

# Особенности структуры основной моды лазеров с устойчивыми резонаторами при пространственно неоднородном усилении

М.В.Горбунков, П.В.Кострюков, **Л.С.Телегин**, В.Г.Тункин, Д.В.Яковлев

*Итерационным методом Фокса–Ли рассчитана структура основной моды лазера при неоднородном ненасыщенном усилении, создаваемом приосевой аксиально-симметричной продольной накачкой, для различных параметров резонатора  $g_1$  и  $g_2$  во всей области устойчивости. Показано, что при неоднородном усилении существенные отклонения основной моды от гауссовой моды пустого резонатора реализуются лишь в так называемых критических конфигурациях резонатора, когда величина  $[\arccos(g_1g_2)]^{1/2}/\pi$  равна нулю либо принимает ряд значений, выражающихся несократимыми дробями  $m/n$ . При числе Френеля  $N_F = 9$  выделяются конфигурации с  $m/n = 1/2, 2/5, 3/8, 1/3, 3/10, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/10$ . С увеличением  $N_F$  число критических конфигураций возрастает. Разложение по системе лазер-гауссовых пучков показало, что в критических конфигурациях основная мода образована набором сфазированных на активной среде пучков с определёнными значениями радиального индекса  $p$ .*

**Ключевые слова:** продольная накачка лазеров, устойчивые резонаторы, основная мода, синхронизация поперечных мод.

## 1. Введение

Использование продольной схемы накачки, например диодной накачки твердотельных лазеров, позволяет достигать высокой эффективности за счёт возможности формирования требуемого пространственного распределения инверсной населённости. Вопросу повышения эффективности твердотельных лазеров за счёт оптимального согласования пространственного распределения интенсивности продольной накачки и основной моды посвящён ряд работ [1–5], в которых предполагалось, что мода резонатора и при неоднородной накачке является гауссовой. Было теоретически показано, что эффективность увеличивается, а порог генерации уменьшается при увеличении параметра  $\xi = w/\rho$ , где  $w$  – радиус моды пустого резонатора,  $\rho$  – радиус области усиления. Эффективность использования неоднородной накачки ( $\xi > 1$ ) экспериментально подтверждена в [5, 6]. В более ранней работе [5] продольная накачка активной Nd:YAG-среды осуществлялась излучением криптонового лазера. Увеличение  $\xi$  от 0.3 до 5 приводило к монотонному уменьшению порога генерации. В [6] осуществлялась продольная диодная накачка Nd:YAG-лазера. При изменении  $\xi$  от  $\sim 2$  до  $\sim 2.5$  эффективность лазера возросла с 26 % до 40 %. Возникает вопрос: не сопровождается ли выигрыш в эффективности искажением пространственной структуры генерируемого излучения?

Безусловно, о высокой эффективности можно говорить только при учете насыщения усиления активной сре-

ды. Поэтому, строго говоря, вопрос об оптимизации эффективности нужно решать, рассматривая поле лазера с учётом насыщения. Тем не менее целесообразно рассчитать поле лазера с учётом профилированного усиления, но без насыщения. Насыщение практически отсутствует, например, в импульсно-периодических пикосекундных лазерах, работающих в режиме стабилизации излучения внешней отрицательной обратной связью (ООС) [7]. В этом случае благодаря действию ООС происходит формирование пикосекундных импульсов при довольно низкой их энергии (длинный пучок пикосекундных импульсов). При достаточной чувствительности цепи ООС насыщение можно пренебречь.

Заметные отличия пространственной структуры излучения лазера с неоднородной продольной диодной накачкой ( $\xi \approx 5$ ) от гауссовой моды пустого резонатора экспериментально наблюдались в [8]. Использовался кристалл  $YVO_4:Nd$ ; резонатор был образован плоским зеркалом на поверхности активной среды и выходным сферическим зеркалом с радиусом кривизны 80 мм. Длина резонатора  $d$  изменялась от 59 до 64 мм. Измерялось пространственное распределение излучения за сферическим зеркалом в дальней и ближней зонах. При приближении  $d$  к так называемому критическому значению ( $\sim 60$  мм), при котором наблюдалось падение выходной мощности и возникали существенные отличия профиля интенсивности генерируемого излучения от гауссовой моды пустого резонатора, пространственное распределение интенсивности в ближней зоне сужалось, в дальней зоне наблюдалась сложная кольцевая структура. В работе [8] отмечается, что в критической конфигурации для параметров резонатора  $g_1 = 1 - d/R_1$  и  $g_2 = 1 - d/R_2$  выполняется соотношение  $g_1g_2 = 0.25$ , соответствующее вырождению поперечных мод резонатора по частоте.

Более полное исследование структуры основной моды было предпринято в [9] для Nd:YVO<sub>4</sub>-чип-лазера с неоднородной продольной диодной накачкой. При изменении длины резонатора в дальней зоне наблюдались преимущественно близкие к гауссовым распределения

П.В.Кострюков, Л.С.Телегин, В.Г.Тункин, Д.В.Яковлев. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vgtunkin@mail.ru

М.В.Горбунков. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: gorbunk@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 31 мая 2006 г., после доработки – 29 августа 2006 г.

интенсивности излучения. Однако для некоторого дискретного набора длин резонатора распределение интенсивности излучения приобретало кольцевую структуру. Свои экспериментальные результаты авторы [9] дополнили расчётом модовой структуры, проведённым путём разложения поля по набору 60 лаггерр-гауссовых пучковых мод.

Прямым методом расчёта мод лазеров, в том числе содержащих элементы с произвольной фазовой и/или амплитудной передаточной функцией, является итерационный метод Фокса – Ли [10]. Искажения основной моды, возникающие при неоднородном усилении в результате насыщения активной среды [11] и при неоднородной накачке твердотельного лазера [12], рассчитывались итерационным методом ещё в 1965 г. Было показано [11], что при слабом насыщении мода остаётся гауссовой, а при достаточно большом насыщении амплитуда моды сохраняет гауссов профиль, но возникают сильные фазовые искажения. Примерно такой же результат был получен в [12]: неоднородность накачки мало сказывается на распределении амплитуды основной моды, однако фаза искажается заметным образом.

Расчёт методом Фокса – Ли мод резонаторов, элементы которых описываются неоднородными передаточными функциями, вновь привлёк к себе внимание в связи с развитием твердотельных лазеров с диодной накачкой. В [13] итерационный метод применялся для анализа искажений основной моды лазера за счёт несферичности фазовой передаточной функции абберационной тепловой линзы, возникающей в активной среде. Влияние неоднородного усиления ( $\xi \approx 5$ ) на основную моду лазеров с плоскосферическим резонатором (активная среда на плоском зеркале) исследовалось в [14]. Отмечено, что в случае полуконфокальной конфигурации резонатора ( $g_1 = 0.5$ ,  $g_2 = 1$ ) неоднородность накачки приводит к кольцевой структуре основной моды на выходном сферическом зеркале. Далее будем обозначать конфигурацию резонатора в виде  $(g_1, g_2)$ . В [15] для плоскосферического резонатора (0.25,1) проведен численный анализ искажений моды, возникающих при неоднородной накачке с учетом насыщения. Приводятся распределения поля на выходном торце активной среды, на который нанесено плоское зеркало. Рассчитанное распределение интенсивности состоит из узкого приосевого пика и широкого пьедестала. Интенсивность моды в пьедестале на два-три порядка меньше, чем на оси. Центральный максимум в  $\sim 3.5$  раза уже моды пустого резонатора. Показано, что для выбранного числа Френеля распределение поля (амплитуда и фаза) с хорошей точностью может быть описано линейной комбинацией сфазированных лаггерр-гауссовых мод с поперечными индексами  $p = 0, 3, 6, \dots, 18$  и  $l = 0$ , набор которых вырожден по частоте при  $g_1 g_2 = 0.25$ .

В [16] сделана попытка обобщающего рассмотрения пространственной структуры основной моды лазера с накачкой гауссовым пучком для целого семейства конфигураций резонатора. Качество основной моды характеризовалось двумя интегральными параметрами:  $M^2$  и  $K$ -фактором Петерманна [17]. Исследовались плоскосферические резонаторы, для которых выполняется условие вырождения мод по частоте:

$$\arccos(g_1 g_2)^{1/2} = \pi \frac{m}{n}, \quad (1)$$

где  $m/n$  – несократимая дробь. Рассмотрение ограничивалось случаями  $m/n = 1/x$ , где  $2.7 \leq x \leq 9$ . Рассчитывалась зависимость  $M^2$  от  $x$ . При  $x = 3, 5, 6$  и  $8$  наблюдалось увеличение  $M^2$  в несколько раз, а при  $x = 4$  – в  $\sim 20$  раз. Результаты расчета в широких диапазонах коэффициентов усиления (не менее 1.1) и параметров  $\xi$  (не более 10) показали, что в случае  $x = 4$  фаза основной моды на плоском зеркале принимает постоянное значение.

В цитируемых выше работах расчет пространственной структуры поля основной моды при неоднородном усилении проводился для отдельных плоскосферических резонаторов и фиксированных значений числа Френеля  $N_F$ . Сильные искажения пространственной структуры основной моды резонатора (0.25,1) при неоднородном усилении авторы [15] связывают с синхронизацией вырожденных по частоте мод пустого резонатора. Между тем вырожденных конфигураций существует столько же, сколько и несократимых дробей  $m/n$ . Возникает естественный вопрос: для каких конфигураций резонаторов пространственно неоднородное усиление приводит к драматическим искажениям основной моды? Кроме того, существует ли связь между значениями  $m$  и  $n$  и характером искажений амплитуды и фазы основной моды? И наконец, насколько эффективно влияет на степень и характер искажений основной моды изменение числа Френеля?

Поставленные вопросы приводят к необходимости детального анализа структуры основной моды в зависимости от параметров  $g_1$  и  $g_2$  во всей области устойчивости резонаторов и с учетом влияния числа Френеля. Данная работа посвящена изучению влияния неоднородного в поперечном сечении ненасыщенного усиления в тонкой активной среде на пространственную структуру основной моды лазеров во всей области устойчивости резонаторов. Расчёты основной моды проводились итерационным методом Фокса – Ли.

## 2. Модель. Результаты расчёта

Распространение в свободном пространстве аксиально-симметричного светового пучка, поле которого не зависит от азимутального угла, описывается формулой

$$u'(r') = \frac{i\pi}{\lambda d} \exp(-ikd) \times \int_0^a J_0\left(\frac{kr'r}{d}\right) \exp\left[-\frac{ik(r'^2 + r^2)}{2d}\right] u(r) r dr, \quad (2)$$

где  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка;  $u(r)$  и  $u'(r)$  – комплексные амплитуды поля до и после зеркала соответственно;  $r$  и  $r'$  – координаты во входной и выходной плоскостях;  $d$  – расстояние между плоскостями;  $a$  – радиус апертуры;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  – длина волны. Формула (2) получена в приближении  $a^2/(d\lambda) \ll (d/a)^2$  [10]. При отражении от зеркала осуществляется преобразование

$$u'(r) = u(r) \exp\left(-\frac{ikr^2}{R}\right), \quad (3)$$

где  $R$  – радиус кривизны зеркала.

Как и в других работах, посвященных расчётам параметров излучения лазера с продольной диодной накачкой [9, 13, 15], активная среда предполагалась тонкой. Преобразование комплексной амплитуды такой активной средой имеет вид

$$u'(r) = u(r)K(r), \tag{4}$$

где  $K(r)$  – коэффициент усиления амплитуды за один проход.

Важной характеристикой основной моды являются её дифракционные потери. Для их определения вычисляются коэффициенты усиления по мощности  $G_+$  и  $G_-$  при проходе пучка через активную среду в прямом и обратном направлениях соответственно:

$$G_{+,-} = \frac{\int_0^a |u'_{+,-}(r)|^2 r dr}{\int_0^a |u_{+,-}(r)|^2 r dr}, \tag{5}$$

где  $u_{+,-}(r)$  и  $u'_{+,-}(r)$  – комплексные амплитуды поля до и после активной среды, а знаки «+» и «-» соответствуют прямому и обратному ходам по резонатору. Полученные значения  $G_+$ ,  $G_-$  и полного коэффициента усиления по мощности за обход резонатора  $G$  позволяют считать дифракционные потери  $\gamma$ :

$$\gamma = 1 - \frac{G}{G_+ G_-}. \tag{6}$$

Формулы (2)–(4) позволяют построить цепочку преобразований комплексной амплитуды, отвечающую полному обходу резонатора, – одну итерацию. На одном из зеркал резонатора в качестве начального задаётся однородное распределение комплексной амплитуды. Итерации повторяются до тех пор, пока пространственное распределение поля не будет воспроизводиться с заданной точностью. Сформированное распределение поля и является основной модой [10, 18]. О достижении самовоспроизводящегося распределения можно судить, например, по снижению относительного изменения дифракционных потерь от итерации к итерации [19]. В нашем случае расчёт прекращался при снижении относительного изменения дифракционных потерь до  $\sim 10^{-10}$ .

Расчёт основной моды лазера проводился для устойчивых резонаторов с различными значениями параметров  $g_1$  и  $g_2$  (рис.1). Радиусы зеркал  $a$  были выбраны одинаковыми. Активная среда размещалась вплотную к зеркалу 32. Поле основной моды рассчитывалось в трёх плоскостях: после зеркала 31 ( $u_1^0(r)$ ), перед активной средой ( $u_2^0(r)$ ) и после неё ( $u_3^0(r)$ ). Коэффициент усиления активной среды задавался в виде

$$K(r) = 1 + (K_0 - 1) \exp\left(-\frac{r^2}{\rho^2}\right). \tag{7}$$

Отметим, что распределение усиления, близкое к (7), реализуется не только при использовании излучения отдельных диодов [9] или другого лазерного излучения [5], но и при транспортировке излучения диодных линеек с

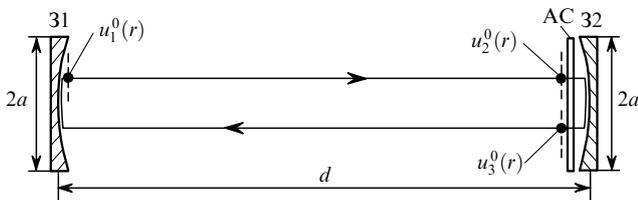


Рис.1. Схема резонатора лазера: 31, 32 – зеркала; AC – активная среда.

помощью световода [7]. Расчеты проводились также для передаточной функции, соответствующей гауссовой диафрагме, для которой  $K(r) = \exp(-r^2/\rho^2)$ . Параметр  $\xi = w_2/\rho$  (где  $w_2$  – радиус гауссовой моды пустого резонатора на зеркале 32) был выбран равным 3, что близко к значению, при котором в [6] экспериментально наблюдалась высокоэффективная генерация. При расчёте основной моды лазера с пространственно неоднородной амплитудной передаточной функцией коэффициент усиления по мощности на оси за один проход через активную среду  $K_0^2$  был взят равным 1.5<sup>2</sup>. Такое усиление достигалось, например, в пикосекундном Nd : YAG-лазере с диодной накачкой при мощности диодной линейки 35 Вт и диаметре пучка накачки в активной среде 0.8 мм [7].

В нашем случае целесообразно сравнивать основную моду резонатора с гауссовой модой пустого резонатора с помощью параметра

$$\beta_0 = 2\pi \int u_G^*(r) u_m(r) r dr, \tag{8}$$

где  $u_G(r)$  и  $u_m(r)$  – амплитуды полей гауссовой моды пустого резонатора и основной моды резонатора с неоднородным усилением, удовлетворяющие условиям нормировки:

$$2\pi \int |u_G(r)|^2 r dr = 2\pi \int |u_m(r)|^2 r dr = 1. \tag{9}$$

Величина  $|\beta_0|^2$  представляет собой долю мощности не-гауссовой основной моды, сосредоточенной в гауссовой моде пустого резонатора. Интеграл (8) рассчитывается в плоскости на входе в активную среду. Отметим, что выбранный параметр  $|\beta_0|^2$  отличается от предложенного в работе [20] параметра  $|\alpha_0|^2$ , представляющего собой долю энергии, которая содержится в гауссовом пучке, аппроксимирующем исходный пучок с минимальным среднеквадратичным отклонением.

«Негауссовость» основной моды при неоднородном усилении для различных конфигураций резонатора иллюстрирует рис.2. На координатной плоскости для положительных  $g_1$  и  $g_2$  в области устойчивости ( $0 < g_1 g_2 < 1$ ) приведены значения  $|\beta_0|^2$  при  $N_F = 9$ ,  $K_0 = 1.5$  и  $\xi = 3$ . Конфигурации резонатора, для которых значения  $|\beta_0|^2$  заметно меньше единицы, что свидетельствует о явных отличиях основной моды от гауссовой моды пустого ре-

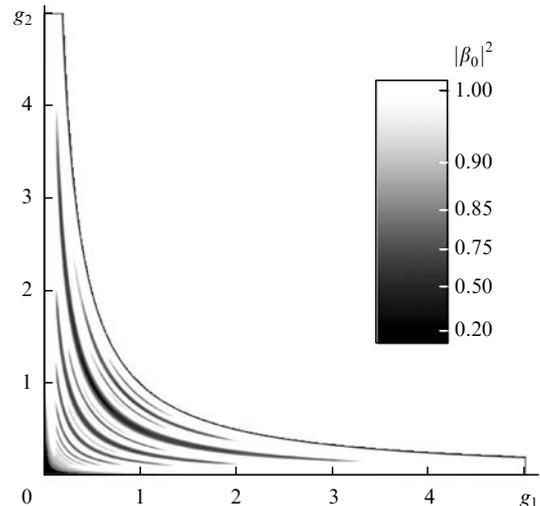


Рис.2. Зависимости  $|\beta_0|^2$  от  $g_1$  и  $g_2$  при  $N_F = 9$ ,  $K_0 = 1.5$  и  $\xi = 3$ .

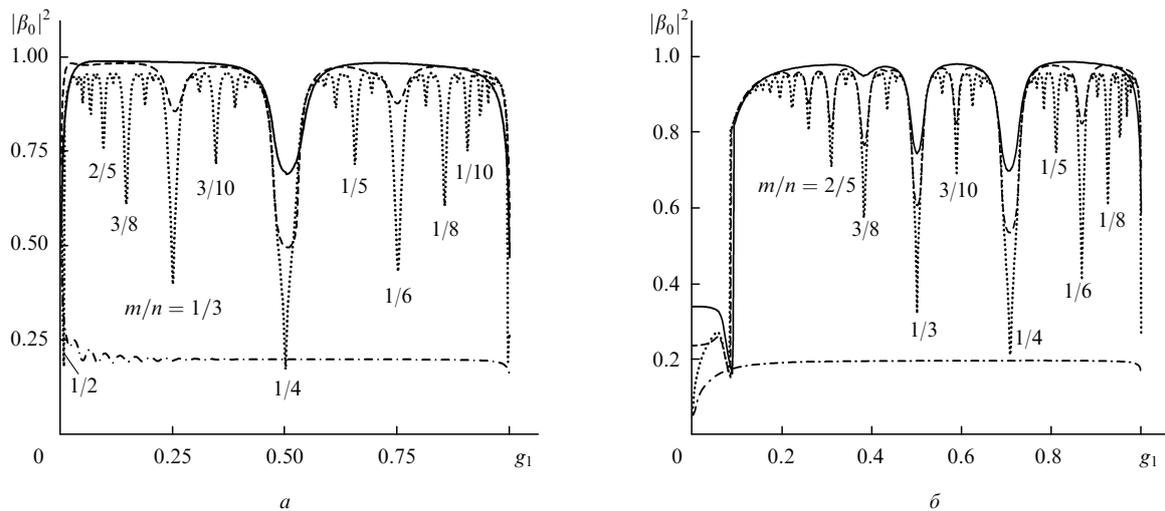


Рис.3. Зависимости  $|\beta_0|^2$  от  $g_1$  для плоскосферических ( $g_2 = 1$ ; а) и симметричных ( $g_1 = g_2$ ; б) резонаторов при  $K_0 = 1.5$ ,  $\xi = 3$ ,  $N_F = 3$  (сплошные кривые), 5 (штриховые кривые), 30 (пунктирные кривые) и в случае гауссовой диафрагмы (штрих-пунктирная кривая). Приведены дроби  $m/n = [\arccos(g_1 g_2)^{1/2}]/\pi$  (см. разд.4).

зонатора, будем называть критическими. Из рис.2 видно, что ярко выраженным критическим конфигурациям соответствуют области вблизи координатных осей  $g_1$ ,  $g_2$  и на ряде кривых, представляющие собой участки гипербол. Существенное уменьшение  $|\beta_0|^2$  имеет место для гипербол  $g_1 g_2 = 0.096, 0.146, 0.25, 0.346, 0.5, 0.655, 0.75, 0.854, 0.905$  и 1.

Результаты расчетов показали, что  $|\beta_0|^2$  не изменяется при одновременном изменении знаков  $g_1$  и  $g_2$ . Это находится в соответствии с результатами теоретических работ [21, 22], в которых вопрос об эквивалентности резонаторов с внутренним элементом, описываемым вещественной негауссовой функцией передачи, рассматривался на примере жёсткой диафрагмы [21] и в общем случае [22]. Показано, что при одновременном изменении знаков параметров  $g_1$  и  $g_2$  распределения амплитуды моды на зеркалах меняются на комплексно сопряженные. При комплексном сопряжении значение  $|\beta_0|^2$  сохраняется, поэтому зависимость  $|\beta_0|^2$  от  $(g_1, g_2)$  симметрична относительно точки (0,0).

Зависимости  $|\beta_0|^2$  от конфигурации плоскосферических ( $g_2 = 1$ ) резонаторов при  $K_0 = 1.5$ ,  $\xi = 3$  и  $N_F = 3, 5, 30$  показаны на рис.3,а. При  $N_F = 3$  наиболее выражены три критические конфигурации с  $g_1 g_2 = 0, 0.5$  и 1. При  $N_F = 5$  число критических конфигураций увеличивается до 5 за счет добавления конфигураций с  $g_1 g_2 = 0.25$  и 0.75. С увеличением  $N_F$  до 30 число критических конфигураций возрастает приблизительно на порядок. Аналогичные зависимости  $|\beta_0|^2$  от  $g_1$  для симметричных ( $g_1 = g_2$ ) резонаторов показаны на рис.3,б. Здесь ярко проявляется особенность вблизи конфокальной конфигурации. При увеличении  $N_F$  также наблюдается рост числа критических конфигураций. Результаты расчётов для гауссовой диафрагмы показали отсутствие пиковой структуры в зависимости  $|\beta_0|^2$  от  $g_1$  (рис.3, штрих-пунктирная кривая).

Рассмотрим распределения амплитуд и фаз полей  $u_1^0(r)$ ,  $u_2^0(r)$  и  $u_3^0(r)$  основной моды ряда резонаторов с характерными критическими конфигурациями. На рис.4 показана структура основной моды конфокального и плоскосферических резонаторов различных критических конфигураций при  $N_F = 30$ ,  $K_0 = 1.5$ ,  $\xi = 3$ . Приведены также распределения фазы основной моды на поверхности зеркал, т. е. фактически показаны отличия распределения

фазы от параболического, соответствующего моде пустого резонатора. Для резонаторов конфигураций (0,0) и (0.5,1) штриховыми кривыми показаны распределения амплитуды гауссовой моды пустого резонатора. Такое расположение рисунков, показывающих структуру моды, будет использоваться и в дальнейшем.

Распределения амплитуды основной моды существенно отличаются от распределений амплитуды гауссовой моды пустого резонатора. Для критических конфигураций распределения  $|u_1^0(r)|$  состоят из приосевого пика и достаточно широкого пьедестала. Особенно ярко пик выражен в конфигурациях (0,0), (0.5,1), (0.75,1) и (0.25,1). По характеру распределения амплитуды основной моды на зеркале 32  $|u_1^0(r)|$  резонаторы можно разделить на две группы. Конфигурации, для которых  $g_1 = g_2 = 0, g_1 g_2 = 0.5$  и 0.75 (рис.4,а-б), относятся к первой группе. Для конфигураций первой группы характерны существенные различия распределений  $|u_1^0(r)|$  и  $|u_3^0(r)|$ . Ширина распределения амплитуды основной моды конфокального резонатора на зеркале 31 заметно превышает ширину гауссовой моды пустого резонатора. В распределении  $|u_1^0(r)|$  отсутствует приосевой пик. Слабовыраженная кольцевая структура пьедестала в распределениях  $|u_2^0(r)|$  и  $|u_3^0(r)|$  сопровождается резкими скачками фазы на  $\pm\pi$  (рис.4,а, столбец IV). В отличие от конфокальной конфигурации, для остальных резонаторов первой группы распределения амплитуды на зеркале 31 имеют кольцевую структуру, наиболее выраженную для  $g_1 g_2 = 0.5$  (рис.4,б, I).

Амплитуда основной моды резонаторов второй группы (рис.4,в,д) имеет сходные распределения на обоих зеркалах в координатах, нормированных на соответствующие радиусы гауссовой моды пустого резонатора. Что касается распределения фазы, то в качестве особого случая можно отметить динамически стабильный резонатор ( $g_1 g_2 = 0.5$ ), для которого на плоском зеркале реализуется постоянное распределение фазы (рис.4,б, IV), что находится в соответствии с расчётами, проведёнными в работе [16]. Постоянное распределение фазы реализуется также на зеркале 31 в случае конфокального резонатора (рис.4,а, II). Для резонаторов других конфигураций фаза на зеркале не является постоянной и сложным образом зависит от расстояния до оси резонатора.

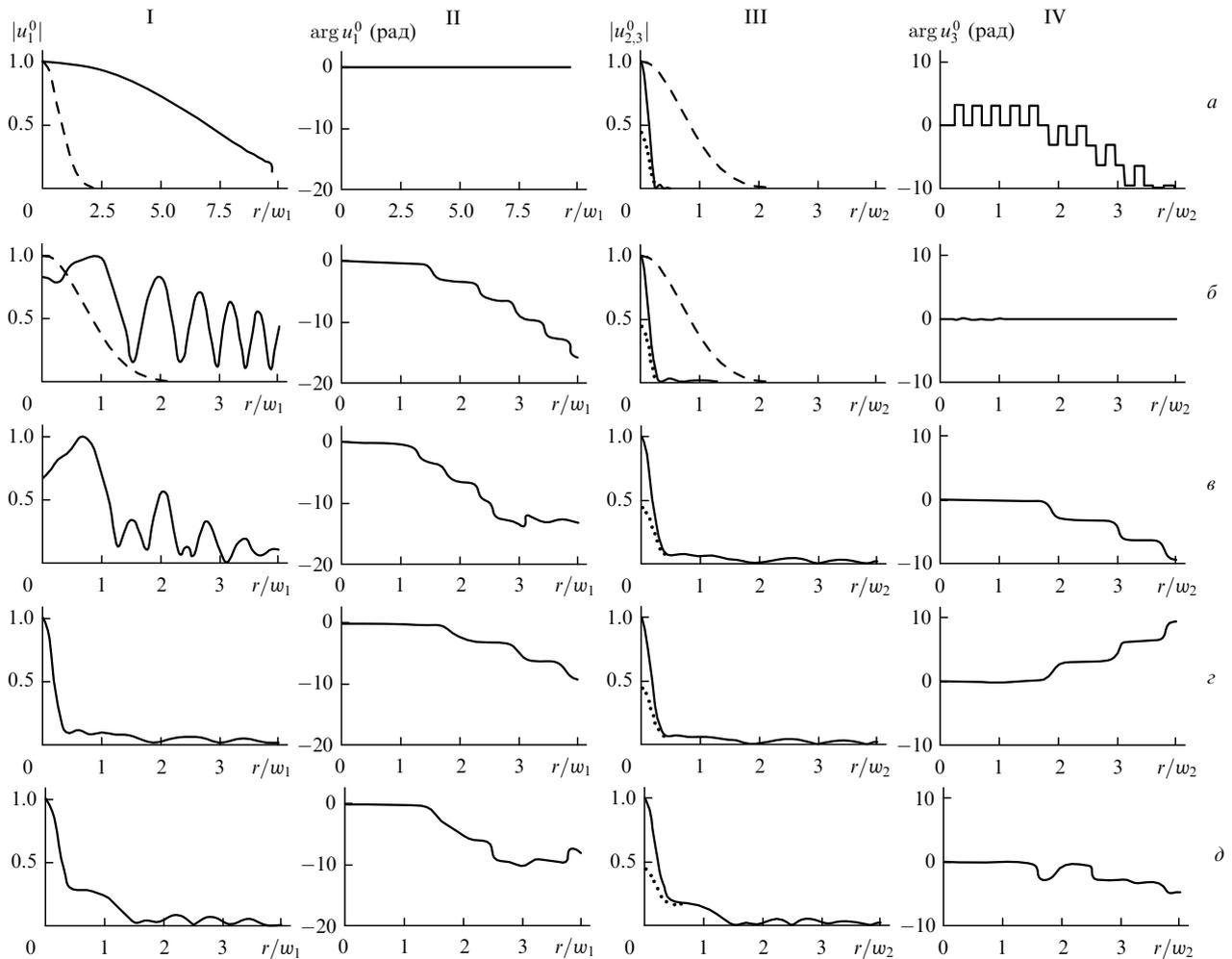


Рис.4. Распределения амплитуды основной моды и фазы на поверхностях зеркал конфокального резонатора конфигурации (0,0) (а) и плоскосферических резонаторов критических конфигураций (0.5,1) (б), (0.75,1) (в), (0.25,1) (г) и (0.6545,1) (д); столбец I –  $|u_1^0(r)|$ , II –  $\arg u_1^0(r)$ , III –  $|u_{2,3}^0(r)|$  (пунктирная кривая),  $|u_3^0(r)|$  (сплошная кривая), IV –  $\arg u_3^0(r)$ . Штриховые кривые – амплитуды гауссовой моды пустого резонатора;  $w_{1,2}$  – радиусы гауссовой моды на зеркалах 31 и 32 соответственно;  $N_F = 30$ ,  $K_0 = 1.5$  и  $\xi = 3$ .

### 3. Обсуждение

Существенные отличия структуры основной моды от гауссовой обусловлены особенностью передаточной функции активной среды при неоднородном усилении (7). Значительную роль играет конечное значение передаточной функции в приосевой области, получаемое при выходе функции на постоянный ненулевой уровень при удалении от оси. Отметим, что при использовании гауссовой диафрагмы основная мода имеет гауссову структуру в каждом сечении резонатора, но комплексный параметр отличается от значения, соответствующего моде пустого резонатора (без диафрагмы). Неоднородное усиление приводит к иному характеру основной моды. Результаты проведённых расчетов показывают, что при неоднородном усилении существенные отличия структуры основной моды от гауссовой моды пустого резонатора имеют место только в случае определенных (критических) конфигураций резонатора. В критических конфигурациях, как показывают расчёты, структура основной моды качественно не меняется в весьма широком диапазоне изменения  $K_0$  (от 1.01 до 2.5).

Примерами наиболее ярко выраженных критических конфигураций устойчивых резонаторов являются конфигурации с  $g_1 g_2 = 0.5, 0.25$  и  $0.75$ . Распределения амплитуд

$u_{2,3}^0(r)$  для указанных конфигураций имеют вид приосевого узкого пика с заметной амплитудой на фоне относительно широкого пьедестала. Характерная ширина пика существенно меньше ширины гауссовой моды пустого резонатора. Ясно, что набор лаггерр-гауссовых пучковых мод, образующих основную моду, содержит, в том числе, пучки высоких порядков. Другой особенностью критических конфигураций является воспроизведение распределения амплитуды моды: сохранение пика и особенностей пьедестала при проходе излучения по участку резонатора, не содержащему активной среды, т. е. от активной среды до зеркала 31 и обратно (рис.4). Из этого с необходимостью следует, что разности фазовых набегов лаггерр-гауссовых пучков, образующих основную моду, кратны  $2\pi$ .

Если выбрать такое значение комплексного параметра набора лаггерр-гауссовых пучков, которое реализуется на зеркале 32 в отсутствие усиления, то выражение для фазового набегу  $\psi_{pl}$  пучка с радиальным и угловым индексами  $p$  и  $l$  в случае устойчивых резонаторов ( $0 < g_1 g_2 < 1$ ) при проходе по участку резонатора, не содержащему активной среды, имеет вид (см., напр., [23])

$$\psi_{pl} = 2kd - 2(2p + l + 1) \arccos [\pm (g_1 g_2)^{1/2}]. \quad (10)$$

Знак перед радикалом выбирается совпадающим со знаком  $g_1(g_2)$ . Сформировать набор лаггерр-гауссовых пучков, для произвольной суперпозиции которых будет выполняться условие самовоспроизведения (разности фазовых набегов  $\psi_{pl} - \psi_{p'l'}$  кратны  $2\pi$ ), можно только в том случае, если  $\arccos(g_1g_2)^{1/2} = \pi m/n$ . При этом выражение для фазовых набегов лаггерр-гауссовых пучков имеет вид

$$\psi_{pl} = 2\pi \left[ \frac{kd}{\pi} - (2p + l + 1) \frac{m}{n} \right]. \quad (11)$$

В нашем случае рассматриваются поля, не зависящие от азимутального угла, поэтому далее положим угловой индекс  $l$  равным нулю. Разности фазовых набегов будут кратны  $2\pi$  для пучков, индексы  $p$  которых различаются на  $\Delta p = n$  при нечетных  $n$  или на  $\Delta p = n/2$  при четных  $n$ . Произвольная комбинация пучков такого набора в отсутствие потерь полностью воспроизводит себя после прохода по участку резонатора, не содержащему активной среды. Для выяснения вопроса о том, какой набор лаггерр-гауссовых пучков образует основную моду лазера при неоднородном усилении, проводилось разложение основной моды по лаггерр-гауссовым функциям:

$$u_3^0(r) = \sum_p \beta_p u_p^{\text{LG}}(r), \quad (12)$$

где

$$\beta_p = 2\pi \int u^*(r) u_p^{\text{LG}}(r) dr.$$

Значения  $|\beta_p|^2$  представляют собой долю энергии, сосредоточенную в лаггерр-гауссовом пучке с индексом  $p$ .

Наиболее выраженным критическим конфигурациям с  $g_1 = g_2 = 0$ ,  $g_1g_2 = 0.096, 0.146, 0.25, 0.346, 0.5, 0.655, 0.75, 0.854$  и  $0.905$  соответствуют дроби  $m/n$ , равные  $1/2, 2/5, 3/8, 1/3, 3/10, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8$  и  $1/10$ . Для данных конфигураций значения  $m/n$  представлены на рис.3.а. На

рис.5,а–д приведены значения  $|\beta_p|^2$  и  $\arg \beta_p$  для различных критических конфигураций при  $N_F = 30$ ,  $K_0 = 1.5$ ,  $\xi = 3$ . Разложение (12) проведено для поля  $u_2^0(r)$ . В случае конфокального резонатора ( $m/n = 1/2$ ) в разложении присутствуют все пучки (рис.5,а). Для резонатора с  $m/n = 1/4$  в разложении (12) существенными являются члены, соответствующие пучкам с четными индексами  $p$  (рис.5,б). Основная мода резонатора с  $m/n = 1/3$  преимущественно образована пучками с  $p = 3j$ , где  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  (рис.5,в). Для резонаторов с  $m/n = 3/8$  и  $2/5$  основная мода состоит главным образом из пучков с индексами  $p = 4j$  и  $5j$  соответственно (рис.5,з,д). Для всех рассмотренных резонаторов набор пучков, которые вносят значительный вклад в основную моду, сфазирован на зеркале 32, т.е. можно говорить о синхронизации фаз пучковых мод.

Разложение (12) однозначно показывает, что основная мода в критической конфигурации преимущественно образована набором сфазированных лаггерр-гауссовых пучков, радиальные индексы которых различаются на  $\Delta p = n$  в случае нечетных  $n$  или на  $\Delta p = n/2$  при четных  $n$ , в дальнейшем называемым основным набором. В случае четных  $n$  для двух соседних пучков основного набора разность фазовых набегов при проходе от одного зеркала до другого, как следует из формулы (11), равна  $m\pi$ . Если  $n$  четное, то  $m$  должно быть нечетным, и если на зеркале 32 основная мода представляет собой суперпозицию пучков  $\sum_i \beta_{in/2} u_{in/2}^{\text{LG}}(r)$ , то в пренебрежении эффектами на краях зеркала 31 мода будет иметь вид  $\sum_i (-1)^i \beta_{in/2} \times u_{in/2}^{\text{LG}}(r)$ . В результате распределения амплитуды на противоположных зеркалах должны заметно различаться.

Ярким примером резонаторов с четным  $n$  является конфокальный резонатор ( $m/n = 1/2$ ). Действительно, как показывает разложение (12), для полей  $u_1^0(r)$  и  $u_{2,3}^0(r)$  фазы пучков с четными и нечетными  $p$  на зеркале 31 различаются на  $\pi$ , в то время как на зеркале 32 все пучки сфазированы. Это приводит к существенному различию в характере распределений амплитуды на противоположных зеркалах: на зеркале 32 лаггерр-гауссовы пучки складываются синфазно, что обуславливает формирова-

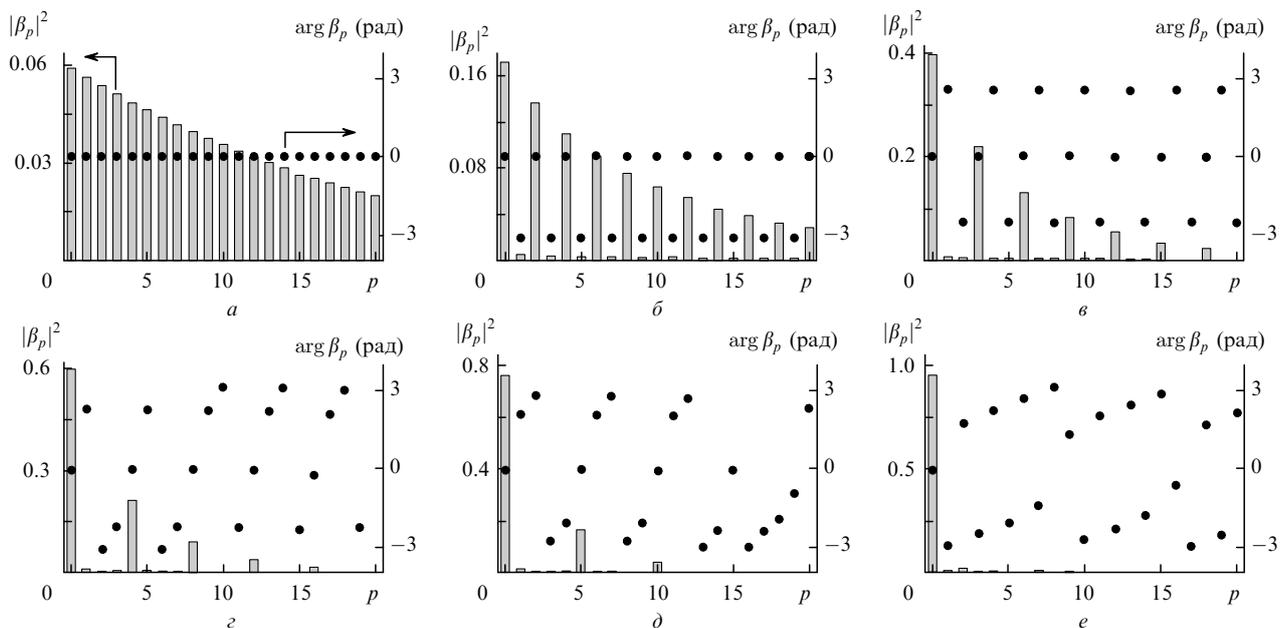


Рис.5. Коэффициенты разложения поля  $u_2^0(r)$  по лаггерр-гауссовым функциям для резонаторов критических конфигураций (0,0) (а), (0.5,1) (б), (0.25,1) (в), (0.1464,1) (з), (0.096,1) (д) и резонатора некритической конфигурации (0.596,1) (е) при  $m/n = 1/2$  (а),  $1/4$  (б),  $1/3$  (в),  $3/8$  (з) и  $2/5$  (д),  $N_F = 30$ ,  $K_0 = 1.5$ ,  $\xi = 3$ . Вертикальные столбцы –  $|\beta_p|^2$ , точки –  $\arg \beta_p$ .

ние узкого приосевого пичка (рис.4,а, III). На зеркале 31 нечетные пучки суммируются с четными в противофазе, при этом ширина суммарного распределения амплитуды заметно превышает ширину нулевого лаггерр-гауссова пучка (рис.4,а, I). Заметные различия распределений амплитуды на противоположных зеркалах наблюдаются также для резонаторов с  $g_1g_2 = 0.5$  ( $m/n = 1/4$ ) и  $0.75$  ( $m/n = 1/6$ ), моды которых представлены на рис.4,б и в соответственно. Распределения амплитуд  $u_{2,3}^0(r)$  имеют характерный узкий приосевой пичок на фоне широкого пьедестала, а распределения амплитуды  $u_1^0(r)$  на зеркале 31 – кольцевую структуру без выраженного приосевого пичка.

При нечетных  $n$  разность фазовых набегов лаггерр-гауссовых пучков основного набора при проходе от одного зеркала до другого составляет  $2m\pi$ , поэтому распределения амплитуды моды на противоположных зеркалах должны иметь сходную структуру. Действительно, основные моды в случае резонаторов с  $g_1g_2 = 0.25$  ( $m/n = 1/3$ ) и  $0.6545$  ( $m/n = 1/5$ ), показанные соответственно на рис.4,г и д, имеют на противоположных зеркалах близкие распределения.

Кроме пучков основного набора, в разложении (12) (см. рис.5) в виде некоторого слабого фона присутствуют и другие пучки. Расчет показывает, что в случае  $g_1g_2 = 0.5$  ( $m/n = 1/4$ ) при уменьшении  $K_0$  от 1.5 до 1.05 относительная интенсивность фоновых пучков с нечетными  $p$  снижается с  $\sim 10^{-2}$  до  $\sim 10^{-4}$ . При резонансе для основного набора значений  $k = 2\pi/\lambda$  фазовые набег фоновых пучков при полном обходе пустого резонатора не кратны  $2\pi$ . Причина существования фоновых пучков в резонаторе – перераспределение энергии в наборе лаггерр-гауссовых пучков при их прохождении через активную

среду. Обмен энергией в активной среде, во-первых, вместе с дифракционными эффектами на краях зеркал влияет на формирование стационарного распределения энергии по пучкам, т. е. определяет значения  $\beta_p$ , а во-вторых, обеспечивает кратность  $2\pi$  фазовых набегов фоновых пучков при полном обходе резонатора. Необходимое изменение фазы происходит за счет добавки к полю каждого из фоновых пучков полей из сфазированного основного набора. Например, при  $m/n = 1/4$  на выходе из активной среды все пучки имеют одинаковые фазы, в то время как на входе в неё фазы пучков основного набора (с четными  $p$ ) и фоновых пучков (нечетные  $p$ ) отличаются на  $\pi$ .

Помимо отмеченных особенностей резонаторов с критическими конфигурациями следует отметить постоянство фазы основной моды для резонаторов с  $g_1g_2 = 0.5$  ( $m/n = 1/4$ ) на зеркале 32 (рис.4,б, IV) и для конфокального резонатора ( $m/n = 1/2$ ) на зеркале 31 (рис.4,а, II). В первом случае на зеркале 32 основная мода преимущественно состоит из сфазированных лаггерр-гауссовых пучков с четными индексами  $p$ . Мода конфокального резонатора на зеркале 31 образована лаггерр-гауссовыми пучками с различающимися на  $\pi$  фазами для четных и нечетных  $p$ . Постоянные распределения фазы для конфокального и полуконфокульного резонаторов связаны со свойством набора лаггерр-гауссовых функций: в сумме лаггерр-гауссовых пучков с четными  $p$  скачки фазы отсутствуют даже при относительно медленном уменьшении  $|\beta_p|^2$  с увеличением  $p$ . Аналогично скачки фазы не наблюдаются и для разности сумм пучков с четными и нечетными  $p$ .

Обсуждаемые свойства критических конфигураций определяются только произведением  $g_1g_2$ . Следовательно,

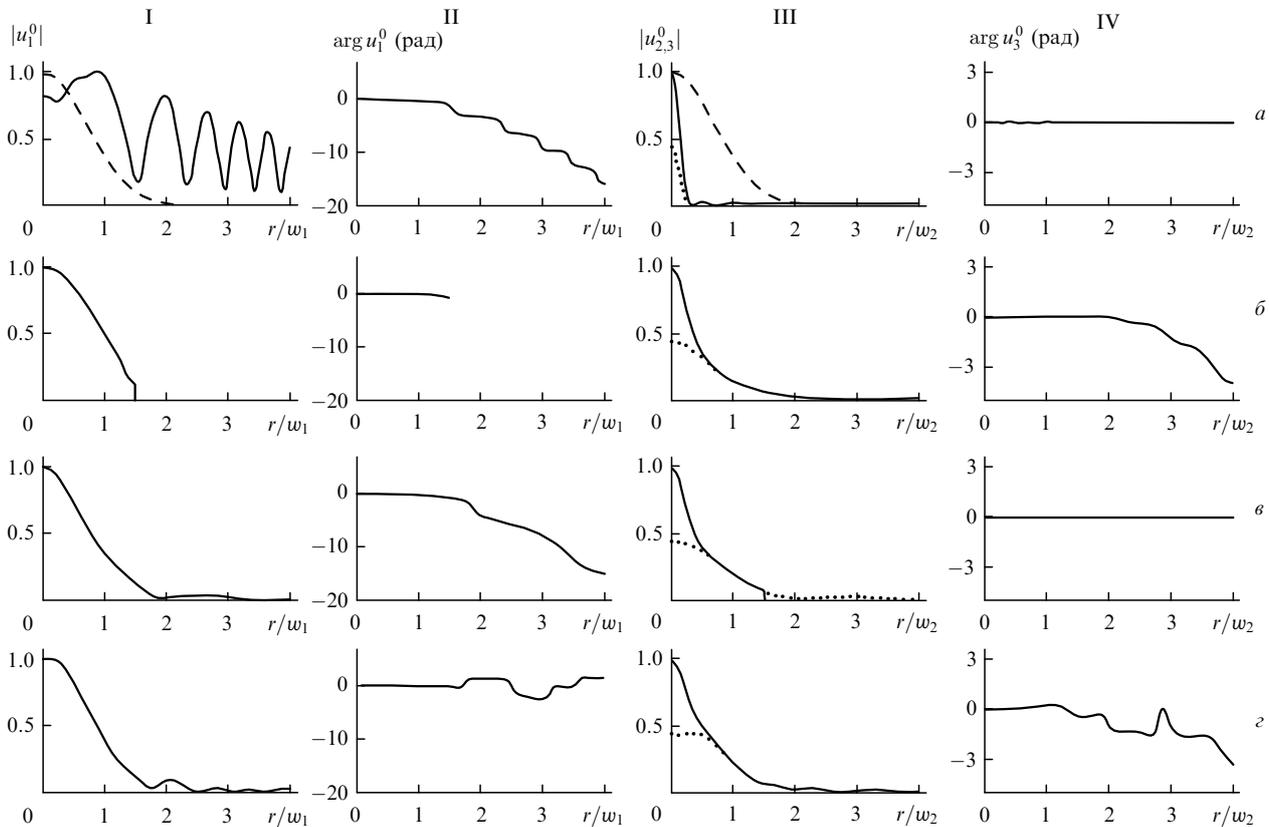


Рис.6. Распределения амплитуды основной моды и фазы на поверхностях зеркал полуконфокального резонатора конфигурации (0.5,1) (а), полуконфокального резонатора с диафрагмой на зеркалах 31 (радиус диафрагмы  $R_d = 1.5w_1$ ) (б) и 32 ( $R_d = 1.5w_2$ ) (в), а также резонатора не критической конфигурации (0.596,1) (г) при  $N_F = 30$ ,  $K_0 = 1.5$ ,  $\xi = 3$ . Схема расположения рисунков и обозначения те же, что и на рис.4.

при движении по гиперболе  $g_1 g_2 = \text{const}$  в сторону увеличения одного из параметров  $g$  (и, соответственно, уменьшения другого) структура распределений амплитуды моды на зеркалах в координатах, нормированных на соответствующие радиусы гауссовой моды пустого резонатора, качественно сохраняется. В случае достаточного удаления от симметричной конфигурации ( $g_1 = g_2$ ) дифракционные эффекты на зеркале с меньшим значением одного из параметров  $g$  не позволяют создать синхронизованный набор лаггер-гауссовых пучков. Это проявляется в увеличении  $|\beta_0|^2$  на гиперболах  $g_1 g_2 = \text{const}$ , соответствующих критическим конфигурациям при удалении от симметричной конфигурации (см. рис.2).

С увеличением  $N_F$  число лаггер-гауссовых пучков, для которых апертурные эффекты незначительны, возрастает. Таким образом, в случае больших  $N_F$  при неоднородном усилении могут проявляться основные наборы с большими значениями  $\Delta p$ . Это отражается в появлении критических конфигураций, которым соответствуют дроби  $m/n$  со все большими значениями  $n$ .

Естественным методом приближения структуры основной моды к гауссовой является переход от критической конфигурации к некритической. Расчёт показывает, что при умеренном усилении за полный обход резонатора ( $K_0 \leq 1.5$ ) для некритических конфигураций отклонение  $|\beta_0|^2$  от единицы не превышает 10%. Увеличению  $|\beta_0|^2$  также способствует уменьшение числа Френеля; при фиксированной длине резонатора это возможно, в частности, за счет установки диафрагмы на одном из зеркал.

На рис.6,а представлена структура основной моды полуконфокального резонатора конфигурации (0.5,1), для которого  $|\beta_0|^2$  существенно отличается от единицы ( $|\beta_0|^2 = 0.17$ ). На рис.6,б показана мода того же резонатора с диафрагмой, установленной на зеркале 31. Радиус диафрагмы  $R_d$  в 1.5 раза превышает радиус гауссовой моды пустого резонатора ( $R_d/w_1 = 1.5$ ). Распределения амплитуды моды на зеркале 31 ( $|u_1^0(r)|$ ) и на входе в активную среду ( $|u_2^0(r)|$ ) близки к гауссовым распределениям амплитуды моды пустого резонатора. Использование диафрагмы приводит к увеличению  $|\beta_0|^2$  до 0.97. При установке диафрагмы, для которой  $R_d/w_2 = 1.5$ , на зеркале 32 (рис.6,в) величина  $|\beta_0|^2$  возрастает до 0.95. Дифракционные потери основной моды при диафрагме, установленной на зеркалах 31 и 32, составляют 5.3% и 4.1% соответственно. Основная мода резонатора некритической конфигурации (0.596,1), ближайшей к (0.5,1), показана на рис.6,г. Параметр  $|\beta_0|^2$  в данном случае принимает значение 0.95, а дифракционные потери равны  $3.1 \times 10^{-4}$ %. Значения  $|\beta_p|^2$  и  $\arg \beta_p$ , полученные на основе разложения (12) для резонатора конфигурации (0.596,1), приведены на рис.5,е.

## 4. Заключение

Таким образом, путем численного моделирования исследованы особенности структуры основной моды лазеров с устойчивыми резонаторами при пространственно неоднородном усилении. Итерационным методом Фокса–Ли рассчитана структура поля основной моды лазера при неоднородном ненасыщенном усилении, создаваемом приосевой аксиально-симметричной продольной накачкой, для различных параметров резонатора  $g_1$  и  $g_2$  во

всей области устойчивости. Расчёты проводились для активной среды, расположенной вблизи одного из зеркал. Показано, что при неоднородном усилении существенные отклонения основной моды от гауссовой моды пустого резонатора имеют место лишь в так называемых критических конфигурациях резонатора, когда величина  $[\arccos(g_1 g_2)^{1/2}]/\pi$  равна нулю либо принимает ряд значений, выражающихся несократимыми дробями  $m/n$ . Для значений  $\xi$ , представляющих практический интерес ( $\xi \approx 3$ ), при числе Френеля  $N_F = 9$  выделяются конфигурации с  $m/n = 1/2, 2/5, 3/8, 1/3, 3/10, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/10$ . С увеличением  $N_F$  число критических конфигураций возрастает. Разложение по лаггер-гауссовым функциям показало, что в критических конфигурациях основная мода образована набором сфазированных на активной среде пучков с радиальными индексами  $p = nj/2$  ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) в случае четных  $n$  и  $p = nj$  при нечетных  $n$ . Кроме таких пучков, преимущественно составляющих основную моду, в виде слабого фона присутствуют и пучки с другими значениями  $p$ .

Авторы выражают благодарность А.В.Петухову за полезные обсуждения.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №05-02-17448а), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ №НШ 1583.2003.2 и Программы фундаментальных исследований ОФН РАН «Лазерные системы, основанные на новых активных материалах, и оптика структурированных материалов».

1. Laporta P., Brussard M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **27**, 2319 (1991).
2. Chen Y., Liao T., Kao C., Huang T., Lin K., Wang S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **32**, 2010 (1996).
3. Zhang X., Zhao S., Wang Q., Ozygus B., Weber H. *IEEE J. Quantum Electron.*, **35**, 1919 (1999).
4. Hajiesmaeilbaigi F., Koohian A., Mahdizadeh M. *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.*, **4**, 52 (2002).
5. Hall D.G., Smith R.J., Rice R.R. *Appl. Opt.*, **19**, 3041 (1980).
6. Chen Y.F., Kao C.F., Wang S.C. *Opt. Commun.*, **133**, 517 (1997).
7. Горбунков М.В., Коняшкин А.В., Кострюков П.В., Морозов В.Б., Оленин А.Н., Русов В.А., Телегин Л.С., Тункин В.Г., Шабалин Ю.В., Яковлев Д.В. *Квантовая электроника*, **35**, 2 (2005).
8. Wu H.-H., Sheu C.-C., Chen T.-W., Wei M.-D., Hsieh W.-F. *Opt. Commun.*, **165**, 225 (1999).
9. Martel G., Labbe C., Sanches F., Fromager M., Ait-Ameur K. *Opt. Commun.*, **201**, 117 (2002).
10. Fox A.G., Li T. *Bell Syst. Techn. J.*, **40**, 453 (1960).
11. Stutz H., Tang C.I. *J. Appl. Phys.*, **36**, 1816 (1965).
12. Li T., Skinner J.G. *J. Appl. Phys.*, **36**, 2595 (1965).
13. Blows J.L., Forbes G.W., Dawes J.M. *Opt. Commun.*, **186**, 111 (2000).
14. Лаптев Г.Д., Новиков А.А., Чиркин А.С. *Квантовая электроника*, **35**, 13 (2005).
15. Chen C.-H., Tai P.-T., Chiu W.-H., Hsieh W.-F. *Opt. Commun.*, **245**, 301 (2005).
16. Maes C.F., Wright E.M. *Opt. Lett.*, **29**, 229 (2004).
17. Petermann K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **15**, 566 (1979).
18. Kogelnik H., Li T. *Appl. Opt.*, **5**, 1550 (1966).
19. Chen J., Fujita M., Asakawa M., Imasaki K., Nakai S., Yamanaka C. *Opt. Commun.*, **119**, 563 (1995).
20. Силичев О.О. *Квантовая электроника*, **17**, 792 (1990).
21. Piche V., Lavigne P., Martin F., Belanger P.A. *Appl. Opt.*, **22**, 1999 (1983).
22. Быков В.П., Силичев О.О. *Лазерные резонаторы* (М.: Физматлит, 2004, с. 70, 137).
23. Siegman A.E. *Lasers* (Mill Valley, CA: Univ. Sci. Books, 1986, p. 761).