

Собственные частоты и добротность в геометрической теории мод шепчущей галереи

М.Л.Городецкий, А.Е.Фомин

Показано, что квазигеометрическое приближение позволяет достаточно точно рассчитывать спектр собственных частот аксиально-симметричных диэлектрических резонаторов с модами типа шепчущей галереи, а также получить выражения для излучательной добротности и добротности, связанной с поверхностными потерями.

Ключевые слова: микрорезонаторы, моды шепчущей галереи, эйконал, собственные частоты, добротность.

В работе [1] впервые были экспериментально продемонстрированы высокодобротные микрорезонаторы из плавленного кварца. В последующие годы интерес к миниатюрным оптическим диэлектрическим резонаторам с модами типа шепчущей галереи (МШГ) постоянно возрастал и технология их изготовления значительно продвинулась вперед. Такие характерные особенности резонаторов, как малый размер (0.01–10 мм), высокая добротность (до 10^{11}), произвольный профиль образующей поверхности (тор, сфероид [2, 3], специальный профиль [4]), возможность использовать кристаллические материалы, в том числе нелинейные, делают их исключительно привлекательными для широкого применения в экспериментальной физике и прикладных задачах оптоэлектроники (см. обзоры [5] и [6], посвященные теоретическим вопросам МШГ, а также обзор [7], посвященный экспериментальным приложениям резонаторов с МШГ), в частности для стабилизации полупроводниковых лазеров [8, 9].

В случае сферы или цилиндра удается точно найти собственные моды колебаний резонатора и соответствующие резонансные частоты, получить распределение поля внутри и вне резонатора, оценить энергетические потери. Однако в общем случае, если резонатор представляет собой произвольное тело вращения, этого сделать нельзя, поскольку точных аналитических решений не существует, а численные методы, например метод конечных элементов, теряют свою эффективность, когда размеры резонатора значительно превышают длину волны. Приближение геометрической оптики (эйконала) – один из наиболее эффективных асимптотических методов оценки собственных частот мод типа шепчущей галереи, если точные решения найти не удается [10]. В [11] мы получили весьма точные приближения для собственных частот в сфероиде и показали, как этот метод может быть применен к произвольному телу вращения. В настоящей

работе мы уточняем полученные результаты и получаем выражения для добротности диэлектрических резонаторов с МШГ с аксиальной симметрией для потерь, зависящих от формы резонатора.

Приближение геометрической оптики описывается уравнением эйконала

$$(\nabla S)^2 = \epsilon(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость. Для однородного резонатора в вакууме ϵ не зависит от координат, $\epsilon = n^2$ внутри резонатора и равно единице снаружи (n – показатель преломления). Чтобы свести уравнение эйконала к задаче на собственные значения, можно искать решения для лучей и сшивать их на границе диэлектрика. Но есть более наглядный и, в то же время, эффективный способ нахождения резонансных условий для интересующих нас мод типа шепчущей галереи – квазиклассическое квантование замкнутых оптических путей [10–15].

Рассмотрим модельную задачу о собственных колебаниях диэлектрического сфероиде. Сфероидальная система координат для сплюснутого и вытянутого сфероида имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} [(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \phi, \\ y &= \frac{d}{2} [(\xi^2 - s)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \phi, \\ z &= \frac{d}{2} \xi \eta, \end{aligned} \quad (2)$$

где d – расстояние между фокусами. Параметр $s = 1$ в системе вытянутых сфероидальных координат (ξ, η, ϕ) , при этом $\xi \in [1, \infty)$ соответствует вытянутым сфероидам, а $\eta \in [-1, 1]$ – двуполостным гиперболоидам вращения. Соответственно, если $s = -1$, то $\xi \in [0, \infty)$ определяет сплюснутые сфероиды, $\eta \in [-1, 1]$ – однополостные гиперболоиды. Нас интересуют моды шепчущей галереи, когда поле сосредоточено вблизи поверхности и экваториальной плоскости резонатора. В сфероидальной системе координат уравнение эйконала разделяется, если положить $S = S_1(\xi) + S_2(\eta) + S_3(\phi)$:

М.Л.Городецкий, А.Е.Фомин. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: gorm@hbar.phys.msu.ru, alexey_fmnn@mail.ru

$$S_1(\xi) = \frac{nd}{2} \int \frac{[(\xi^2 - \xi_c^2)(\xi^2 - s\eta^2)]^{1/2}}{\xi^2 - s} d\xi,$$

$$S_2(\eta) = \frac{nd}{2} \int \frac{[(\eta_c^2 - \eta^2)(\xi_c^2 - s\eta^2)]^{1/2}}{1 - \eta^2} d\eta, \quad (3)$$

$$S_3(\phi) = \mu \int d\phi,$$

где

$$\eta_c^2 = \frac{(1 + s\gamma) - [(1 + s\gamma)^2 - 4s\gamma\eta_0^2]^{1/2}}{2s\gamma}; \quad (4)$$

$$\xi_c^2 = \frac{(1 + s\gamma) + [(1 + s\gamma)^2 - 4s\gamma\eta_0^2]^{1/2}}{2\gamma} = \frac{1 + s\gamma}{\gamma} - s\eta_c^2;$$

$\gamma = n^2 d^2 / (4v^2)$; $\eta_0^2 = 1 - \mu^2 / v^2$; μ и v – константы разделения.

Уравнение эйконала описывает лучи, которые распространяются внутри резонатора, отражаясь от его поверхности. Лучи касаются внутренней каустики – сфероида ξ_c – и распространяются, прилегая к геодезическим кривым на нем. В идеальной сфере все лучи одного семейства лежат в одной плоскости, но даже небольшой эксцентриситет снимает это вырождение и приводит к прецессии траекторий вокруг оси z [16]. Геодезические линии приобретают вид незамкнутых спиралей, наматывающихся на каустический сфероид, при этом верхняя и нижняя точки этих траекторий задают другую каустическую поверхность, соответствующую η_c , которая является двуполостным гиперboloидом, если резонатор представляет собой вытянутый сфероид, и однополостным гиперboloидом, если сфероид сплюснутый.

В рамках квазиклассической лучевой интерпретации метода эйконала требуется применить условия согласования фаз при циклическом изменении каждой из координатных функций S_j , что приводит к следующим уравнениям для собственных значений задачи:

$$2kS_1|_{\xi_c}^{\xi_s} = 2\pi(q - 1/4),$$

$$2kS_2|_{-\eta_c}^{\eta_c} = 2\pi(p + 1/2), \quad (5)$$

$$kS_3|_0^{2\pi} = 2\pi|m|,$$

где k – волновое число; ξ_s – сфероид, соответствующий поверхности резонатора; q, p, m – целые числа. При составлении уравнений учитывают особенности поведения фазы луча при касании каустик и отражении от поверхностей. Каждое касание каустики изменяет фазу на $\pi/2$, а отражение – на π [17].

Эти же уравнения можно получить методом, предложенным в [14], при этом полученные формально решения эйконала приобретают наглядную интерпретацию. Интеграл для S_1 соответствует разности длин двух геодезических путей на поверхности $-\eta_c$ между точками $P_1(\xi_c, -\eta_c, \phi_1)$ и $P_2(\xi_c, -\eta_c, \phi_2)$ (рис. 1). Первый путь начинается от окружности, по которой пересекаются каустические поверхности ξ_c и $-\eta_c$, идет вдоль $-\eta_c$ к границе поверхности резонатора ξ_s , отражается от нее и возвращается обратно на ту же окружность, а второй проходит по дуге окружности между точками P_1 и P_2 . Интеграл для

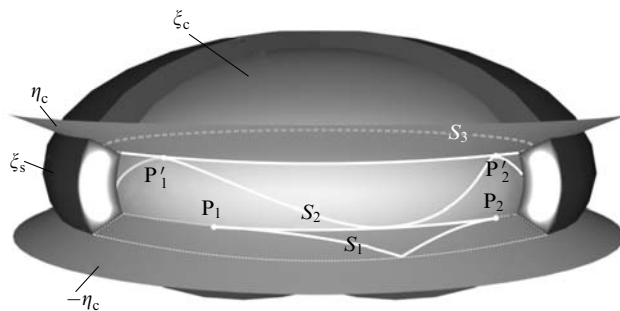


Рис.1. Вид каустических поверхностей и геодезических кривых сфероидального резонатора. Поле моды типа шепчущей галереи сосредоточено в экваториальной области вблизи поверхности резонатора и заполняет пространство, ограниченное этой поверхностью ξ_s и поверхностями каустик ξ_c и $\pm\eta_c$. Поле может быть представлено в виде совокупности геометрических лучей, отражающихся от поверхности, касательных к каустическим поверхностям и прилегающих к геодезическим линиям на этих каустических поверхностях.

S_2 соответствует разности длин путей, первый из которых идет по поверхности ξ_c от точки P'_1 , спускается к $-\eta_c$ и возвращается к η_c в точке P'_2 , а второй – по дуге окружности между точками P'_1 и P'_2 . Третий интеграл соответствует просто длине окружности пересечения каустических поверхностей ξ_c и η_c . В итоге для S_1 мы имеем один каустический сдвиг фазы $\pi/2$ на ξ_c и одно отражение от поверхности сфероида, для S_2 – каустический сдвиг $2(\pi/2)$ на η_c и на $-\eta_c$; S_3 дополнительных сдвигов фазы не имеет. Такая интерпретация является более общей и справедлива и в тех случаях, когда выписать решения эйконала в явном виде не удастся.

В приближении геометрической оптики МШГ представляют собой совокупности лучей, отражающихся от внутренней поверхности диэлектрического резонатора под углом, большим угла полного внутреннего отражения. Чтобы от сфероида с зеркальными стенками, описываемого полученными уравнениями, перейти в рамках геометрического приближения к диэлектрическому сфероиду, следует учесть дополнительный сдвиг фаз при полном внутреннем отражении. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания плоской волны (r_F и t_F) при ее падении на плоскую границу раздела двух сред следуют из известных формул Френеля (см. [17], п.1.5):

$$E_r = r_F E_i = \frac{\chi n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{\chi n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} E_i, \quad (6)$$

$$E_t = t_F E_i \frac{2\sqrt{\chi} n_i \cos \theta_i}{\chi n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} E_i.$$

Здесь E_i , E_r , E_t – амплитуды электрического поля в падающей, прошедшей и отраженной волнах соответственно; $\theta_i = \theta_r$, θ_t – углы падения, отражения и преломления (рис.2,а) падающей, прошедшей и отраженной волн; n_i и n_t – показатели преломления в двух средах; χ – коэффициент, зависящий от поляризации волны. Для волны, вектор E которой перпендикулярен плоскости падения (поперечно-электрическая ТЕ-волна) и параллелен границе раздела, коэффициент $\chi = 1$. Для ТМ-волны, вектор E которой лежит в плоскости падения и направлен в первой среде под углом падения θ_i к границе раздела, $\chi = (n_t/n_i)^2$. Угол преломления θ_t связан с углом падения законом Снелля:

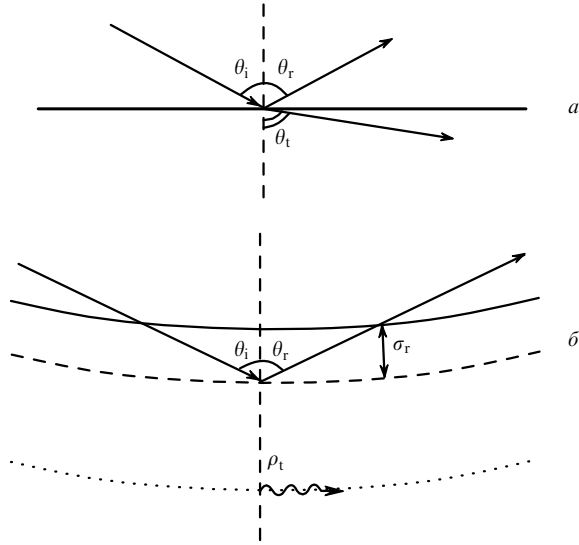


Рис.2. Падение луча на плоскую (а) и изогнутую (б) поверхность.

$$\frac{n_i \sin \theta_i}{n_t \sin \theta_t} = 1. \quad (7)$$

Формулы Френеля легко получаются из условия непрерывности на границе раздела продольных компонент вектора \mathbf{E} и поперечных – вектора $\mathbf{D} = n^2 \mathbf{E}$. Закон Снелля и закон отражения следуют из непрерывности на границе продольной составляющей волнового вектора $k_\tau = n_i k \sin \theta_i = n_t k \sin \theta_t = n_t k \sin \theta_t$.

Коэффициент r_F , связывающий E_r и E_i в первой из формул Френеля (6), просто равен амплитудному коэффициенту отражения R , поскольку непосредственно связывает амплитуды поля падающей и отраженной волн. Связь амплитудного коэффициента прохождения волны T со второй формулой Френеля и t_F можно найти из выражений для мощности оптической волны:

$$R = \frac{\chi n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{\chi n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (8)$$

$$T = t_F \left[\frac{n_t \operatorname{Re}(\cos \theta_t)}{n_i \cos \theta_i} \right]^{1/2} = \frac{2\chi n_i n_t [\chi \cos \theta_i \operatorname{Re}(\cos \theta_t)]^{1/2}}{\chi n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}.$$

При переходе из более оптически плотной среды в менее оптически плотную ($n_i > n_t$) угол преломления остается действительным лишь при углах падения, удовлетворяющих условию $\sin \theta_i < n_i/n_t$. При больших углах падения угол преломления становится комплексным (действительная часть равна $\pi/2$), а его косинус ($\cos \theta_t = (1 - \sin \theta_i n_i/n_t)^{1/2}$) и, следовательно, поперечная составляющая волнового вектора $k_{tz} = n_t k \cos \theta_t$ – чисто мнимыми. Это означает, что волна во второй среде с амплитудой, пропорциональной $\exp(-ikn_2 \cos \theta_t)$, превращается в затухающую, амплитуда которой пропорциональна $\exp[-k(n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2)^{1/2}]$ и не распространяется на бесконечности. При этом модуль коэффициента отражения $|R| = 1$, а $T = 0$. Поле во второй среде, определяемое второй из формул Френеля (6), не обращается на границе в нуль как раз из-за наличия такой затухающей волны. Этот эффект выпадающего поля при полном внутреннем отражении играет важнейшую роль в свойствах мод шепчущей галереи, поскольку позволяет связываться с таки-

ми модами и ответственен за взаимодействие мод с окружающей резонатор средой.

Проникновение поля во вторую среду можно описать в лучевом приближении, вводя воображаемую зеркальную границу, отстоящую на расстояние σ_r от реальной границы (рис.2). Это расстояние можно получить из формулы для коэффициента отражения (8), полагая, что дополнительный набег фазы в коэффициенте разложения вызван прохождением этого дополнительного пути. Для почти скользких углов падения в модах шепчущей галереи, когда величина $\cos \theta_i$ мала, из выражения Френеля (6) следует

$$R = -e^{i\phi_r} = \frac{\chi n_i \cos \theta_i - i(n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2)^{1/2}}{\chi n_i \cos \theta_i + i(n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2)^{1/2}},$$

$$\phi_r = 2 \arctan \frac{\chi n \cos \theta_i}{(n^2 \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}} \quad (9)$$

$$\simeq \frac{2\chi n}{(n^2 - 1)^{1/2}} \cos \theta_i + \frac{\chi n^3 (3 - 2\chi^2)}{3(n^2 - 1)^{3/2}} \cos^3 \theta_i + \frac{\chi n^5 (15 - 20\chi^2 + 8\chi^4)}{20(n^2 - 1)^{5/2}} \cos^5 \theta_i + O(\cos^7 \theta_i),$$

где $n = n_i/n_t$. Лучи ведут себя так, как если бы они отражались без смещения от поверхности, отстоящей от реальной на расстояние

$$\sigma_r = \frac{\phi_r}{2kn \cos \theta} = k^{-1} \left[\frac{2\chi}{(n^2 - 1)^{1/2}} + \frac{\chi n^2 (3 - 2\chi^2)}{6(n^2 - 1)^{3/2}} \cos^2 \theta_i + \frac{\chi n^4 (15 - 20\chi^2 + 8\chi^4)}{20(n^2 - 1)^{5/2}} \cos^4 \theta_i + O(\cos^6 \theta_i) \right]. \quad (10)$$

По той же причине происходит продольный сдвиг отраженного пучка $\sigma_\tau = \sigma_r / \sin \theta_i$. Этот эффект известен как эффект Гуса – Хенхена [18] и может быть весьма велик для скользких углов.

При падении луча на плоскую поверхность раздела при условии $\sin \theta_i > n_i/n_t$ отражение будет полным. Однако если поверхность выпуклая с внешней стороны, это не так (рис.2,б). Причину легко понять, а эффект – оценить из простых физических соображений. Выпадающее поле волны движется вдоль изогнутой поверхности с радиусом кривизны ρ_{cv} с тангенциальной скоростью $v_\tau = \omega/k_\tau = c/(n_i \sin \theta_i)$ (ω – циклическая частота, c – скорость света во внешней среде), и при удалении от поверхности фазовые фронты движутся с постоянной угловой скоростью. Однако на расстоянии $\rho_t = \rho_{cv} c/v_\tau = \rho_{cv} n \sin \theta_i$ от центра кривизны эта скорость становится равной скорости света и «хвост» выпадающего поля, дошедший до этой границы, излучается по касательной и поэтому не может вернуться назад в первую среду [19]. В отличие от отражения от плоскости убывание выпадающего поля, зависящее от расстояния ρ , происходит не по экспоненте, но и это распределение легко найти. Оно происходит по закону $E = E_i t_F \exp[i \int k_\rho(\rho) d\rho]$, где

$$k_\rho(\rho) = \left[k^2 - \left(\frac{k_\tau \rho_{cv}}{\rho} \right)^2 \right]^{1/2} = ik \left[\left(\frac{\rho_{cv} n \sin \theta_i}{\rho} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Как видно из этой формулы, на расстоянии ρ_i затухание прекращается и k_ρ из мнимого становится действительным. Таким образом, беря интеграл, мы получаем окончательное выражение для потерь мощности при отражении от изогнутой поверхности:

$$|T|^2 = |t_F|^2 \frac{(n^2 \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}}{n \cos \theta_i} \times \exp \left\{ -2k \int_{\rho_{cv}}^{\rho_i} \left[\left(\frac{\rho_{cv} n \sin \theta_i}{\rho} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} d\rho \right\} = \frac{4n\chi \cos \theta_i (n^2 \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}}{n^2 - 1 - n^2(1 - \chi^2) \cos^2 \theta_i} e^{-2\Psi(\theta_i)}, \quad (12)$$

$$\Psi(\theta_i) = k\rho_{cv} [n \sin \theta_i \operatorname{arccosh}(n \sin \theta_i) - (n^2 \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}].$$

Используя выражение, найденное для сдвига σ_r , и вычисляя асимптотически интегралы в приближении малости η_c и $(\xi_s - \xi_c)/\xi_s$, получаем следующее приближение для собственных частот сфероидального резонатора [11]:

$$nka = l + \alpha_q \left(\frac{l}{2} \right)^{1/3} + \frac{2p(a-b) + a}{2b} - \frac{\chi n}{(n^2 - 1)^{1/2}} + \frac{3\alpha_q^2}{20} \left(\frac{l}{2} \right)^{-1/3} + \frac{\alpha_q}{12} \left[\frac{2p(a^3 - b^3) + a^3}{b^3} + \frac{2n^3 \chi (2\chi^2 - 3)}{6(n^2 - 1)^{3/2}} \right] \left(\frac{l}{2} \right)^{-2/3} + O(l^{-1}), \quad (13)$$

где a и b – полуоси сфероида; $l = |m| + p$ – порядок моды. В (13) для лучшей точности формально получающиеся решения $\alpha_q = [\frac{3}{2}\pi(q - \frac{1}{4})]^{2/3}$ следует заменить на корни уравнения $\operatorname{Ai}(-\alpha_q) = 0$, ($\alpha_q \simeq 2.3381, 4.0879, 5.5206, \dots$), где $\operatorname{Ai}(z)$ – функция Эйри. Правомерность такой замены вытекает из свойств приближения через функции Эйри поля вблизи каустики [12]. Полученное выражение с погрешностью $\sim O(l^{-1})$ имеет гораздо большую точность, чем найденные ранее приближения [2, 14, 15], погрешность которых составляет $O(l^{-1/3})$. Точность полученного приближения подтверждается результатами численного моделирования [11].

Произвольную поверхность тела вращения часто можно аппроксимировать эквивалентным сфероидом, принимая во внимание, что поле мод типа шепчущей галереи сосредоточено около экваториальной плоскости, вблизи поверхности резонатора, и использовать напряму полученный результат.

В случае произвольного выпуклого тела вращения можно построить также более общую теорию. Сначала определим семейства каустических поверхностей. Первое семейство найдем, пользуясь приближением [12]

$$\sigma_c(P) \simeq -\frac{1}{2} \kappa^2 \rho_{cv}^{1/3}(P) + O(\kappa^4), \quad (14)$$

$$\cos \theta_i(P) = \kappa \rho_{cv}^{-1/3}(P),$$

где $\sigma_c(P)$ – нормальное расстояние от точки P на поверхности тела до каустической поверхности; κ – параметр семейства; $\cos \theta_i$ – угол падения луча в точке P . Если найдена каустическая поверхность из первого семейства, заданная параметрически как $\rho = g(z)$, то можно найти и

второе семейство поверхностей, заданных параметрически как $h(z)$ и ортогональных любой поверхности из первого семейства при различных κ . Геодезическая кривая на поверхности определяется следующим выражением:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\rho_c(1 + g'^2)^{1/2}}{g(z)[g^2(z) - \rho_c^2]^{1/2}}, \quad (15)$$

где $\rho_c = g(z_{\max})$ – радиус окружности на каустике, находящейся на максимальном расстоянии от экваториальной плоскости. Длина геодезической кривой отрезка

$$dL = \frac{g(1 + g'^2)^{1/2}}{(g^2 - \rho_c^2)^{1/2}} dz. \quad (16)$$

Тогда длина геодезической кривой, соединяющей точки ϕ_1 и ϕ_2 ,

$$L_1^g = 2 \int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} \frac{g(1 + g'^2)^{1/2}}{(g^2 - \rho_c^2)^{1/2}} dz, \quad (17)$$

а длина дуги от $\phi_0 = 0$ до $\phi_c = 2 \int_{-\eta_c}^{\eta_c} \frac{d\phi}{du} du$

$$L_2^g = \rho_c \phi_c = 2 \int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} \frac{\rho_c^2(1 + g'^2)^{1/2}}{g(g^2 - \rho_c^2)^{1/2}} dz. \quad (18)$$

В итоге получаем

$$nk(L_1^g - L_2^g) = 2nk \int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} \frac{(1 + g'^2)^{1/2}(g^2 - \rho_c^2)^{1/2}}{g} dz = 2\pi(p + 1/2). \quad (19)$$

Точно так же, беря интеграл от поверхности резонатора, для геодезической кривой на каустической поверхности другого семейства $\rho = h(z)$ получим

$$nk(L_1^h - L_2^h) = 2nk \int_{z_{\max}}^{z_s} \frac{(1 + h'^2)^{1/2}(h^2 - \rho_c^2)^{1/2}}{h(z)} dz = 2\pi(q - 1/4). \quad (20)$$

Третье условие:

$$2\pi nk \rho_c = 2\pi |m|. \quad (21)$$

Для сфероидальной системы координат эта система эквивалентна (5).

В работе [20] предложен другой интересный метод расчета собственных частот мод шепчущей галереи, в котором поле представляется в виде медленно меняющегося вдоль оси z собственного решения для диэлектрического цилиндра. Учет зависимости по z проводится с помощью метода ВКБ. Аналогичный метод был предложен ранее в работе [2]. Использование этого метода для решения модельной задачи о собственных частотах сферы и сфероида показывает, что его точность имеет порядок $O(l^{-2/3})$, т. е. она хуже, чем у рассмотренного нами метода.

Чтобы оценить собственную добротность мод типа шепчущей галереи в квазиклассическом приближении, нужно учесть потери внутренних лучей при каждом от-

ражении от поверхности резонатора. Добротность определяется простым выражением [1]:

$$Q = \frac{2\pi n}{\alpha\lambda}, \quad (22)$$

где α соответствует потерям на единицу длины пути луча; λ – длина волны. Путь можно представить как множество отрезков ломаной, длина каждого из которых $L_n = 2\rho_{cv} \times \cos\theta$. Пусть потери энергии при отражении на данном отрезке пути равны $T(\theta)$ и $\alpha_n = T(\theta, \rho_{cv})/L_n$. Усредняя α_n по одному витку геодезической кривой, получаем полные потери, а также добротность

$$Q = \frac{2\pi n L^g}{\lambda} \left[\oint \frac{T(\theta)}{2\rho_{cv}(\theta) \cos\theta} dL \right]^{-1} \\ = \frac{2\pi n L^g}{\lambda} \left[\int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} \frac{T(\theta)}{\rho_{cv}(\theta) \cos\theta} dz \right]^{-1}. \quad (23)$$

Это выражение можно использовать для оценки добротности в произвольных диэлектрических резонаторах с модами типа шепчущей галереи, причем не только для вычисления излучательной добротности, но и для расчета потерь на рассеяние и поглощение на поверхности. Потери на излучение при отражении от изогнутой поверхности были найдены выше; их можно также получить, решая модельную задачу в сфере, когда $\rho_{cv} = a$ и $\cos\theta_0 = [1 - (l + 1/2)^2 / (kna)^2]^{1/2} \simeq (\alpha_q)^{1/2} (l/2)^{-1/3}$ и

$$T_0 = \frac{4\pi n a \cos\theta_0}{\lambda Q_0}, \quad (24)$$

причем ρ_{cv} , $\cos\theta_0$ и T_0 являются постоянными модами. При использовании приближений Дебая для функций Неймана в выражении для излучательной добротности, найденном из точного уравнения сферы, получается то же самое выражение (12). Добротность можно вычислить, если известно $T(\theta)$, используя соотношения

$$\rho_{cv} = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{\rho^3 (1 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho_{\max}^2 (1 + \rho'^2) - \rho \rho'' (\rho^2 - \rho_{\max}^2)}, \\ \frac{dl}{dz} = \frac{\rho(z) [1 + \rho'(z)^2]^{1/2}}{[\rho^2(z) - \rho_{\max}^2]^{1/2}}, \quad (25)$$

$$L^g = 4 \int_0^{z_{\max}} \frac{\rho(z) [1 + \rho'(z)^2]^{1/2}}{[\rho^2(z) - \rho_{\max}^2]^{1/2}} dz,$$

$$\cos\theta \simeq [2\sigma_c / \rho_{cv}]^{1/2},$$

где $\rho_{\max} = \rho(z_{\max})$ – расстояние от оси z до наивысшей точки геодезической кривой; σ_c – нормальное расстояние от поверхности сферы до каустической поверхности.

Из (25) найдем выражения для собственной излучательной добротности сфероида:

$$\rho_{cv} = a \frac{[1 + z^2(a^2 - b^2)/b^4]^{3/2}}{1 + z_{\max}^2(a^2 - b^2)/b^4} \\ \simeq a \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \eta_c^2 + \frac{3}{2} \frac{a^2 - b^2}{b^4} z^2 \right), \quad (26)$$

$$\cos\theta \simeq (\alpha_q)^{1/2} \left(\frac{l}{2} \right)^{-1/3} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \eta_c^2 - \frac{a^2 - b^2}{2b^4} z^2 \right),$$

$$L^g \simeq 2\pi b + \frac{\pi a^2 - b^2}{2b} \eta_c^2.$$

Принимая $z = \eta_c \cos\psi$, получаем

$$Q \simeq \frac{\pi(n^2 - 1)^{1/2} l}{4\chi n} \left[\int_0^{\pi/2} e^{-2\psi(\psi)} d\psi \right]^{-1} \\ \simeq \frac{(n^2 - 1)^{1/2} l}{2\chi n} e^{2\psi_0} \frac{e^{\psi_1}}{I_0(\psi_1)}, \\ \Psi_0 = nka \left[1 - \frac{(2p+1)a(a^2 - b^2)}{lb^3} \right] \\ \times \left\{ \operatorname{arcosh} n \left[1 - \frac{\alpha_q}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^{-2/3} \right] - \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \right\}, \\ \Psi_1 = \Psi_0 \frac{3(2p+1)a(a^2 - b^2)}{2b^3 l}, \quad (27)$$

где $I_0(z)$ – функция Инфельда. На рис.3 показана зависимость излучательной добротности от параметра сплюснутости сфероида для ТЕ- и ТМ-мод при $l = m = 100$ (фундаментальная мода) и $l = 100, m = 98$. Сплюснутость $f = 0$ ($a = b$) соответствует идеальной сфере.

Для расчета потерь, связанных с рассеянием на неидеальной поверхности резонатора, воспользуемся результатами расчета для сферы [21] –

$$T = \frac{32n^2 \pi^3 B^2 \sigma^2}{3\lambda^4} \cos\theta,$$

где B – длина корреляции неоднородностей; σ – размер неоднородностей.

В итоге добротность поверхностного рассеяния

$$Q_{ss} = \frac{3\lambda^2 L^g}{16n\pi^2 B^2 \sigma^2} \\ \times \left[\int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} \frac{1 + z_{\max}^2(a^2 - b^2)/b^4}{(z_{\max}^2 - z^2)^{1/2} (1 + z^2(a^2 - b^2)/b^4)} dz \right] =$$

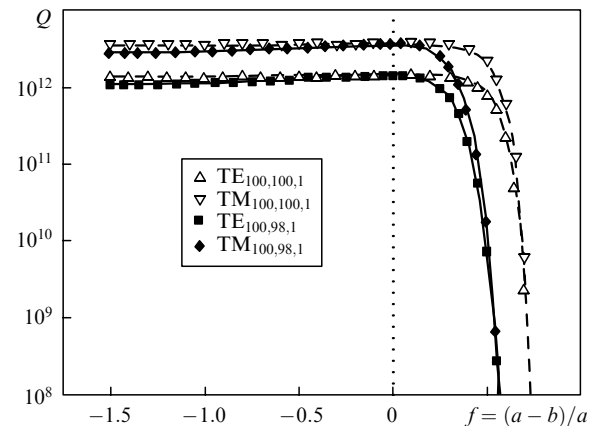


Рис.3. Излучательная добротность в зависимости от параметра сплюснутости.

$$= \frac{3\lambda^2 a}{8\pi^2 B^2 \sigma^2} \frac{1}{[1 + z_{\max}^2 (a^2 - b^2)/b^4]}.$$

Таким образом, в рамках лучевой интерпретации можно получить аккуратные приближения для собственных частот и добротности осесимметричных диэлектрических резонаторов с модами типа шепчущей галереи с произвольным профилем образующей поверхности.

Работа поддержана грантом Президента РФ «Молодые доктора наук» (№ МД-1485-2005-2).

1. Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Phys. Lett. A*, **137**, 393 (1989).
2. Ilchenko V.S., Gorodetsky M.L., Yao X.S., Maleki L. *Opt. Lett.*, **26**, 256 (2001).
3. Vahala K. *Nature*, **424**, 839 (2001).
4. Savchenkov A.A., Matsko A.B., Maleki L. *Opt. Lett.*, **31**, 92 (2006).
5. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **32**, 377 (2002).
6. Ilchenko V.S., Matsko A.B. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **12**, 3 (2006).
7. Ilchenko V.S., Matsko A.B. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **12**, 15 (2006).
8. Vassiliev V.V., Velichansky V.L., Ilchenko V.S., Gorodetsky M.L., Hollberg L., Yarovitsky A.V. *Opt. Commun.*, **158**, 305 (1998).
9. Ораевский А.Н., Яровицкий А.В., Величанский В.Л. *Квантовая электроника*, **31**, 897 (2001).
10. Keller J.B., Rubinow S.I. *Ann. Phys.*, **9**, 24 (1960).
11. Fomin A.E., Gorodetsky M.L. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **12**, 33 (2006).
12. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972).
13. Силаков Е.Л. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **42**, 228 (1974).
14. Быков В.П. *Электроника больших мощностей*, **4**, 66 (1965).
15. Вайнштейн Л.А. *Электроника больших мощностей*, **3**, 176 (1964).
16. Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Opt. Commun.*, **113**, 133 (1994).
17. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973).
18. Goos F., Hänchen H.H. *Ann. Phys.*, **1**, 333 (1947).
19. Roll G., Schweiger G. *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**, 1301 (2000).
20. Sumetsky M. *Opt. Lett.*, **29**, 8 (2004).
21. Gorodetsky M.L., Pryamikov A.D., Ilchenko V.S. *J. Opt. Soc. Am. B*, **17**, 1051 (2000).