

Оптические системы для измерения функции Вигнера лазерного пучка методом фазово-пространственной томографии

А.В.Гитин

При использовании математического аппарата матричной оптики с единой точки зрения рассмотрены геометрический и волновой подходы к преобразованию семейства распределений освещенности, измеренных в различных сечениях сфокусированного оптической системой лазерного пучка, в семейство разноракурсных проекций функции Вигнера этого пучка, необходимых для восстановления данной функции методом компьютерной томографии.

Ключевые слова: функция Вигнера, фазово-пространственная томография, дробно-линейное преобразование Фурье, матричная оптика.

1. Введение

Функция Вигнера применяется в квантовой механике с тридцатых годов прошлого века. В 1968 г. Вальтер стал использовать функцию Вигнера в оптике и с ее помощью показал, что два раздела оптики, ранее считавшиеся независимыми, – теория частичной пространственной когерентности и радиометрия неламбертовых источников – на самом деле имеют общий предмет исследования: перенос энергии излучения от источников с неламбертовой диаграммой направленности, в частности от лазерных источников [1]. В современных международных стандартах функция Вигнера используется для описания энергетической структуры лазерного пучка, т. к. только она позволяет логически увязать такие экспериментально контролируемые параметры пучка, как его диаметр, расходимость, M^2 -фактор и т. д. [2–4].

Светочувствительная площадка матричного фотоприемника (например, прибора с зарядовой связью [5]) не обладает угловой селективностью и регистрирует только распределение освещенности в плоскости сечения лазерного пучка, где она установлена. Поэтому с помощью такого фотоприемника невозможно непосредственно измерить функцию Вигнера лазерного пучка, заданную на фазовой плоскости координата–пространственная частота, причем координата соответствует координате плоскости сечения. Измеряемое приемником распределение освещенности можно интерпретировать как ортогональную проекцию функции Вигнера на ось координат.

Существует особый класс оптических систем, при прохождении которых функция Вигнера лазерного пучка поворачивается в фазовой плоскости на угол φ , который зависит от параметров оптической системы [6].

Поэтому фотоприемник, светочувствительная площадка которого установлена в выходной плоскости такой оптической системы, измерит проекцию функции Вигнера, заданной во входной плоскости оптической системы, с углом проекции (ракурсом) φ .

В простейшем одномерном случае, когда рассматривается меридиональное сечение лазерного пучка, функция Вигнера – трехмерный объект, заданный в фазовой плоскости на входе оптической системы, а регистрируемое приемником на выходе оптической системы распределение освещенности – его двумерная проекция с ракурсом φ . Трехмерный объект можно восстановить из семейства его разноракурсных двумерных проекций методом компьютерной томографии [7]. Разновидность метода компьютерной томографии, в которой искомым объектом является функция Вигнера лазерного пучка во входной плоскости оптической системы вычисляется из семейства распределений освещенностей, измеренных в выходной плоскости оптической системы при варьировании параметров этой системы, называется методом фазово-пространственной томографии [8–10]. Подчеркнем специфическую особенность этого метода: механическое вращение изучаемого объекта в реальном пространстве заменяется оптическим вращением изучаемой функции Вигнера в воображаемом фазовом пространстве.

Однако для создания оптической системы, позволяющей вращать функцию Вигнера в фазовом пространстве, необходимо иметь линзу с переменным фокусным расстоянием [6]. Роль такой линзы выполняет многолинзовый объектив или деформируемое зеркало. Применение таких нестандартных оптических элементов приводит к существенному увеличению стоимости конструкции и, самое важное, к искажению структуры исследуемого лазерного пучка. Поэтому для практических исследований используют иные, более простые оптические системы с обычными линзами, распределение освещенностей в выходной плоскости которых можно пересчитать в проекцию искомым функцией Вигнера лазерного пучка [8–10]. Известны два альтернативных подхода к такого рода расчетам: один из них базируется на волновой оптике и в нем используется математический аппарат фурье-оптики

A.V.Gitin. Max-Born-Institut für Nichtlineare Optik und Kurzzeitspektroskopie, Max-Born-Str. 2 A, 12489 Berlin, Germany
www.mbi-berlin.de; e-mail: andrey.gitin@gmx.de

Поступила в редакцию 29 декабря 2005 г., после доработки – 13 июня 2006 г.

[8, 9], другой – на геометрической оптике и в нем используется математический аппарат матричной оптики [10].

Цель настоящей работы – рассмотреть с единой точки зрения известные геометрический и волновой подходы к расчету оптических систем, предназначенных для практической реализации метода фазово-пространственной томографии, используя математический аппарат матричной оптики.

2. Функция Вигнера лазерного пучка

Ограничимся скалярным квазимонохроматическим приближением, т. е. пренебрежем поляризационными эффектами и спектральным составом излучения, и, для простоты, рассмотрим одномерный случай, соответствующий меридиональному сечению лазерного пучка в оптической системе, состоящей из цилиндрических линз с параллельными образующими. Пусть скалярная квазимонохроматическая одномерная световая волна распространяется вдоль оси z . Тогда ее волновое поле, заданное в ортогональном сечении z , описывается или комплексной амплитудой $U(x)$, или комплексным спектром $\tilde{U}(u)$, где x и u – пространственные координата и частота соответственно. Эти описания эквивалентны:

$$\tilde{U}(u) = F_{x \rightarrow u}\{U(x)\}, \quad U(x) = F_{u \rightarrow x}^{-1}\{\tilde{U}(u)\}, \quad (1)$$

т. к. связаны преобразованиями Фурье

$$F_{x \rightarrow u}\{\dots\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \{\dots\} \exp(-iux) dx,$$

$$F_{u \rightarrow x}^{-1}\{\dots\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\dots\} \exp(iux) du.$$

Пространственную когерентность этой световой волны характеризуют двухточечные корреляционные функции – взаимная интенсивность

$$\Gamma(x_1, x_2) \equiv \langle U(x_1)U^*(x_2) \rangle \quad (2a)$$

или взаимный спектр

$$\tilde{\Gamma}(u_1, u_2) \equiv \langle \tilde{U}(u_1)\tilde{U}^*(u_2) \rangle. \quad (2b)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по ансамблю, а знак $*$ – комплексное сопряжение.

Если перейти к средним переменным $x = (x_1 + x_2)/2$, $u = (u_1 + u_2)/2$ и разностным переменным $\zeta = x_2 - x_1$, $\xi = u_2 - u_1$, то с помощью преобразования Фурье от разностных переменных из корреляционных функций (2a), (2b) легко получить математически эквивалентную им, но более удобную характеристику пространственной когерентности излучения – функцию Вигнера (Wigner distribution function) [1, 11, 12]

$$W(x, u) \equiv F_{\zeta \rightarrow u} \left\{ \Gamma \left(x + \frac{\zeta}{2}, x - \frac{\zeta}{2} \right) \right\}$$

$$= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left\{ \tilde{\Gamma} \left(u + \frac{\xi}{2}, u - \frac{\xi}{2} \right) \right\}. \quad (3)$$

В частности, объединяя выражения (1)–(3), получаем явный вид функции Вигнера в координатном представлении:

$$W(x, u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U \left(x + \frac{\zeta}{2} \right) U^* \left(x - \frac{\zeta}{2} \right) \exp(-iu\zeta) d\zeta. \quad (4)$$

Функция Вигнера обладает многими полезными свойствами. При интегрировании ее по координате x и пространственной частоте u получим поток излучения Φ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, u) dx du = \Phi,$$

при интегрировании по координате x – распределение интенсивности излучения по пространственным частотам $I(u)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, u) dx = \langle |\tilde{U}(u)|^2 \rangle = I(u), \quad (5a)$$

и при интегрировании по пространственной частоте u – распределение освещенности $E(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, u) du = \langle |U(x)|^2 \rangle = E(x). \quad (5b)$$

Известно, что функция Вигнера (4) может принимать отрицательные значения, но распределение освещенности (5b) всегда неотрицательная функция.

3. Проекция функции Вигнера с ракурсом φ и дробное преобразование Фурье

Выбрав систему единиц, в которой длина волны монохроматического излучения λ фиксирована и равна, например, 2π , перейдем к безразмерным координатам x и u . Рассмотрим в безразмерном фазовом пространстве декартову систему координат $x_\varphi u_\varphi$, повернутую на произвольный угол φ в направлении против часовой стрелки относительно исходной системы координат xu . Эти системы координат связаны преобразованием

$$x_\varphi = x \cos \varphi + u \sin \varphi, \quad u_\varphi = -x \sin \varphi + u \cos \varphi, \quad (6a)$$

или, в матричной форме, преобразованием

$$\begin{pmatrix} x_\varphi \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \quad (6b)$$

Ортогональная проекция $P_\varphi(x_\varphi)$ функции Вигнера $W(x, u)$ с ракурсом φ определяется выражением (рис.1,a)

$$P_\varphi(x_\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_\varphi \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi, x_\varphi \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi) du_\varphi. \quad (7)$$

Заметим, что проекция функции Вигнера (7) с ракурсом $\varphi = 0$ соответствует распределению освещенности и квадрату комплексной амплитуды (5b), а проекция с ракурсом $\varphi = 90^\circ$ – распределению интенсивности излучения по пространственным частотам и квадрату комплексного спектра (5a) (рис.1,б):

$$P_0(x_0) = E(x) = \langle U(x)U^*(x) \rangle,$$

$$P_{90^\circ}(x_{90^\circ}) = I(u) = \langle \tilde{U}(u)\tilde{U}^*(u) \rangle.$$

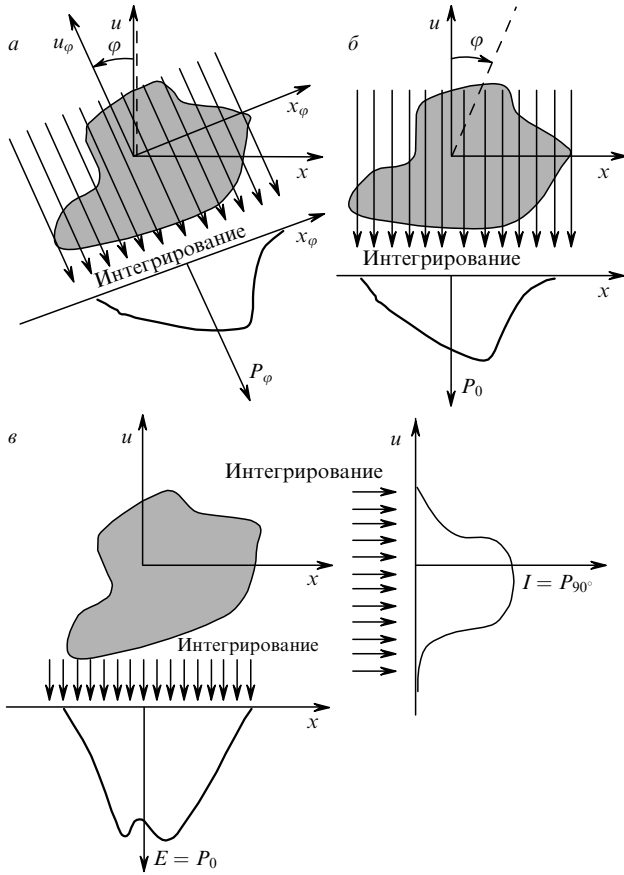


Рис. 1. Проекция с ракурсом φ функции Вигнера на произвольно ориентированную ось x_φ (а), проекция на координатную ось x функции Вигнера, повернутой на угол $-\varphi$ (б) и проекция функции Вигнера на координатные оси x и u (в). Проекция с ракурсом φ функции Вигнера на произвольно ориентированную ось x_φ (а) эквивалентна проекции на координатную ось x функции Вигнера, повернутой на угол $-\varphi$ (б).

Проекцию функции Вигнера (7) с произвольным ракурсом φ тоже можно записать в виде квадрата соответствующей амплитуды, т. е.

$$P_\varphi(x_\varphi) = \langle |U_\varphi(x_\varphi)|^2 \rangle = \langle |U_\varphi(x_\varphi)U_\varphi^*(x_\varphi)| \rangle, \quad (8)$$

где $U_\varphi(x_\varphi)$ – некая промежуточная амплитуда между исходной амплитудой $U(x)$ и ее преобразованием Фурье $\tilde{U}(u)$, поэтому $U_\varphi(x_\varphi)$ называют дробным преобразованием Фурье степени $m = \varphi/90^\circ$ [6]. Исходный сигнал $U(x)$ имеет степень $m = 0$, «перевернутый» сигнал $U(-x)$ – степень $m = 2$, а традиционное преобразование Фурье (1) этого сигнала – степень $m = 1$.

Найдем явный вид дробного преобразования Фурье степени m . Для этого выразим пространственные частоты u и u_φ в формуле (6а) через координаты x и x_φ :

$$u = \frac{x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x}{\tan \varphi},$$

$$u_\varphi = \left(\frac{x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x}{\tan \varphi} \right) \cos \varphi - x \sin \varphi = \frac{x_\varphi}{\tan \varphi} - \frac{x}{\sin \varphi}.$$

С использованием этих соотношений проведем замену переменных в выражении (7) и получим

$$P_\varphi(x_\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U\left(x + \frac{\zeta}{2}\right) U^*\left(x - \frac{\zeta}{2}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-i\zeta\left(\frac{x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x}{\tan \varphi}\right)\right] d\left(-\frac{x}{\sin \varphi}\right) d\zeta. \quad (9)$$

Используя переменные $x = (x_1 + x_2)/2$, $\zeta = x_2 - x_1$ и соотношение

$$\begin{aligned} dx d\zeta &= d\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) d(x_2 - x_1) \\ &= \det \begin{vmatrix} \partial x / \partial x_2 & \partial \zeta / \partial x_2 \\ \partial x / \partial x_1 & \partial \zeta / \partial x_1 \end{vmatrix} dx_2 dx_1 \\ &= \det \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} dx_2 dx_1 = -dx_2 dx_1, \end{aligned}$$

приведем (9) к выражению с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} P_\varphi(x_\varphi) &= \frac{1}{\sin \varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1) U^*(x_2) \\ &\times \exp\left[-i\left(\frac{x_2 x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x_1 x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \tan \varphi}\right)\right] dx_2 dx_1, \end{aligned}$$

что позволяет представить интересующую нас проекцию как произведение двух интегралов:

$$\begin{aligned} P_\varphi(x_\varphi) &= \frac{1}{\sin \varphi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_2) \exp\left[-i\left(\frac{x_2 x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x_2^2}{2 \tan \varphi}\right)\right] dx_2 \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} U^*(x_1) \exp\left[i\left(\frac{x_1 x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x_1^2}{2 \tan \varphi}\right)\right] dx_1. \end{aligned}$$

Из сравнения полученного соотношения с выражением (8) видно, что искомое дробное преобразование Фурье степени $m = \varphi/90^\circ$ имеет вид [6, 8, 9, 13]

$$\begin{aligned} U_\varphi(x_\varphi) &= \frac{1}{(\sin \varphi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} U^*(x_1) \exp\left[-i\left(\frac{x x_\varphi}{\sin \varphi} - \frac{x^2}{2 \tan \varphi}\right)\right] dx. \quad (10) \end{aligned}$$

4. Фазовая яркость и оптическая φ -система

Если на синусоидальную дифракционную решетку с периодом d по нормали падает плоская монохроматическая волна с длиной волны в вакууме λ , то дифрагировавшая волна отклоняется на угол θ (рис.2). При этом в оптически однородной среде с показателем преломления n проекция волнового вектора \mathbf{k} дифрагировавшей волны на плоскость дифракционной решетки, т. е. $k_\perp = kn \sin \theta$, равна пространственной частоте этой решетки $u = 2\pi/d$ [14]:

$$u = k_\perp = kp, \quad (11)$$

где $p = n \sin \theta$ – «импульс» (оптический орт); $k \equiv |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ – волновое число в вакууме. При выполнении условия $k > u$ «импульс» p дифрагировавшей волны пропорционален пространственной частоте u дифракционной решетки. Эта пропорциональность, характеризующая «двойной смысл пространственных частот» [14], позволяет легко переходить от представлений волновой

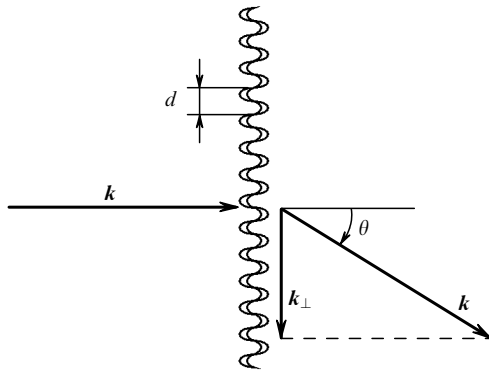


Рис.2. Схема, иллюстрирующая двойной смысл пространственных частот.

оптики к представлениям гамильтоновой оптики и радиометрии.

В одномерной гамильтоновой радиометрии поток (мощность) излучения Φ от источника распределен по координате x и по «импульсам» $p \in [-n, n]$. Распределение потока излучения Φ в фазовой плоскости xp в сечении z описывается фазовой яркостью [15]:

$$d^2\Phi = \mathcal{B}(x, p) dx dp. \quad (12)$$

В общем случае с учетом соотношения (11) фазовая яркость $\mathcal{B}(x, p)$ в (12) связана с функцией Вигнера $W(x, u)$ (3) преобразованием подобия:

$$\mathcal{B}(x, p) = kW(x, kp)\chi_n(p),$$

где

$$\chi_n(p) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } |p| \leq n, \\ 0 & \text{при } |p| > n. \end{cases}$$

Удобно так нормировать длину волны λ , чтобы $k = 1$, тогда фазовая яркость $\mathcal{B}(x, p)$ пропорциональна функции Вигнера $W(x, p)$:

$$\mathcal{B}(x, p) = W(x, p)\chi_n(p), \quad (13)$$

что позволяет при экспериментальных исследованиях вместо функции Вигнера использовать фазовую яркость.

Описывая преобразование пучка световых лучей в оптической системе методами матричной оптики, его фазовую яркость (12) удобно представить как функцию от матрицы-столбца:

$$\mathcal{B}\left\{\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right\} \equiv \mathcal{B}(x, p). \quad (14)$$

Основной математической моделью пучка лучей в геометрической оптике является гомоцентрический или параллельный пучок световых лучей, которые в фазовой плоскости имеют вид линии. Поскольку такие линии не имеют площади в фазовом пространстве, то с радиометрической точки зрения гомоцентрический или параллельный пучок световых лучей не может переносить энергию. В радиометрии для расчетов переноса энергии излучения удобной математической моделью простейшего, равномерно расходящегося (спектрально ограниченного) пучка световых лучей является фазовая яркость (14) вида [13, 16]

$$\mathcal{B}\left\{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ p - p_0 \end{pmatrix}\right\} = \text{rect}\left(\frac{x - x_0}{\sigma_x}\right) \text{rect}\left(\frac{p - p_0}{\sigma_p}\right), \quad (15)$$

где

$$\text{rect}x \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1/2, \\ 1/2 & \text{при } |x| = 1/2, \\ 0 & \text{при } |x| > 1/2 \end{cases}$$

– прямоугольная функция. При этом параметры σ_x и σ_p (среднеквадратичные отклонения) характеризуют ширину пучка и его расходимость соответственно. Такой равномерно расходящийся пучок световых лучей формируется, например, в плоскости симметрии перетяжки сфокусированного лазерного пучка. До этой плоскости пучок является сходящимся, а за ней – расходящимся.

Заметим, что эти пучки световых лучей при $\sigma_x \rightarrow 0$ плавно превращаются в гомоцентрические пучки, а равномерно расходящийся (сходящийся) пучок при $\sigma_p \rightarrow 0$ – в параллельный пучок.

Известно, что положение и ориентацию светового луча в меридиональной плоскости оптической системы можно характеризовать точкой в фазовой плоскости xp . Преобразование светового луча в оптической системе удобно описать матричными методами. В матричной оптике [16, 17] световой луч описывается матрицей-столбцом, а его преобразование в оптической системе – $ABCD$ -матрицей:

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}. \quad (16)$$

При этом $AD - BC = 1$. Здесь и ниже переменные со штрихами относятся к выходной опорной плоскости оптической системы (плоскости изображений), а переменные без штрихов – к входной опорной плоскости (плоскости объектов).

Любую оптическую $ABCD$ -систему можно представить как каскад линз (модуляторов – линейных систем, инвариантных в частотной области) и воздушных промежуточных (фильтров – линейных систем, инвариантных в частотной области) [16].

Преобразование фазовой яркости при прохождении модулятора – линзы с фокусным расстоянием f – в квадратичном приближении описывается выражением

$$\mathcal{B}_M\left\{\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{B}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{B}\left\{M\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix}\right\},$$

т. е. матрица

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix}$$

создает линейный сдвиг по пространственной частоте (рис.3,б). Преобразование фазовой яркости при прохождении фильтра – слоя оптически однородной среды с показателем преломления $n = 1$ и толщиной l – в квадратичном приближении описывается выражением

$$\mathcal{B}_F\left\{\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{B}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{B}\left\{F\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix}\right\},$$

т. е. матрица

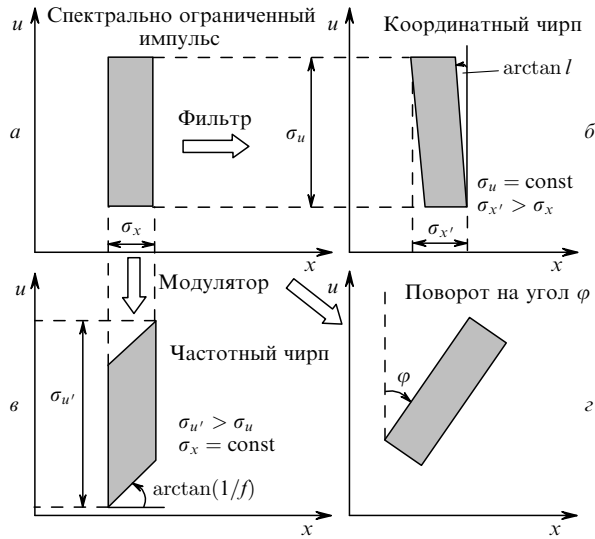


Рис.3. Прямоугольный сигнал (а), преобразование его квадратичным фильтром (б) и квадратичным модулятором (в), а также поворот сигнала на угол φ в фазовой плоскости (з).

$$F \equiv \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

создает линейный сдвиг по координате (рис.3,б).

В работе [6] предложено создать новый класс оптических систем, вращающих распределение фазовой яркости лазерного пучка при переносе его из входной опорной плоскости в выходную опорную плоскость на заданный угол φ (см. формулу (6б)) в фазовой плоскости (рис.3,з), что описывается выражением

$$\mathcal{B}'_{\varphi} \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{B} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\varphi} \\ p_{\varphi} \end{pmatrix} \right\}. \quad (17)$$

Например [6, 13], такую систему можно создать, используя каскад из слоя свободного пространства (фильтра) толщиной l , линзы (модулятора) с фокусным расстоянием f и еще одного слоя свободного пространства (фильтра) с той же толщиной (рис.4,а). Эта система может быть описана выражением

$$FMF = \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

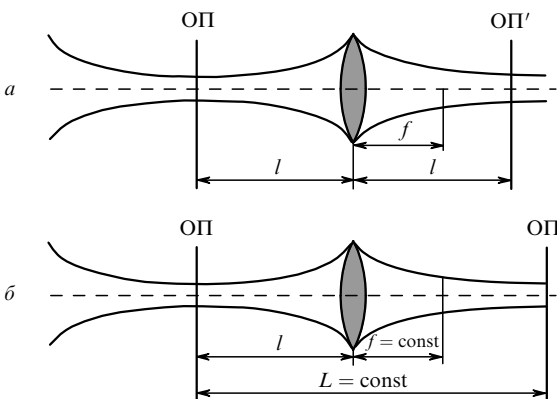


Рис.4. Оптические системы для вращения функции Вигнера в фазовой плоскости (а) и для выполнения дробного преобразования Фурье (б); ОП и ОП' – входная и выходная опорные плоскости соответственно.

$$= \begin{pmatrix} 1 - l/f & -l(2 - l/f) \\ 1/f & 1 - l/f \end{pmatrix},$$

или, в более симметричной форме, выражением

$$FMF = \begin{pmatrix} 1 - l/f & -f[1 - (1 - l/f)][1 + (1 - l/f)] \\ 1/f & 1 - l/f \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Действительно, если положить $1 - l/f = \cos \varphi$ и $1/f = \sin \varphi$, тогда выражение (18) упростится:

$$FMF = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -f(1 - \cos^2 \varphi) \\ 1/f & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

и превратится в искомую матрицу поворота (см. формулу(6б))

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Если $l = 2f$, то $ABCD$ -матрица оптической φ -системы (18) преобразуется в матрицу идеальной оптической системы с увеличением -1 :

$$FMF = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/f & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. изображение фазовой яркости повернется в фазовой плоскости на угол $\varphi = 180^\circ$. Если же входная плоскость оптической φ -системы находится в передней фокальной плоскости линзы ($l = f$), то $ABCD$ -матрица оптической φ -системы (18) превратится в матрицу фурье-конвертера:

$$FMF = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ 1/f & 0 \end{pmatrix},$$

поворачивающую фазовую яркость на угол $\varphi = 90^\circ$.

Поскольку светочувствительная площадка матричного фотоприемника не обладает угловой селективностью и интегрирует падающее на нее под разными углами θ излучение, то такой фотоприемник, светочувствительная площадка которого расположена в выходной опорной плоскости оптической φ -системы, непосредственно измеряет распределение освещенности $E'_\varphi(x')$ в этом сечении, связанное с повернутым на угол φ по часовой стрелке распределением фазовой яркости, простым соотношением

$$E'_\varphi(x') = \int_{-n}^n \mathcal{B}'_{\varphi} \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} \right\} dp'. \quad (19)$$

Поворот – относительное движение, и поэтому проекция исходной фазовой яркости (19) с ракурсом φ , отсчитываемым против часовой стрелки, равна распределению освещенности, измеренному матричным фотоприемником в выходной опорной плоскости оптической φ -системы, но в этом случае угол φ надо отсчитывать по часовой стрелке [13] (рис. 1,б):

$$E'_\varphi(x') = P_\varphi(x_\varphi).$$

Практической реализации данного способа измерения проекции фазовой яркости с ракурсом φ мешает необходимость изменять фокусное расстояние используе-

мой линзы, для чего простую линзу нужно заменить многолинзовым объективом с переменным фокусным расстоянием, а это усложняет конструкцию и увеличивает ее стоимость.

Отмечено, что одиночная проекция не позволяет однозначно восстановить объект, например контуры осевых проекций цилиндра и шара того же радиуса неразличимы. Эта неоднозначность дает возможность получить распределение освещенности в плоскости светочувствительной площадки фотоприемника, пропорциональное искомой проекции $P_\varphi(x_\varphi)$, с помощью обычной линзы с постоянным фокусным расстоянием [8–10]. Учитывая конструктивность полученного решения, рассмотрим два его доказательства: с позиций геометрической и волновой оптики.

4.1. Доказательство с позиций геометрической оптики

Предлагается построить идеальную оптическую систему, которая формирует распределение освещенности в выходной опорной плоскости, пропорциональное распределению освещенности во входной опорной плоскости, но с системой координат, повернутой на угол φ . Матрицу такой оптической системы можно получить, объединяя $ABCD$ -матрицу из (16) и матрицу поворота

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

системы координат:

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \varphi + B \sin \varphi & -A \sin \varphi + B \cos \varphi \\ C \cos \varphi + D \sin \varphi & -C \sin \varphi + D \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Чтобы распределения освещенностей во входной ($x_\varphi p_\varphi$) и выходной ($x' p'$) опорных плоскостях этой оптической системы были пропорциональны, правый верхний элемент матрицы должен быть равен нулю [15, 16]:

$$-A \sin \varphi + B \cos \varphi = 0.$$

Отсюда следует, что угол поворота φ связан с элементами $ABCD$ -матрицы оптической системы, фокусирующей лазерный луч, соотношением $\tan \varphi = B/A$. При этом матрица (18) примет вид матрицы идеальной оптической системы с увеличением $(A^2 + B^2)^{1/2}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^2 + B^2)^{1/2} & 0 \\ AC + BD & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(A^2 + B^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} x_\varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Важно, что при измерении необходимых для томографии двумерных проекций можно использовать оптическую схему (рис.4,б) с обычной линзой, а появление масштабного коэффициента $(A^2 + B^2)^{1/2}$ легко учесть при предварительной математической обработке данных, т.к. экспериментально измеряемое распределение освещенности $E'_\varphi(x')$ в выходной плоскости оптической системы связано с искомой проекцией функции Вигнера $P_\varphi(x_\varphi)$ соотношением подобия

$$P_\varphi(x_\varphi) = (A^2 + B^2)^{1/2} E'_\varphi(x_\varphi (A^2 + B^2)^{1/2}). \quad (22)$$

4.2. Доказательство с позиций волновой оптики

В работе [17, 18] показано, что $ABCD$ -матрица оптической системы однозначно определяет ее точечный эйконал – длину пути светового луча, связывающего точку x входной опорной плоскости этой системы и точку x' ее выходной опорной плоскости:

$$S(x, x') = S_0 - \frac{Ax^2 + Dx'^2 - 2xx'}{2B}, \quad (23)$$

где S_0 – оптическая длина пути вдоль оптической оси системы от входной опорной плоскости до выходной. Известно [19], что точечный эйконал определяет вид ядра интегрального преобразования, связывающего распределение амплитуды волнового поля во входной ($U(x)$) и выходной ($U'(x')$) опорных плоскостях оптической системы:

$$U'(x') = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x'} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \exp[ikS(x, x')] dx. \quad (24)$$

Объединив выражения (23) и (24), получим

$$U'(x') = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \exp \left[-ik \left(\frac{xx'}{B} - \frac{A}{2B} x^2 \right) \right] dx. \quad (25)$$

Заметим, что выражения (10) и (25) похожи. Они совпадают, если [8, 9]

$$k = 1, \quad \tan \varphi = \frac{B}{A}, \quad x' = \frac{B}{\sin \varphi} x_\varphi = (A^2 + B^2)^{1/2} x_\varphi. \quad (26)$$

5. Пример оптической системы

В работах [8, 9] описана простейшая оптическая система, позволяющая измерить распределение освещенности, пропорциональное искомой проекции функции Вигнера лазерного пучка. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием f , окруженной слоями оптически однородной среды толщиной l и $L - l$ (рис.4,б). Зная матричное описание элементов оптической системы, легко получить ее интегральное описание в виде $ABCD$ -матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & l - L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l - L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ -1/f & 1 - l/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{L-l}{f} & l - (L-l) + \frac{l(L-l)}{f} \\ -1/f & 1 - l/f \end{pmatrix}.$$

В этом случае выражение (25) упростится и преобразуется в выражение, полученное ранее методом фурье-оптики [8, 9]:

$$U'(x') = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \exp \left[-i \left(\frac{xx'}{B} - \frac{x^2}{2R} \right) \right] dx,$$

где

$$R \equiv \frac{B}{A} = \frac{l - (L - l) + l(L - l)/f}{1 + (L - l)/f} = \frac{2lf - Lf + l(L - l)}{f + L - l}$$

$$= \frac{lf - Lf + l(L - l + f)}{f + L - l} = l - \frac{f(L - l)}{f + L - l} = l - R_0$$

– радиус кривизны волнового фронта;

$$R_0 \equiv \frac{f(L - l)}{f + L - l}, \text{ т. е. } \frac{1}{R_0} \equiv \frac{1}{L - l} + \frac{1}{f}.$$

В новых обозначениях

$$B \equiv (l - R_0)A = (l - R_0) \left(\frac{F + L - l}{f} \right) = \left(\frac{l}{R_0} - 1 \right)$$

$$\times \left[\frac{f(L - l)}{f + L - l} \right] \left(\frac{f + L - l}{f} \right) = \left(\frac{l}{R_0} - 1 \right) (L - l).$$

6. Заключение

Пространственно-когерентные и энергетические свойства лазерного пучка в заданном сечении исчерпывающе характеризуются функцией Вигнера. Она описывает распределение мощности излучения в фазовой плоскости, поэтому ее невозможно непосредственно измерить, но можно вычислить с помощью компьютерной обработки семейства распределений освещенности, измеренных в различных сечениях сфокусированного оптической системой лазерного пучка. Для этого используется метод фазово-пространственной томографии, который имеет несколько альтернативных вариантов оптической реализации, но все они могут быть рассмотрены с точки зрения матричной оптики. В работе последовательно изложены

математические основы метода фазово-пространственной томографии лазерного пучка: дробно-линейное преобразование Фурье, свойства функция Вигнера и способ ее вращения в фазовой плоскости с помощью комбинации простейших линейных операторов, которым соответствуют линзы и промежутки оптически однородной среды, а также расчет проекций функции Вигнера по распределению освещенности.

1. Walther A. *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 1256 (1968).
2. *Международный стандарт ISO/FDIS 11146-1:2004(E)* (http://gosstandart.gov.by/eng/tech/pdf/stb_iso_11146-1_pr.pdf).
3. *Международный стандарт ISO/FDIS 11146-2:2005(E)* (http://gosstandart.gov.by/eng/tech/pdf/stb_iso_11146-2_pr.pdf).
4. *Международный стандарт ISO/FDIS 11146-3:2004(E)* (http://gosstandart.gov.by/eng/tech/pdf/stb_iso_11146-3_pr.pdf).
5. Холл Дж. *Матрицы и приборы с зарядовой связью*. В кн.: *Проектирование оптических систем* (М.: Мир, 1980, с. 363–421).
6. Lohmann A.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 2181 (1993).
7. Грузман И.С. *Соросовский образовательный журн.*, № 5, 117 (2001).
8. Raymer M.G., Beck M., McAlister D.F. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1137 (1994).
9. McAlister D.F., Beck M., Clarke L., Mayer A., Raymer M.G. *Opt. Lett.*, **20**, 1181 (1995).
10. Eppich B., Reng N. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2375**, 261 (1995).
11. Bastiaans M.J. *Opt. Commun.*, **25**, 26 (1978).
12. Bastiaans M.J. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1710 (1979).
13. Ozaktas H.M., Kutay M.A., Zeev Z. *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* (New York, Toronto: John Wiley & Sons, 2001, p. 513).
14. Зверев В.А. *Радиооптика* (М.: Сов. радио, 1975, с. 304).
15. Гитин А.В. *Оптический журн.*, № 2, 45 (1998).
16. Гитин А.В. *Квантовая электроника*, **36** (4), 376 (2006).
17. Джеррард А., Бёрч Дж.М. *Введение в матричную оптику* (М.: Мир, 1978, с. 343).
18. Collins S.A. *J. Opt. Soc. Am.*, **60**, 1168 (1970).
19. Гитин А.В. *Оптический журн.*, № 2, 40 (1997).