

Статистика отклонения света в случайно-неоднородной двухфазной среде

А.П.Свиридов

В рамках геометрической оптики рассмотрена статистика углов отклонения света при его распространении в неоднородной двухфазной среде со случайно ориентированными границами раздела фаз. Рассчитаны вероятности нахождения случайно блуждающего фотона в различных фазах неоднородной среды. Получены аналитические выражения для фазовой функции рассеяния и фазовой матрицы рассеяния, связывающей вектор Стокса падающего луча с векторами Стокса отклоненных лучей.

Ключевые слова: рассеяние света, фазовая функция, фазовая матрица, неоднородная среда.

1. Введение

Взаимодействие электромагнитных волн с неоднородными средами интенсивно изучалось в течение последнего столетия. Интерес к этим исследованиям в значительной степени связан с практическими потребностями радиосвязи, радиолокации, космической разведки, астрофизики и др. Основные результаты исследований изложены во множестве статей и монографий [1–4]. Наиболее универсальный подход к проблеме основан на решении уравнений Максвелла с соответствующими граничными и начальными условиями [5]. В случае неоднородной среды эти условия приобретают статистический характер, что значительно усложняет задачу. Поэтому обычно используют различные приближения, дающие аналитические решения или существенно упрощающие компьютерные вычисления [6]. Так, если характерный размер неоднородностей среды достаточно велик по сравнению с длиной волны, то вполне подходит приближение геометрической оптики [7]. Чтобы оценить угловые отклонения лучей в случайной среде ранее в основном применялись уравнения эйконала совместно с корреляционной функцией показателя преломления [8] или диффузионные уравнения Эйнштейна–Фоккера [9–11]. С развитием компьютеров появились новые возможности для реализации сложных вычислений статистики распространения лучей и моделирования различных случайных сред. В биомедицинской оптике часто стали применяться методы Монте-Карло или диффузионные модели, которые по сути основаны на геометрической концепции распространения света. Эти методы предполагают знание основных оптических характеристик случайной среды: коэффициентов поглощения, рассеяния и анизотропии. По определению коэффициент анизотропии представляет собой средний косинус угла отклонения луча в

единичном акте рассеяния. Он зависит от фазовой функции рассеяния $p(s, s')$, которая является плотностью вероятности изменения направляющего вектора луча s на вектор s' при рассеянии [3]. Поэтому распространение излучения в неоднородной среде в значительной мере определяется видом фазовой функции рассеяния.

К сожалению, во многих реальных случаях измерить фазовую функцию рассеяния чрезвычайно сложно [12–16] или невозможно. Поэтому в биомедицинской оптике стали широко использовать феноменологическую фазовую функцию Хеньи–Гринштейна [17]. По сути она является суммой первых двух коэффициентов в разложении обобщенной фазовой функции в ряд по полиномам Лежандра с $\cos \gamma$ в качестве аргумента, где γ – угол между векторами s и s' [18]. Фазовая функция Хеньи–Гринштейна обычно закладывается в основу модели среды при измерении оптических характеристик. Поскольку при последующих применениях она опять используется аналогичным образом, то, несмотря на отсутствие связи с физической природой рассеивающей среды, конечный результат часто оказывается вполне разумным. Другие виды фазовых функций встречаются довольно редко [19–25]. В [20] критически рассмотрены некоторые из этих функций с точки зрения возможного использования их в оптике биотканей. Оказывается, что все известные фазовые функции имеют существенные недостатки, вызванные отсутствием связи с физической природой биологических тканей. Кроме того, большинство этих функций не чувствительны к состоянию поляризации световой волны, поэтому их часто используют совместно с теорией Ми, позволяющей рассчитывать рассеяние поляризованного света сферическими частицами. Понятно, что моделирование биологической ткани сферическими частицами далеко от реальной картины.

В других работах моделировалось рассеяние света случайно деформированными частицами путем трассировки лучей по методу Маркова [6]. При этом учитывались события отражения и преломления на поверхности частиц в соответствии со статистическими весами, равными коэффициентам Френеля. Форма частиц генерировалась с помощью двух параметров: стандартного отклонения радиуса и длины корреляции угловых вариаци-

А.П.Свиридов. Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН, Россия, Московская обл., 140700 Шатура, Святоозерская ул., 1; e-mail:sviridov@laser.ru

Поступила в редакцию 21 июня 2006 г., после доработки – 20 сентября 2006 г.

ций. Ориентация частиц в пространстве выбиралась случайным образом. Аналогичный подход использовался для вычисления фазовой функции рассеяния гексагональных кристалликов льда в атмосфере [26–28]. Для частиц с фиксированными статистическими параметрами такой подход в принципе позволяет вычислить все элементы фазовой матрицы, связывающей угловое распределение параметров Стокса рассеянной волны с параметрами Стокса падающей плоской волны [29]. Связь с реальными средами и возможность проверки в экспериментах с поляризованным светом делают этот метод весьма привлекательным. Однако он требует сложных вычислений, в особенности если размер и форма частиц существенно варьируются [30].

Обычно рассеяние света происходит в результате взаимодействия с частицами, флуктуациями плотности среды или при отражении (преломлении) на шероховатой поверхности. Оптически неоднородную среду часто можно представить состоящей из нескольких фаз, разделенных случайно деформированными поверхностями. Так, например, многие биологические ткани состоят в основном из воды и органического матрикса. При распространении света в такой среде происходит множество актов взаимодействия излучения с поверхностями раздела фаз, в результате которых случайно изменяется направление луча. Этот процесс характеризуется плотностью вероятности отклонения луча на заданный угол, которая эквивалентна фазовой функции рассеяния света частицами. В каждом таком акте часть потока отражается, а часть преломляется. Соотношение энергий в этих потоках, согласно формулам Френеля, зависит от угла падения, относительного показателя преломления и направления вектора поляризации. То обстоятельство, что поток света многократно расщепляется, значительно усложняет рассмотрение. Однако если рассматривать пространственную ориентацию поверхности раздела фаз как статистический процесс, то преломление и отражение света можно считать независимыми событиями со статистическими весами, равными коэффициентам Френеля. Надо лишь учесть, что отклонение света в заданном направлении возможно при двух различных ориентациях поверхности – в одном случае происходит преломление, а в другом – отражение.

Такая случайно ориентированная поверхность, по сути, является идеальным физическим объектом со статистическим генератором пространственных ориентаций поверхности раздела фаз. Она характеризуется двумя параметрами: относительным показателем преломления и плотностью вероятности реализации данного угла между нормалью к поверхности раздела фаз и направляющим вектором падающего луча. Если предположить, что различные пространственные ориентации поверхности равновероятны, то единственным характеризующим ее параметром становится относительный показатель преломления. В этом случае можно определить фазовую функцию рассеяния света для конкретной среды, исходя лишь из первых принципов. В предлагаемой модели используются формулы Френеля. Благодаря этому она применима и для поляризованного света.

Ранее многие авторы описывали рассеяния света шероховатыми поверхностями, используя фасетные модели [31–34], которые идеологически очень близки к предлагаемой двухфазной модели среды со случайно ориентированными поверхностями раздела фаз. Однако в ос-

новном они ограничивались случаем, когда свет падает на шероховатую поверхность с одной из ее сторон. Отличительная черта многофазной, неоднородной среды состоит в том, что в ней фотоны попадают на поверхности раздела фаз под случайными углами с обеих сторон. При этом всякий раз часть потока отражается, оставаясь в той же фазе, а часть, преломившись, проникает в другую фазу. Поэтому необходимо отслеживать, в какой именно фазе среды находится фотон при достижении поверхности раздела фаз, осуществляя выборку согласно формулам Френеля. Другой подход к проблеме заключается в определении вероятности нахождения стохастических фотонов в каждой фазе среды и использовании их в качестве статистического веса соответствующих слагаемых фазовой функции рассеяния. В решении этой задачи и состоит новизна настоящей работы.

Поскольку модель основана лишь на лучевых представлениях света, то она ограничена пределами геометрической оптики – характерный размер оптических неоднородностей среды должен быть достаточно велик по сравнению с длиной волны. Для большинства биологических тканей коэффициент рассеяния для излучения видимой и ближней ИК областей лежит в диапазоне $100–1000\text{ см}^{-1}$. Этому диапазону соответствуют размеры оптических неоднородностей $100–10\text{ мкм}$, что существенно превышает длину волны ($\sim 1\text{ мкм}$). Отсюда следует допустимость геометрического приближения при моделировании распространения света в биологических тканях. В отличие от волновой модели геометрическое приближение не позволяет учесть эффекты дифракции и интерференции света. Можно, однако, предположить, что при многократном рассеянии стохастических фотонов в неоднородной среде эти эффекты усредняются, так что результаты, полученные при геометрическом рассмотрении, удовлетворительно описывают ситуацию.

2. Фазовая функция рассеяния

Рассмотрим распространение света в оптически неоднородной среде, состоящей из двух фаз с показателями преломления n_1 и n_2 . Пусть тонкий луч света, находясь в фазе с показателем преломления n_1 , пересекает поверхность раздела фаз. Расположим центр трехмерной декартовой системы координат в предполагаемой точке пересечения луча с поверхностью раздела фаз среды и направим ось z навстречу падающему лучу. Определим также эквивалентную сферическую систему координат с полярным углом, отсчитываемым относительно оси z , и азимутальным углом, отсчитываемым относительно оси x . Аналогичная система координат обычно используется при рассмотрении рассеяния света частицами [29, 35]. Пусть η, φ и γ, ψ – угловые координаты нормали к поверхности раздела фаз и направляющего вектора отклоненного луча в сферической системе координат. Геометрическим местом концов нормали является полусфера ($z > 0$), центр которой находится в начале координат, а геометрическим местом концов направляющего вектора отклоненного луча – полная сфера (рис.1). Для нормали $\eta \in [0, \pi/2]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$, а для направляющего вектора отклоненного луча $\gamma \in [0, \pi]$ и $\psi \in [0, 2\pi]$. В нашем случае нормаль к поверхности, падающий, преломленный и отраженный лучи лежат в одной плоскости, поэтому $\psi = \varphi$, и, кроме того, углы γ и φ независимы. Пусть $\sigma(\eta, \varphi)$ – плотность вероятности реализации данного направления

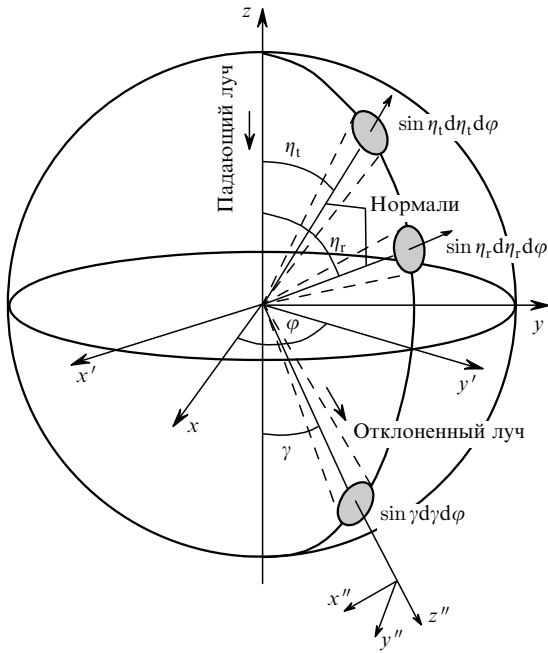


Рис. 1. Диаграмма отклонения луча света случайно ориентированной поверхностью раздела фаз. Элемент поверхности расположен в начале координат, и нормаль к ней может быть направлена в любой телесный угол верхней полусферы, отклоненный луч может иметь любое направление. Заданному углу отклонения луча γ соответствуют два возможных положения нормали, определяемых углами η_r и η_t , при которых луч отражается или преломляется. Другие особенности диаграммы объяснены в тексте.

нормали к поверхности раздела фаз, а $p(\gamma, \varphi)$ – искомая плотность вероятности реализации данного направления отклоненного луча. По определению вероятность обнаружить отклоненный луч в пределах элемента телесного угла в направлении, задаваемом углами γ, φ , равна $p(\gamma, \varphi) \sin \gamma d\gamma d\varphi$, а вероятность обнаружить нормаль к поверхности раздела фаз в пределах элемента телесного угла в направлении, задаваемом углами η, φ , равна $\sigma(\eta, \varphi) \times \sin \eta d\eta d\varphi$.

3. Плотность вероятности угла отклонения луча в заданном направлении

Падающий луч может быть отклонен в направлении, задаваемом углами γ, φ , если нормаль к поверхности имеет лишь определенные направления, задаваемые углами η_r, φ и η_t, φ (рис.1). Индексы r и t относятся соответственно к событиям отражения и преломления, η_r и η_t – углы между нормалью к поверхности раздела фаз и падающим лучом, а угол отклонения луча равен γ . Мы полагаем, что вероятность обнаружить фотон в элементарном телесном угле $\sin \gamma d\gamma d\varphi$ равна сумме вероятностей обнаружить нормаль к поверхности раздела фаз в элементарных телесных углах $\sin \eta_r d\eta_r d\varphi$ и $\sin \eta_t d\eta_t d\varphi$ с учетом статистических весов событий отражения и преломления. Примем также, что статистические веса этих событий равны коэффициентам Френеля для интенсивности отраженного ($R(\eta_r, \varphi)$) и прошедшего ($T(\eta_t, \varphi)$) света. Эти соображения приводят к следующему уравнению:

$$p(\gamma, \varphi) \sin \gamma d\gamma = R(\eta_r, \varphi) \sigma(\eta_r, \varphi) \sin \eta_r d\eta_r +$$

$$+ T(\eta_t, \varphi) \sigma(\eta_t, \varphi) \sin \eta_t d\eta_t. \quad (1)$$

Чтобы выполнить преобразование случайных переменных необходимо определить соотношения между углами η_r, η_t и γ . Они следуют из законов отражения и преломления:

$$\eta_r(\gamma) = (\pi - \gamma)/2, \quad (2)$$

$$\eta_t(\gamma) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{n \sin \gamma}{1 - n \cos \gamma}\right) & \text{при } n < 1, \\ \arctan\left(\frac{n \sin \gamma}{n \cos \gamma - 1}\right) & \text{при } n > 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $n = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления. Эти зависимости приведены на рис.2. Здесь область допустимых углов отклонения расширена (от $-\pi$ до π), что, в принципе, соответствует двумерной среде. Принято также, что отклонение по часовой стрелке относительно первоначального направления дает отрицательные значения угла γ . В случае преломления область допустимых значений модуля угла отклонения $|\gamma|$ ограничена величинами $\pi/2 - \arcsin(1/n)$ при $n \geq 1$ и $\pi/2 - \arcsin n$ при $n < 1$. Соответственно в случае $n < 1$ область углов падения при преломлении ограничена критическим углом $-\arcsin n$. Подставив в уравнение (1) углы $\eta_r(\gamma)$ и $\eta_t(\gamma)$, а также абсолютные значения производных $d\eta_r/d\gamma$ и $d\eta_t/d\gamma$, получим выражение для плотности вероятности отклонения луча в заданном направлении:

$$p(\gamma, n) = \frac{R(\eta_r(\gamma)) \sin(\eta_r(\gamma))}{2 \sin \gamma} \sigma(\eta_r(\gamma)) + \frac{T(\eta_t(\gamma)) \sin(\eta_t(\gamma))}{\sin \gamma} \left| \frac{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{1/2}}{\cos \gamma - (n^2 - \sin^2 \gamma)^{1/2}} \right| \sigma(\eta_t(\gamma)). \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем угол φ опущен в предположении азимутальной симметрии. В формуле (4) коэффициенты Френеля зависят от относительного показателя преломления фаз среды и направления вектора поляризации падающего света по отношению к плоскости падения.

Предположим, что все положения плоскости раздела фаз по отношению к падающему лучу равновероятны, т. е., $\sigma(\eta, \varphi) = 1/(2\pi)$. Тогда уравнение (4) упрощается:

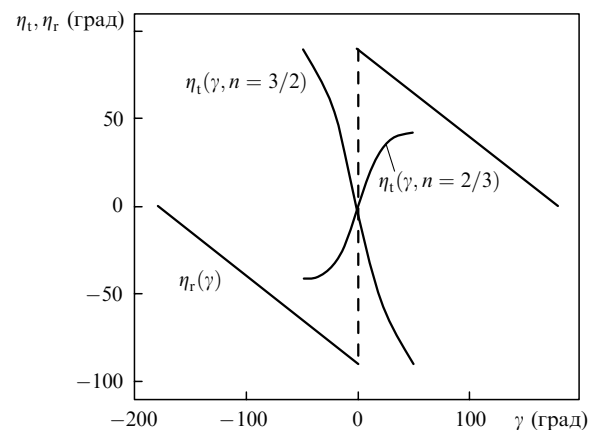


Рис.2. Зависимости углов падения луча света η_r и η_t от угла отклонения γ при отражении и преломлении на поверхности раздела фаз.

$$p(\gamma, n) = \frac{R(\eta_r(\gamma), n) \sin(\eta_r(\gamma))}{4\pi \sin \gamma} + \frac{T(\eta_t(\gamma), n) \sin(\eta_t(\gamma))}{2\pi \sin \gamma} \left| \frac{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{1/2}}{\cos \gamma - (n^2 - \sin^2 \gamma)^{1/2}} \right|. \quad (5)$$

Два члена в правой части уравнения (5) соответствуют событиям отражения и преломления, для которых угол отклонения γ одинаков. Обозначим их для удобства как $p_r(\gamma, n)$ и $p_t(\gamma, n)$ соответственно. По сути – это плотности вероятности событий отражения и преломления, которые происходят при различных ориентациях нормали к поверхности раздела фаз. Поэтому они статистически независимы. Более того, события отражения и преломления независимы для любого положения поверхности, поскольку выборка их происходит соответственно статистическим весам, сумма которых равна единице. Отсюда следует, что суммарные числа фотонов, прошедших через случайно ориентированную поверхность и отраженных от нее по всем возможным направлениям, также являются статистически независимыми.

Коэффициенты Френеля в уравнении (5) зависят от направления поляризации падающей световой волны по отношению к плоскости падения. Неполаризованный пучок света можно разложить на два ортогонально линейно поляризованных некогерентных пучка равной интенсивности. Поэтому

$$R(\eta_r(\gamma), n) = 0.5[R_p(\eta_r(\gamma), n) + R_s(\eta_r(\gamma), n)], \quad (6)$$

$$T(\eta_t(\gamma), n) = 0.5[T_p(\eta_t(\gamma), n) + T_s(\eta_t(\gamma), n)], \quad (7)$$

где индексы p и s соответствуют поляризации света, параллельной и перпендикулярной плоскости падения. Зависимости коэффициентов Френеля от угла падения приведены в Приложении. Зависимости плотности вероятности $p(\gamma)$ для двух значений относительного показателя преломления ($n = 2/3$ и $3/2$) показаны на рис.3. Из сравнения кривых видно, что в случае $n = 2/3$ наблюдается более резкое возрастание кривой при $\gamma \rightarrow 0$ и одновременно более высокое плато при больших углах отклонения. Это связано с эффектом полного внутреннего отражения. По мере приближения γ к нулю обе кривые стремятся к бесконечности, в то же время интегралы $\int_0^\pi p(\gamma, n) d\gamma$ сходятся. Подставив выражения (6) и (7) в формулу (5), нетрудно убедиться в том, что для плотнос-

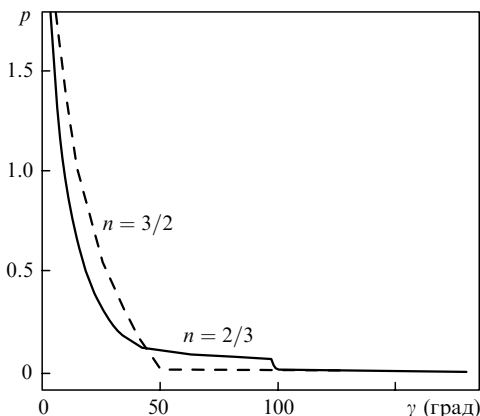


Рис.3. Плотность вероятности отклонения луча света на угол γ случайно ориентированной поверхностью раздела фаз.

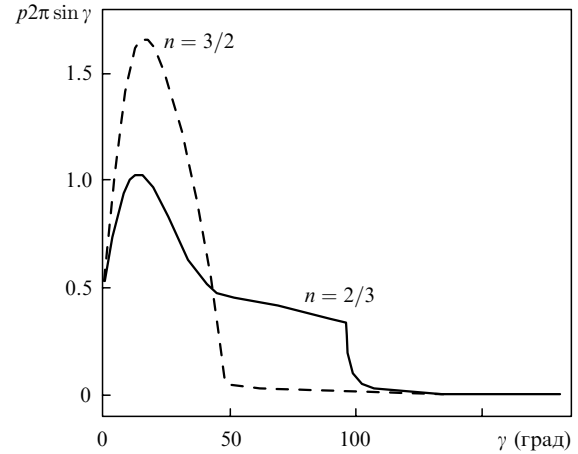


Рис.4. Плотность вероятности отклонения луча света на угол γ случайно ориентированной поверхностью раздела фаз, интегрированная по азимутальному углу.

тей вероятности $p(\gamma, n)$ независимо от значения n выполняется условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\gamma, n) \sin \gamma d\gamma d\varphi = 1. \quad (8)$$

Таким образом, плотность вероятности $p(\gamma, n)$ для двухфазной среды выполняет ту же роль, что и фазовая функция рассеяния для частиц.

Во многих случаях представляет интерес интегральная по φ плотность вероятности отклонения луча на заданный угол γ , т.е. функция $p(\gamma, n)2\pi \sin \gamma$. Ее поведение показано на рис.4 для тех же относительных показателей преломления, что и на рис.3 ($n = 2/3$ и $3/2$). Оно демонстрирует многие отличительные черты рассматриваемой фазовой функции рассеяния. Теперь при приближении угла отклонения γ к нулю обе кривые устремляются к конечному значению 0.5, а при $\gamma \neq 0$ у них есть максимумы. Существуют также два характерных угла отклонения, при которых функции $p(\gamma, n)2\pi \sin \gamma$ имеют изломы. Первый излом наблюдается при $\gamma \approx 48^\circ$, что соответствует максимальному углу отклонения при преломлении γ_t^{\max} , а второй происходит при $\gamma \approx 96^\circ$, что соответствует углу отклонения γ_c при критическом угле падения. Любопытно, что эти углы связаны соотношением $2\gamma_t^{\max} = \gamma_c$. Все отмеченные здесь особенности обусловлены исключительно физической природой многофазной рассеивающей среды и отсутствуют у других известных фазовых функций рассеяния.

4. Распространение света

4.1. Распределение света между фазами

При распространении света в двухфазной среде вероятности нахождения фотона в разных фазах не равны из-за так называемого волноводного эффекта. Он состоит в том, что часть фотонов, находящихся в среде с большим показателем преломления, будет испытывать полное внутреннее отражение при взаимодействии с поверхностью раздела фаз и вернется обратно. В то же время для фотонов, находящихся в среде с меньшим показателем преломления, подобный эффект отсутствует. Вероятность того, что фотон из среды с показателем пре-

ломления n_1 (фаза 1), перейдет в среду с показателем преломления n_2 (фаза 2),

$$T_{12} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p_t(\gamma, n_2/n_1) \sin \gamma d\gamma d\varphi,$$

где функция $p_t(\gamma, n)$ – второе слагаемое в правой части уравнения (5), отвечающее за преломление. Аналогично

$$T_{21} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p_t(\gamma, n_1/n_2) \sin \gamma d\gamma d\varphi.$$

Вероятность обнаружить стохастический фотон в фазе с показателем преломления n_1 есть

$$\chi\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \frac{T_{21}}{T_{12} + T_{21}}. \quad (9)$$

Зависимости $\chi(n)$ и $\chi(n^{-1})$ от относительного показателя преломления показаны на рис.5. Они количественно предсказывают более высокую вероятность обнаружить фотон в фазе с большим показателем преломления. Отметим, что даже незначительные различия в показателях преломления могут привести к существенным различиям в вероятностях нахождения фотонов в разных фазах среды. Отношение времен пребывания фотонов в фазах 1 и 2 можно оценить как $\chi(n)V_1^{1/3}n_1/[\chi(n^{-1})V_2^{1/3}n_2]$, где V_1 и V_2 – удельные объемы фаз 1 и 2. Здесь учтено различие скоростей света в средах. Плотность фотонов в фазе с показателем преломления n_1 пропорциональна вероятности $\chi(n_2/n_1)$ и обратно пропорциональна удельному объему этой фазы. Учет вероятностей пребывания фотонов в отдельных фазах случайно-неоднородной среды может оказаться весьма существенным во многих приложениях, например при решении задач переноса излучения или при флуоресцентных измерениях.

Принимая во внимание вероятности обнаружения фотона в отдельных фазах среды, можно обобщить выражения для фазовой функции рассеяния следующим образом:

$$p'(\gamma, n) = \chi(n)p(\gamma, n) + \chi(n^{-1})p(\gamma, n^{-1}). \quad (10)$$

В нее уже включена статистическая выборка фазы, и поэтому нет необходимости отслеживать, в какой кон-

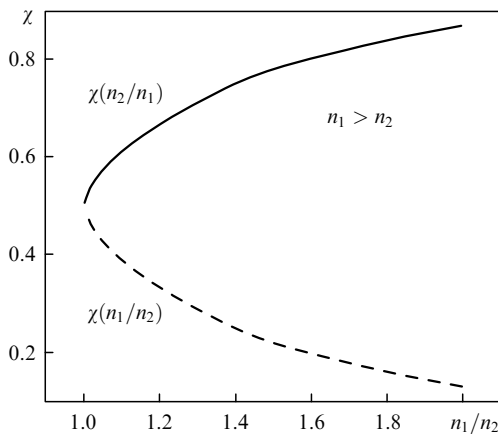


Рис.5. Вероятности нахождения фотонов в различных фазах неоднородной среды при взаимодействии их с поверхностью раздела фаз в зависимости от относительного показателя преломления.

кретной фазе среды находится фотон при определении углов отклонения луча света.

4.2. Коэффициент анизотропии

Знание фазовой функции рассеяния позволяет оценить коэффициент анизотропии, или, другими словами, средний косинус угла отклонения фотонов при распространении их в неоднородной среде:

$$g(n) \equiv \langle \cos \gamma \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p'(\gamma, n) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma d\varphi. \quad (11)$$

Этот коэффициент обычно используется как один из основных параметров, характеризующих рассеивающие свойства случайно-неоднородной среды. Обычно он вычисляется по данным эксперимента при моделировании распространения света в среде с использованием феноменологической фазовой функции Хеньи – Гринштейна. На рис.6 показано поведение коэффициента анизотропии в зависимости от относительного показателя преломления. Укажем, что при $n = 1.5/1.33$ коэффициент анизотропии g оказывается равным 0.933, а при $n = 1.5$ он составляет 0.721. Приведенные значения n выбраны не случайно, они часто используются разными авторами при моделировании распространения света в рассеивающих средах с помощью теории Ми. Величина $n = 1.5/1.33$ примерно соответствует отношению показателей прело-

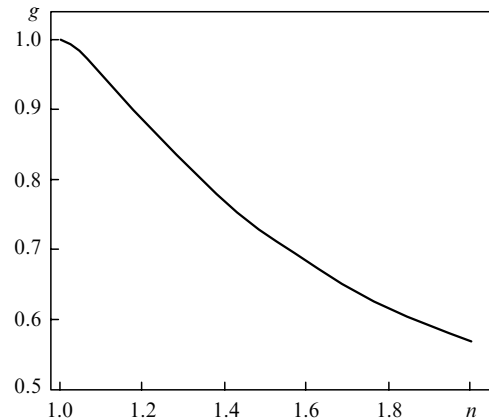


Рис.6. Коэффициент анизотропии $g(n)$, рассчитанный по формуле (11) при различных относительных показателях преломления n .

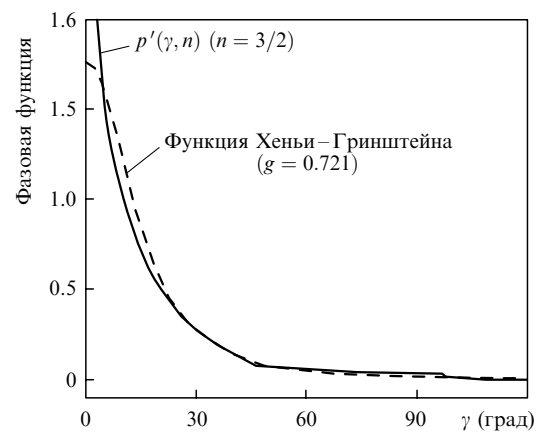


Рис.7. Сравнение функции $p'(\gamma, n)$ с фазовой функцией рассеяния Хеньи – Гринштейна при одинаковом значении g -фактора ($n = 3/2$, $g = 0.721$).

мления органических компонентов биологических тканей и воды в оптическом диапазоне. Интересно сравнить поведение функции $p'(\gamma, n)$ и фазовой функции Хеньи–Гринштейна при одинаковых коэффициентах анизотропии. На рис.7 приведена функция Хеньи–Гринштейна, рассчитанная при $g = 0.721$, и функция $p'(\gamma, n)$, вычисленная при $n = 1.5$. Обе кривые лежат очень близко друг к другу, что, в принципе, не удивительно, но может служить дополнительным аргументом в пользу предлагаемого альтернативного подхода. Его достоинствами, прежде всего, являются физический базис и возможность учета поляризации света, о чем пойдет речь в дальнейшем.

4.3. Выборка

Если известна плотность вероятности $p'(\gamma, n)$, то выборка угла отклонения не представляет сложности при современных вычислительных возможностях компьютеров. Для этого достаточно решить следующее уравнение относительно неизвестного параметра x :

$$2\pi \int_0^x p'(\gamma, n) \sin \gamma d\gamma = \text{RND}, \quad (12)$$

где RND – случайное число между 0 и 1 с однородной функцией распределения. Такая выборка может понадобиться при моделировании распространения света в среде с использованием предложенной фазовой функции методом Монте-Карло. Генерирование азимутального угла осуществляется просто: $\varphi = 2\pi \text{RND}$. Выборку свободного пути фотона L между актами рассеяния следует также выполнять по обычной схеме: $L = -\ln(\text{RND})/\mu_s$, где μ_s – коэффициент рассеяния.

5. Матрица рассеяния

Пусть луч света, падающий на случайно ориентированную поверхность раздела фаз, частично поляризован (рис.1) и имеет вектор Стокса I_i в лабораторной декартовой системе координат xuz . Определим вектор Стокса $I_s(\gamma, \varphi)$ для луча, отклоненного в направлении, задаваемом углами γ, φ , в виртуальной системе координат $x''y''z''$, у которой ось z'' направлена по отклоненному лучу, ось y'' лежит в плоскости падения, а ось x'' перпендикулярна плоскости падения. Введем вспомогательные виртуальные оси координат x' и y' , лежащие в плоскости xu и направленные соответственно перпендикулярно и параллельно плоскости падения луча на поверхность раздела фаз (см. рис.1). Поворот системы координат против часовой стрелки на угол $\pi/2 - \varphi$ даст первое преобразование вектора Стокса:

$$I'_i = K(\varphi)I_i, \quad (13)$$

где

$$K(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

– матрица преобразования при повороте осей координат.

При отклонении падающего луча на угол γ вектор Стокса изменяется с помощью соответствующих матриц Мюллера для отражения ($R(\eta_r(\gamma))$) и преломления ($T(\eta_t(\gamma))$) [36–38]:

$$R(\eta_r(\gamma)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_p r_p^* + r_s r_s^* & r_p r_p^* - r_s r_s^* & 0 & 0 \\ r_p r_p^* - r_s r_s^* & r_p r_p^* + r_s r_s^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\text{Re}(r_p^* r_s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\text{Re}(r_p^* r_s) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$T(\eta_t(\gamma)) = \frac{\text{Re}[n \cos(\eta_t(\gamma))]}{2 \cos \gamma} \times \begin{pmatrix} t_p t_p^* + t_s t_s^* & t_p t_p^* - t_s t_s^* & 0 & 0 \\ t_p t_p^* - t_s t_s^* & t_p t_p^* + t_s t_s^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\text{Re}(t_p^* t_s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\text{Re}(t_p^* t_s) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где r_s, r_p, t_s и t_p – соответствующие амплитудные коэффициенты Френеля, зависящие от угла отклонения γ через функции $\eta_r(\gamma)$ и $\eta_t(\gamma)$ (см. Приложение); звездочка обозначает комплексное сопряжение.

В нашем случае рассеянный в заданном направлении свет состоит из двух статистически независимых пучков, образующихся при отражении и преломлении падающего пучка света на случайно ориентированной границе раздела фаз. Поскольку компоненты вектора Стокса подчиняются принципу суперпозиции [36], то искомым вектор Стокса $I_s(\gamma, \varphi)$ равен сумме векторов Стокса отраженного и преломленного пучков. Учтем, что угловое распределение интенсивности рассеянного светового пучка и плотность вероятности углов отклонения с точностью до множителя равны. Следовательно, в матричной форме уравнение для вектора Стокса $I_s(\gamma, \varphi)$ должно иметь тот же вид, что и уравнение (5) для плотности вероятности угла отклонения, но вместо коэффициентов Френеля необходимо подставить соответствующие матрицы Мюллера $R(\eta_r(\gamma))$ и $T(\eta_t(\gamma))$:

$$I_s(\gamma, \varphi) = [Q_r(\gamma)R(\eta_r(\gamma)) + Q_t(\gamma)T(\eta_t(\gamma))]K(\varphi)I_i. \quad (17)$$

Здесь для удобства введены функции $Q_r(\gamma)$ и $Q_t(\gamma)$, которые являются сомножителями коэффициентов Френеля в уравнении (5). В (17) входит также фазовая матрица случайно ориентированной границы раздела фаз

$$Z(\gamma, \varphi) = [Q_r(\gamma)R(\eta_r(\gamma)) + Q_t(\gamma)T(\eta_t(\gamma))]K(\varphi). \quad (18)$$

Первый элемент этой матрицы (Z_{11}) представляет собой фазовую функцию рассеяния [29], и нетрудно убедиться в том, что он совпадает с выражением для $p(\gamma, n)$ (см. уравнение (5)). Для несферических частиц фазовая матрица выражается обычно через амплитудную матрицу, которая связывает амплитуды электрических компонент падающей плоской волны с амплитудами электрических компонент рассеянного света [30]. Для случайно ориентированной поверхности раздела фаз такую процедуру, по-видимому, выполнить нельзя, поскольку отклоненный луч света является суперпозицией двух некогерентных поляризованных лучей, формирующихся при различных угловых положениях поверхности. В связи с этим для частично поляризованного света преобразовывать вектор Стокса предлагаемым методом представляется очень удобным.

6. Заключение

В настоящей работе формирование оптически неоднородной среды описано как статистический процесс ориентации нормали к границе раздела двух фаз по отношению к направлению луча света. Получено аналитическое выражение для плотности вероятности отклонения луча света в любой телесный угол, являющейся физическим аналогом фазовой функции рассеяния света частицами. Оно состоит из двух слагаемых, описывающих события отражения и преломления светового потока в заданном направлении случайно ориентированной поверхностью. Благодаря применению френелевских коэффициентов отражения и пропускания в качестве статистических весов случайного процесса различные потоки фотонов, взаимодействующих с поверхностями раздела фаз, являются независимыми. Это позволяет применять аддитивный подход при исследовании взаимодействия стохастических фотонов с границами раздела фаз.

В работе рассчитаны вероятности нахождения случайно блуждающего фотона в различных фазах среды, что позволило включить в статистический процесс наклона случайно ориентированной поверхности выбор фазы среды, из которой на эту поверхность падает свет, и обобщить выражение для плотности вероятности отклонения луча в заданном направлении. Сравнение полученной в настоящей работе фазовой функции с функцией Хеньи–Гринштейна показало, что при одинаковых коэффициентах анизотропии их поведение очень сходно, за исключением области малых углов отклонения, где предложенная модель предсказывает резкий пик.

Помимо физической основы несомненным достоинством данной модели является возможность рассчитывать распространение в неоднородной среде поляризованного света. Получено выражение для матрицы рассеяния, связывающей параметры векторов Стокса отклоненных лучей и падающего луча. Это позволяет отказаться от привлечения теории Ми при моделировании распространения поляризованного света в таких средах, как биологические ткани.

Автор признателен своим коллегам А.Ганджбаху (A.Gandjbakhche) и В.Черномордику за полезные дискуссии.

Данная работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 04-02-97203 и 04-02-16743).

Приложение. Формулы Френеля как функции угла отклонения

Напомним выражения для амплитудных коэффициентов Френеля для отраженной и прошедшей электромагнитных волн:

$$r_p(\theta_i) = \frac{\cos \theta_t - n \cos \theta_i}{\cos \theta_t + n \cos \theta_i}, \quad (\text{П1})$$

$$t_p(\theta_i) = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_t + n \cos \theta_i}, \quad (\text{П2})$$

$$r_s(\theta_i) = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t}, \quad (\text{П3})$$

$$t_s(\theta_i) = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t}, \quad (\text{П4})$$

где θ_i – угол падения на поверхность раздела двух сред; θ_t – угол преломления. Строго говоря, величина $\cos \theta_t$ является комплексной и может быть вычислена с помощью закона Снеллиуса [38]:

$$\cos \theta_t = \begin{cases} (1 - \sin^2 \theta_i/n^2)^{1/2} & \text{при } \sin \theta_i \leq n, \\ -i(\sin^2 \theta_i/n^2 - 1)^{1/2} & \text{при } \sin \theta_i > n \end{cases} \quad (\text{П5})$$

Выражение (П5) для $\cos(\theta_t)$ позволяет рассчитывать коэффициенты отражения и пропускания следующим образом:

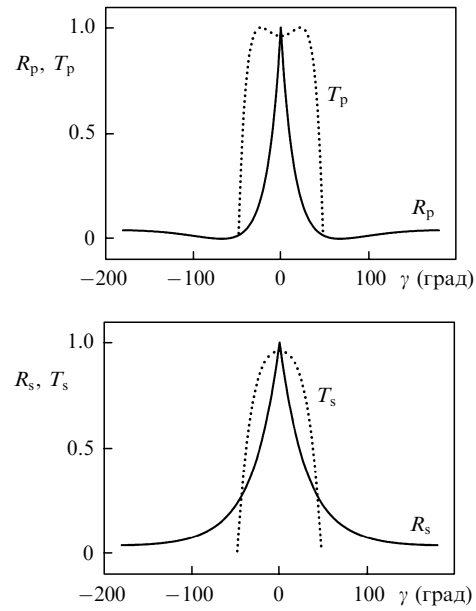


Рис.1П. Френелевские коэффициенты отражения ($R_{p,s}$) и пропускания ($T_{p,s}$) для границы раздела фаз с относительным показателем преломления $n = 3/2$ как функции угла отклонения при параллельной (R_p, T_p) и перпендикулярной (R_s, T_s) поляризациях по отношению к плоскости падения света.

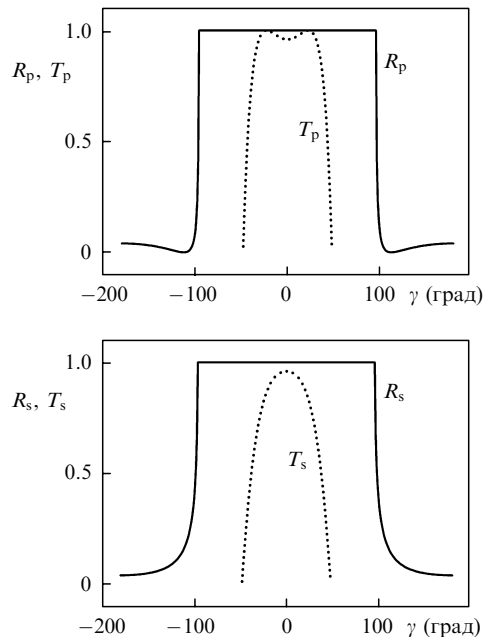


Рис.2П. То же, что и на рис.1П, для $n = 2/3$.

$$R_{p,s}(\theta_i) = r_{p,s}(\theta_i)r_{p,s}^*(\theta_i), \quad (\text{П6})$$

$$T_{p,s}(\theta_i) = \text{Re} \left[t_{p,s}(\theta_i)t_{p,s}^*(\theta_i) \frac{n \cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right]. \quad (\text{П7})$$

Заменив угол падения θ_i функциями $\eta_r(\gamma)$ и $\eta_t(\gamma)$ в правых частях уравнений (П6) и (П7) соответственно, получим коэффициенты отражения и пропускания как функции угла отклонения. На рис. 1П и 2П показано их поведение при $n = 3/2$ и $2/3$. Необходимо помнить, что здесь события отражения и преломления происходят при разных углах отклонения.

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля* (М.: Наука, 1978).
2. Чернов Л.А. *Волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1975).
3. Ishimaru A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (New York: Acad. Press, 1978).
4. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980).
5. Tseng S.H., Greene J.H., Taflove A., Maitland D., Backman V., Walsh J.J.T. *Opt. Lett.*, **30**, 56 (2005).
6. Muinonen K., in *Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements and Applications*. Ed. by M.I.Mishchenko, J.W.Hovenier, L.D.Travis (San Diego: Acad. Press, 2000).
7. Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И. *УФН*, **102**, 3 (1970).
8. Bergman P.G. *Phys. Rev.*, **70**, 486 (1946).
9. Гольинский С.М., Гусев В.Д. *Радиотехника и электроника*, **21**, 630 (1976).
10. Гольинский С.М., Гусев В.Д. *Радиотехника и электроника*, **21**, 1303 (1976).
11. Денисов Н.Г. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **1** (5-6), 34 (1958).
12. Kamiuto K., Saiton S., Tokita Y. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **50**, 293 (1993).
13. Forster F.K., Kienle A., Michels R., Hibst R. *J. Biomed. Opt.*, **11**, 0240018 (2006).
14. West R.A., Doose L.R., Eibl A.M., Tomasko M.G., Mishchenko M.I. *J. Geophys. Res.*, **102**, 16871 (1997).
15. Flock S.T., Wilson B.C., Patterson M.S. *Med. Phys.*, **14**, 835 (1987).
16. Marchesini R., Bertoni A., Melloni S.A., Sichirollo A.E. *Appl. Opt.*, **26**, 2318 (1989).
17. Tuchin V.V. (Ed.) *Selected Papers on Tissue Optics: Applications in Medical Diagnostics and Therapy* (Bellingham: SPIE Optical Engineering Press, 1994).
18. Henyey L., Greenstein J. *Astrophys. J.*, **93**, 70 (1941).
19. Chao P.H., Roy R., Mauck R.L., Liu W., Valhmu W.B., Hung C.T. *J. Biomech. Eng.*, **122**, 261 (2000).
20. Kienle A., Forster F.K., Hibst R. *Opt. Lett.*, **26**, 1571 (2001).
21. Jacques S.L., Alter C.A., Prahl S.A. *Lasers Life Sci.*, **1**, 309 (1987).
22. Fried D., Glerna R.E., Featherstone J.D.B., Seka W. *Appl. Opt.*, **34**, 1278 (1995).
23. Remizovich V.S., Radkevich A.V. *Laser Phys.*, **7**, 952 (1997).
24. Lee S.C. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 2183 (1990).
25. Cornette W.M., Shanks J.G. *Appl. Opt.*, **31**, 3152 (1992).
26. Xu L., Zhang G., Ding J., Chen H. *Optik*, **106**, 103 (1997).
27. Iaquina J., Isaka H., Personne P. *J. Atmospher. Sci.*, **52**, 1401 (1995).
28. Cai Q., Liou K.-N. *Appl. Opt.*, **21**, 3569 (1982).
29. Bohren C.F., Huffman D.R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983).
30. Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D. (Eds.) *Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements and Applications* (San Diego: Acad. Press, 2000).
31. Гершун А.А., Попов О.И. *Труды ГОИ*, **24**, 3 (1955).
32. Seminogov V.N., Semchishen V.A., Panchenko V.Ya., Seiler T., Mrochen M. *Laser Phys.*, **12**, 1333 (2002).
33. Priest R.G., Meier S.R. *Opt. Eng.*, **41**, 988 (2002).
34. Beckmann P., Spizzichino A. *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces* (Oxford: Pergamon Press, 1963).
35. Van de Hulst H.C. *Light Scattering by Small Particles* (New York: Dover Publ., Inc., 1981).
36. Brosseau C. *Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Approach* (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998).
37. Goldstein D. *Polarized Light: Fundamentals and Applications* (New York: Marcel Dekker, Inc., 2003).
38. Clarke D., Grainger J.F. *Polarized Light and Optical Measurements* (Oxford: Pergamon Press, 1971).