде поля;  $U_s = 0.55 \text{ Дж/см}^2$  – плотность энергии насыщения усиления Nd : YAG-среды;

$$U_{\text{tot}}(t) = \int_0^t I_{\text{tot}}(t') dt' \quad (2)$$

– общая плотность энергии;  $I_{\text{tot}}(t)$  – суммарная интенсивность в среде в определенный момент времени. Следовательно, при ВМВВ в усиливающей среде согласно (1) будет происходить модуляция коэффициента ее усиления:

$$\alpha = \alpha_0 \exp(-\sigma) \exp \left[ - \sum_{\tau} g_{\tau} \cos(\mathbf{K}_{\tau} \mathbf{r} - \varphi_{\tau}) \right], \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{1}{U_s} \int_0^t I_{\text{mean}} dt', \quad (4)$$

Т.Т.Басиев, В.В.Осико. Научный центр лазерных материалов и технологий Института общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: basiev@lst.gpi.ru  
А.В.Гаврилов, С.Н.Сметанин, А.В.Федин. Ковровская государственная технологическая академия им. В.А.Дегтярева, Россия, Владимирская обл., 601910 Ковров, ул. Маяковского, 19; e-mail: kanir@kc.ru

Поступила в редакцию 25 мая 2006 г., после доработки – 28 сентября 2006 г.

$$g_\tau = \frac{1}{U_s} \int_0^t I_{\text{coh}}^\tau dt', \quad (5)$$

где  $\tau$  – номер пропускающей голографической решетки (при записи нескольких решеток);  $g_\tau$  – когерентный параметр, описывающий каждую голографическую решетку;  $\mathbf{K}_\tau$  – вектор решетки;  $\varphi_\tau$  – фаза решетки;  $\sigma$  – средний (некогерентный) параметр насыщения;  $I_{\text{mean}}$  – средняя интенсивность в среде;  $I_{\text{coh}}^\tau$  – интенсивность поля, обусловленная интерференцией пар волн, записывающих данную пропускающую решетку.

Для описания трехканальной лазерной системы с одним общим активным элементом межканальной связи рассмотрим запись в активной среде одновременно трех пропускающих решеток ( $\tau = 1, 2, 3$ ) в результате интерференции трех пар волн при ВМВВ в активной (усиливающей) среде. Пользуясь формулой разложения в ряд [11] и выделяя первые два его члена

$$\begin{aligned} \exp(-y \cos \theta) &= I_0(y) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k(y) \cos(k\theta) \\ &\approx I_0(y) - 2I_1 \cos \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $I_0, I_k$  – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и  $k$ -го порядков, получаем параметры пространственной модуляции коэффициента усиления в гармоническом приближении, справедливом при малой по сравнению с  $U_s$  плотности потока энергии:

$$\alpha = a + \sum_{\tau} 2b_\tau \cos(\mathbf{K}_\tau \mathbf{r} - \varphi_\tau), \quad (7)$$

$$a = \alpha_0 \exp(-\sigma) I_0(g_1) I_0(g_2) I_0(g_3), \quad (8)$$

$$b_1 = -\alpha_0 \exp(-\sigma) I_1(g_1) I_0(g_2) I_0(g_3), \quad (9)$$

$$b_2 = -\alpha_0 \exp(-\sigma) I_0(g_1) I_1(g_2) I_0(g_3), \quad (10)$$

$$b_3 = -\alpha_0 \exp(-\sigma) I_0(g_1) I_0(g_2) I_1(g_3), \quad (11)$$

где  $a$  – среднее значение коэффициента усиления активной среды;  $2b_\tau$  – амплитуда модуляции коэффициента усиления, соответствующая каждой решетке усиления.

На рис. 1 представлена оптическая схема исследованной нами трехканальной голографической лазерной системы с дальнедействующей дифракционной связью каналов генерации. Каждый канал генерации представляет собой лазер с петлевым самонакачивающимся фазовоспряженным резонатором. В каждом голографическом активном элементе (АЭГ) записывается пропускающая решетка усиления, дающая обратную связь для создания динамического резонатора [7]. Невзаимные элементы направляют генерацию в сторону выходного зеркала обратной связи, сохраняют ненасыщенным коэффициент усиления в общем активном элементе межканальной связи (АЭС) до момента выхода на генерацию лазерных каналов, а также выравнивают интенсивности волн, записывающих решетки усиления в АЭГ. Связь между каналами генерации осуществляется линейно через светоделительные зеркала С32 и С33 для записи решеток усиления в активных элементах каждого канала, а также нелинейно путем дифракционного обмена излучением генерации каждого канала внутри АЭС, который также яв-

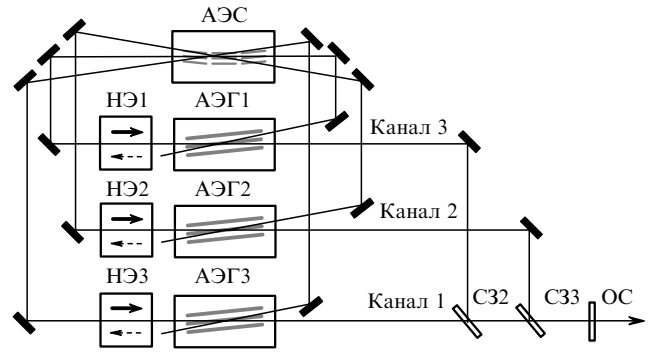


Рис. 1. Оптическая схема трехканальной лазерной системы: АЭГ1, 2, 3 – голографические активные Nd:YAG-элементы; АЭС – активный Nd:YAG-элемент межканальной связи; НЭ1, 2, 3 – невзаимные элементы Фарадея; С32, 3 – светоответвители во 2-й и 3-й каналы генерации; ОС – зеркало обратной связи.

ляется внутриволновым усилителем в каждом отдельном канале генерации. Коэффициенты отражения светоделителей С32 и С33, направляющих часть излучения соответственно во 2-й и 3-й каналы, выбираются из условия равного распределения излучения по каналам генерации. При сложении излучений каналов в один коллинеарный пучок согласно схеме рис. 1, для коэффициентов отражения в канал получаем  $R_i = 1/i$ , где  $i$  – номер канала генерации. Тогда коэффициенты отражения  $R_2$  и  $R_3$  светоделителей С32 и С33 во 2-й и 3-й каналы равны  $1/2$  и  $1/3$  соответственно.

Построим математическую модель динамики генерации данного лазера. Предположим, что в каждом канале не только развивается собственная мода, но и происходит инжекция части излучения из одного канала в другой (подкачка «чужой» моды) через АЭС. Будем искать режим генерации сфазированного одночастотного излучения при селекции мод. В связи с этим можно не учитывать фазовые соотношения, ответственные за биения мод, и, в предположении сильной селекции продольных мод, во всех каналах рассматривать генерацию только моды управляющего (сильного) канала [1]. Возможность существования в каналах «чужой» частоты объясняется самоподстройкой под эту частоту длин динамических резонаторов [12], свойственной лазерам на решетках усиления с самообращением волнового фронта (самоОВФ).

Из геометрии оптической схемы следует, что линейная связь между каналами через светоделители осуществляется только для записи самоОВФ-зеркал во всех активных элементах волнами вырожденной частоты управляющего канала, поэтому учитывается только вырожденное по частоте многоволновое взаимодействие. Запишем систему связанных уравнений, описывающие динамику ВМВВ на смешанных голографических решетках в активной среде лазера. Система уравнений [13] для элемента АЭГ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_1 &= aE_1 + b_1 E_4, \\ \left( -\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_2 &= aE_2, \\ \left( -\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_3 &= aE_3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_4 = aE_4 + b_1 E_1.$$

Для элемента АЭС

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_1 = aE_1 + b_1 E_6 + b_2 E_4,$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_2 = aE_2,$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_3 = aE_3,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_4 = aE_4 + b_2 E_1 + b_3 E_6,$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_5 = aE_5,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_6 = aE_6 + b_1 E_1 + b_3 E_4.$$

Здесь  $v$  – скорость света;  $E_{1-6}$  – модули медленно меняющихся амплитуд плоских волн, вступающих в ВМВВ;  $b_1$  – коэффициент связи, описывающий эффективность голограммы, записанной парой волн  $E_2$  и  $E_3$ , которые распространяются в отрицательном ( $-z$ ) направлении (за положительное ( $+z$ ) направление принято направление генерации выходного излучения). В систему уравнений (13) для элемента межканальной связи АЭС по сравнению с формулой (12) добавляются еще два уравнения, поскольку запись голограмм осуществляется всеми сочетаниями пар волн, распространяющихся в отрицательном направлении, – парами волн  $E_2$  и  $E_3$  (коэффициент связи  $b_1$  дает связь каналов 1 и 2),  $E_2$  и  $E_5$  ( $b_2$  – связь каналов 1 и 3),  $E_3$  и  $E_5$  ( $b_3$  – связь каналов 2 и 3).

Системы уравнений (12) и (13) позволяют исследовать динамику развития дифракционно-связанной генерации в трехканальной лазерной системе, если задавать граничные условия расчета, соответствующие схеме на рис.1.

Рассмотрим условия синхронизации каналов генерации при введении расстройки усиления  $\Delta\alpha_{ij}$  между  $i$ -м и  $j$ -м каналами. Введем фактор  $f_{ij}$  синхронизации (перекрытия импульсов), описывающий площадь перекрытия выходных импульсов генерации каждого сочетания ( $ij$ ) пар каналов 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3 [1]:

$$f_{ij} = \frac{\int 2(I_i I_j)^{1/2} dt}{\int (I_i + I_j) dt}, \quad (14)$$

где  $I_i, I_j$  – интенсивности на выходе в определенный момент времени в импульсах генерации каналов  $i$  и  $j$  соответственно. Фактор синхронизации, нормированный на единицу ( $f_{ij} = 1$ ), соответствует полной синхронизации (перекрытию)  $i$ -го и  $j$ -го импульсов;  $f_{ij} = 0$  соответствует их полной расстройке.

На рис.2 представлены результаты численного решения, показывающие динамику развития моноимпульса  $I_i$  генерации в каналах 1, 2 и 3 лазерной системы и дифракционной эффективности  $\eta_i$  голограмм в  $i$ -м канале

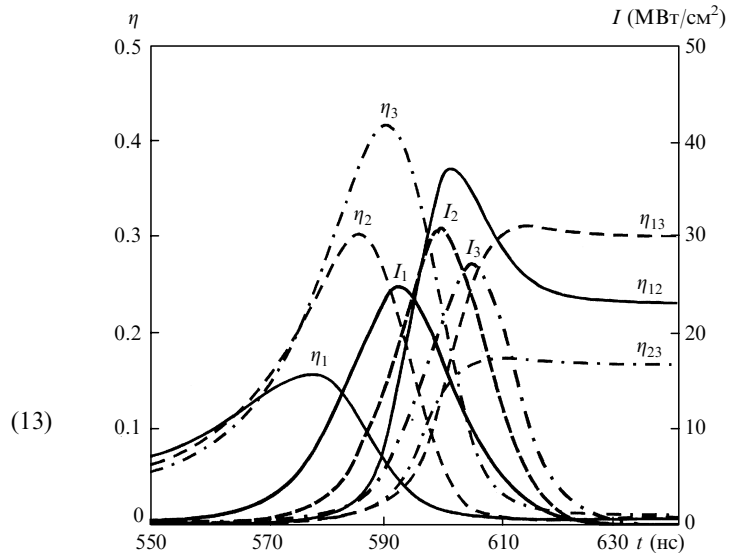


Рис.2. Расчетные диаграммы динамики генерации при относительной расстройке коэффициента усиления в каналах генерации  $\Delta\alpha_{12} = \Delta\alpha_{23} = 0.003 \text{ см}^{-1}$  и  $\Delta\alpha_{13} = \Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{23} = 0.006 \text{ см}^{-1}$ ;  $\eta_1 - \eta_3$  – дифракционные эффективности голограмм в АЭГ 1, АЭГ 2 и АЭГ 3 соответственно,  $\eta_{12}$  – дифракционная эффективность в АЭС голограмм связи 1-го и 2-го каналов,  $\eta_{13}$  – дифракционная эффективность в АЭС голограмм связи 1-го и 3-го каналов;  $\eta_{23}$  – дифракционная эффективность в АЭС голограмм связи 2-го и 3-го каналов;  $I_1 - I_3$  – интенсивности излучения 1-го, 2-го и 3-го каналов соответственно

генерации (в элементе АЭГ), а также дифракционной эффективности голограмм (в элементе АЭС) связи каналов 1 и 2 ( $\eta_{12}$ ), каналов 1 и 3 ( $\eta_{13}$ ) и каналов 2 и 3 ( $\eta_{23}$ ). Входные параметры системы следующие: длина активного элемента  $L = 10$  см, начальный коэффициент усиления по амплитуде поля элементов АЭГ1 и АЭС  $\alpha_1 = 0.205 \text{ см}^{-1}$  (однопроходное усиление слабого сигнала  $G_0 = 60.3$ ), расстройка усиления в каналах генерации  $\Delta\alpha_{12} = \Delta\alpha_{23} = 0.003 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta\alpha_{13} = \Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{23} = 0.006 \text{ см}^{-1}$ , т. е. АЭГ2 имеет начальный коэффициент усиления  $\alpha_2 = 0.202 \text{ см}^{-1}$  ( $G_0 = 56.8$ ), а АЭГ3 –  $\alpha_3 = 0.199 \text{ см}^{-1}$  ( $G_0 = 53.5$ ); контраст невязанного элемента  $K = T_{NR}/t_{NR} = 80$  ( $T_{NR} = 0.8$  и  $t_{NR} = 0.01$  – коэффициенты пропускания невязанного элемента соответственно в открытом и закрытом направлениях); коэффициент отражения выходного зеркала обратной связи  $R = 0.05$ ; длина каждого резонатора 3 м.

Интенсивность излучения на рис.2 показана для импульсов каждого канала, идущих на выход лазера, т. е. падающих на зеркало обратной связи. Видно, что на выходе лазерной системы импульсы сдвинуты во времени относительно друг друга. Иначе говоря, при наличии даже такой малой расстройки усиления, как  $\Delta\alpha_{ij}$ , временная задержка между импульсами  $i$ -го и  $j$ -го каналов приводит к снижению эффективности их интерференционного сложения. При этом факторы синхронизации (14) каналов между собой таковы:  $f_{12} = 0.94, f_{13} = 0.81, f_{23} = 0.96$ .

Из рис.2 также следует, что при равной относительной расстройке усиления между каналами 1, 2 и 3 ( $\Delta\alpha_{12} = \Delta\alpha_{23}$ ) сдвиг импульсов генерации задающего (1-го) и ближайшего по усилению управляемого (2-го) канала ( $\Delta t_{12} = 8$  нс) больше сдвига для пары управляемых (2-го и 3-го) каналов ( $\Delta t_{23} = 3$  нс). Это указывает на то, что 1-й лазерный канал является управляющим каналом. Он запускает генерацию в остальных управляемых (2-м и 3-м) лазерных каналах и приводит к лучшей их синхронизации

благодаря дальнедействующей связи лазерных каналов, т.к. управляемые каналы связаны не только с управляющим каналом, но и между собой. При этом пиковая интенсивность излучения  $I_1$  в 1-м (управляющем) канале с большим усилением ниже пиковых интенсивностей излучения  $I_2$  и  $I_3$  во 2-м и 3-м (управляемых) каналах с меньшим усилением (см. рис.2). Это объясняется тем, что при дальнедействующей связи лазерных каналов благодаря высокой дифракционной эффективности ( $\eta_{12}$  и  $\eta_{13}$ ) голограмм связи излучение, инжектируемое из 1-го во 2-й и 3-й каналы, интенсифицирует развитие их генерации, приводя к более быстрому росту дифракционных эффективностей  $\eta_2$  и  $\eta_3$  решеток насыщения усиления в АЭГ 2, 3 и к более интенсивному нелинейному этапу развития генерации с пиковыми интенсивностями лазерного излучения  $I_{2,3} > I_1$ . Максимум дифракционной эффективности  $\eta_3$  оказывается больше максимума дифракционной эффективности  $\eta_2$ , что обусловлено дополнительной инжекцией излучения из 2-го в 3-й канал благодаря связи управляемых каналов между собой с дифракционной эффективностью  $\eta_{23}$ . Это обеспечивает уменьшение сдвига импульсов  $\Delta t_{23}$  по сравнению с  $\Delta t_{12}$ , т.е. лучшую синхронизацию управляемых каналов. Однако коэффициент усиления  $\alpha_3 < \alpha_2$ , поэтому в результате развития генерации интенсивность импульсов  $I_3 < I_2$ .

Мы обнаружили, что на временной сдвиг  $\Delta t_{23}$  пары выходных импульсов управляемых лазерных каналов влияет не только собственная расстройка коэффициента усиления  $\Delta\alpha_{23}$ , но и расстройка коэффициента усиления  $\Delta\alpha_{12}$  управляемых каналов относительно управляющего канала. Введем в качестве критического фактора перекрытия каждой пары выходных лазерных импульсов  $f_{cr\,ij} = 0.5$ . При этом в случае гауссовой формы импульсов излучения их относительный временной сдвиг  $\Delta t_{ij} = \tau$ , где  $\tau$  – длительность импульсов на полувысоте. Тогда для  $f_{cr\,23}$  можно определить соответствующие ему критические значения расстройки усиления  $\Delta\alpha_{cr\,23}$  в зависимости от расстройки усиления  $\Delta\alpha_{12}$  в другой паре каналов.

На рис.3 показана расчетная зависимость критической расстройки коэффициента усиления  $\Delta\alpha_{cr\,23}$  между 2-м и 3-м каналами, которой соответствует критерий  $f_{cr\,23} = 0.5$ , от расстройки коэффициента усиления  $\Delta\alpha_{12}$  между 1-м и 2-м каналами. Последнее значение  $\Delta\alpha_{12} = 0.017 \text{ см}^{-1}$  на графике соответствует критической расстройке усиления  $\Delta\alpha_{cr\,12}$  между каналами 1 и 2 (когда  $f_{12}$  падает до уровня  $f_{cr\,12}$ ). Видно, что практически при любой расстройке  $\Delta\alpha_{12}$  критические значения  $\Delta\alpha_{cr\,23}$  больше  $\Delta\alpha_{cr\,12}$ . При этом с ростом  $\Delta\alpha_{12}$  значение допустимой критической расстройки  $\Delta\alpha_{cr\,23}$  увеличивается, что указывает на снижение требований к относительному выравниванию усиления в управляемых каналах. Это становится важным преимуществом лазерной системы при увеличении числа каналов, когда основной вклад в ее выходную энергию дает набор управляемых каналов генерации.

При наибольшем (критическом) значении  $\Delta\alpha_{12} = 0.017 \text{ см}^{-1}$  допустимо, чтобы однопроходное усиление слабого сигнала в управляемых каналах различалось даже в 3 раза ( $\exp(2 \times 0.055L) = 3$ ). Это можно объяснить экспоненциальным ростом дифракционной эффективности голограмм связи каналов  $\eta_{ij}$  (см. рис.2) после выхода на генерацию 1-го (управляющего) канала.

Таким образом, при дальнедействующей связи в многоканальной лазерной системе наиболее важным явля-

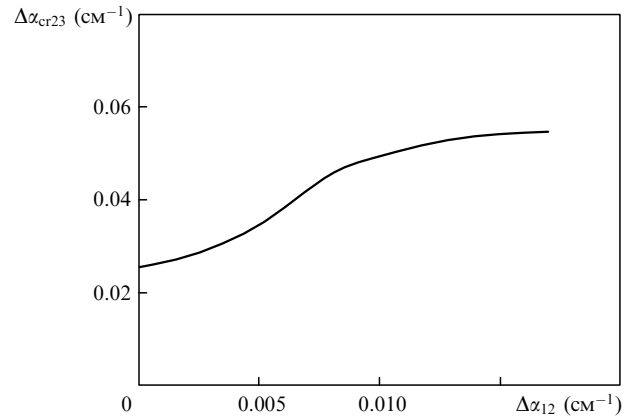


Рис.3. Расчетная зависимость критической расстройки коэффициента усиления  $\Delta\alpha_{cr\,23}$  между управляемыми (2-м и 3-м) каналами (критическая расстройка соответствует критерию  $f_{cr\,23} = 0.5$ ) от расстройки коэффициента усиления  $\Delta\alpha_{12}$  между управляющим (1-м) и управляемым (2-м) каналами.

ется выравнивание усиления только между управляющим каналом и набором управляемых каналов генерации. Однако, как показывает расчет, при дальнейшем увеличении числа каналов данное требование становится менее жестким. Усиление слабого сигнала может различаться уже в 1.4 раза ( $\exp(2 \times \Delta\alpha_{cr\,12}L) = 1.4$ ), т.к. при большей расстройке коэффициентов усиления  $\Delta\alpha_{12}$  управляющего и управляемых лазеров значение  $\Delta\alpha_{cr\,23}$  растет и управляемые каналы лучше синхронизируются между собой. Кроме того, увеличение числа каналов голографической лазерной системы приводит к возрастающей зависимости параметров излучения управляемых лазерных каналов от параметров генерации управляющего лазерного канала. Это расширяет диапазон фазовой самосинхронизации параллельной многоканальной голографической лазерной системы с дальнедействующей связью.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.9211).

1. Басиев Т.Т., Федин А.В., Гаврилов А.В. и др. *Квантовая электроника*, **33**, 659 (2003).
2. Бельдогин И.М., Золотарев М.В., Шинкарева И.В. *Квантовая электроника*, **24**, 424 (1997).
3. Басиев Т.Т., Гаврилов А.В., Осико В.В., Сметанин С.Н., Федин А.В. *Квантовая электроника*, **37**, 143 (2007).
4. Basiev T.T., Fedin A.V., Osiko V.V., et al. *Laser Phys.*, **13**, 903 (2003).
5. Антипов О.Л., Кужелев А.С., Лукьянов А.Ю., Зиновьев А.П. *Квантовая электроника*, **25**, 891 (1998).
6. Nikolaev D.A., Bufetova G.A., Shcherbakov I.A., et al., in *Techn. Dig. Conf. Lasers, Applications and Technologies* (Moscow, Russia, 2002, p. 42).
7. Damzen M.J., Green R.P.M., Syed K.S. *Opt. Lett.*, **20**, 1704 (1995).
8. Fedin A.V., Gavrilov A.V., Basiev T.T., et al. *Laser Phys.*, **9**, 433 (1999).
9. Бельдогин И.М., Беренберг В.А., Васильев А.Е. и др. *Квантовая электроника*, **16**, 1142 (1989).
10. Brignon A., Hujnard J.-P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 2203 (1994).
11. Bickley W.G. *Bessel Functions and Formulae* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953).
12. Лиханский В.В., Напартович А.П. *УФН*, **160**, 101 (1990).
13. Syed K.S., Crofts G.J., Green R.P.M., et al. *J. Opt. Soc. Am. B.*, **14**, 2067 (1997).