РЕЗОНАТОРЫ, МОДЫ

PACS 42.60.Da

Аналитический способ построения фундаментальной моды резонатора в виде гауссова пучка со сложным астигматизмом

А.Б.Плаченов, В.Н.Кудашов, А.М.Радин

Для резонатора, основная мода которого представляет собой гауссов пучок со сложным астигматизмом, получены явные формулы, позволяющие выразить характеристики пучка непосредственно в терминах лучевой матрицы, минуя процедуру нахождения её собственных векторов. Рассмотрен пример.

Ключевые слова*: гауссов пучок, астигматизм, фундаментальная мода резонатора.*

1. Распространение светового поля в резонаторах, в которых формируется гауссов пучок со сложным астигматизмом, неоднократно рассматривалось в литературе (см., напр., [1, 2]). В этом случае функция, описывающая поперечное распределение поля основной моды, имеет вид

$$u(r) = c\exp(\mathrm{i}kr^{\mathrm{t}}Hr/2),$$

где

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\; r^{\mathrm{t}} = (x\;\; y);\; H = \begin{pmatrix} 1/q_x & 1/q_{xy} \\ 1/q_{xy} & 1/q_y \end{pmatrix}$$

– матрица квадратичной формы. Матрица H симметрична, и для сосредоточенного в окрестности оси резонатора пучка она имеет положительно определённую мнимую часть. Эта матрица удовлетворяет матричному уравнению [2]

$$H = (C + DH)(A + BH)^{-1}, \tag{1}$$

где A, B, C, D – вещественные (для пассивного резонатора без потерь) матрицы размерности 2×2. В совокупности они составляют лучевую матрицу полного обхода резонатора (матрицу монодромии [1]) размерности 4×4

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Матрица T является симплектической [1, 2], что эквивалентно выполнению условия

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} D^{\mathrm{t}} & -B^{\mathrm{t}} \\ -C^{\mathrm{t}} & A^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Резонатор устойчив, если все собственные числа матрицы T по модулю равны единице и у них нет присоединённых векторов [1]. В этом случае уравнение (1) имеет симметричное решение с положительной мнимой частью. Традиционно такое решение конструируется с помощью компонент собственных векторов матрицы монодромии. В настоящей работе предлагается альтернативный способ решения уравнения (1), при котором матрица H выражается непосредственно через матрицы A, B, C, D. Искать собственные векторы матрицы T при этом не требуется.

Отметим, что предложенная схема применима, наряду с кольцевыми, и к линейным двухзеркальным резонаторам с эллиптическими (гиперболическими) зеркалами, а также (для трёхмерного многообразия) к рассмотренной в [1] задаче о гауссовом пучке, сосредоточенном в окрестности замкнутой геодезической.

2. Пусть матрица H – симметричное решение уравнения (1) с положительно определённой мнимой частью – связана с некоторой матрицей H' соотношением

$$H = (\tilde{C} + \tilde{D}H')(\tilde{A} + \tilde{B}H')^{-1}, \tag{3}$$

где $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ – блоки некоторой вещественной симплектической матрицы $\tilde{T}$. Тогда H' – также симметричная матрица с положительно определённой мнимой частью, и она, в свою очередь, удовлетворяет уравнению, аналогичному (1):

$$H' = (C' + D'H')(A' + B'H')^{-1}, \tag{4}$$

где A', B', C', D' – блоки симплектической матрицы T', связанной с матрицей T преобразованием подобия:

$$T' = \tilde{T}^{-1}T\tilde{T}. \tag{5}$$

В дальнейшем стратегия решения уравнения (1) состоит в подборе последовательности преобразований вида (5), сводящих общий случай к матрицам T' специального вида, для которых уравнения (4) могут быть решены непосредственно. Блок-схема алгоритма построения решения приведена на рис.1. Этот алгоритм может быть использован как для аналитического, так и для численного решения задачи.

А.Б.Плаченов. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет), Россия, 117454 Москва, просп. Вернадского, 78
В.Н.Кудашов, А.М.Радин. Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, Россия, 191002 Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9; e-mail:amradin@mail.ru

Поступила в редакцию 21 ноября 2005 г., после доработки – 7 сентября 2006 г.

3. Характеристический многочлен симплектической матрицы является возвратным: если λ – собственное значение T, то и λ^{-1} – также собственное значение этой матрицы. Тогда

$$v = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}$$

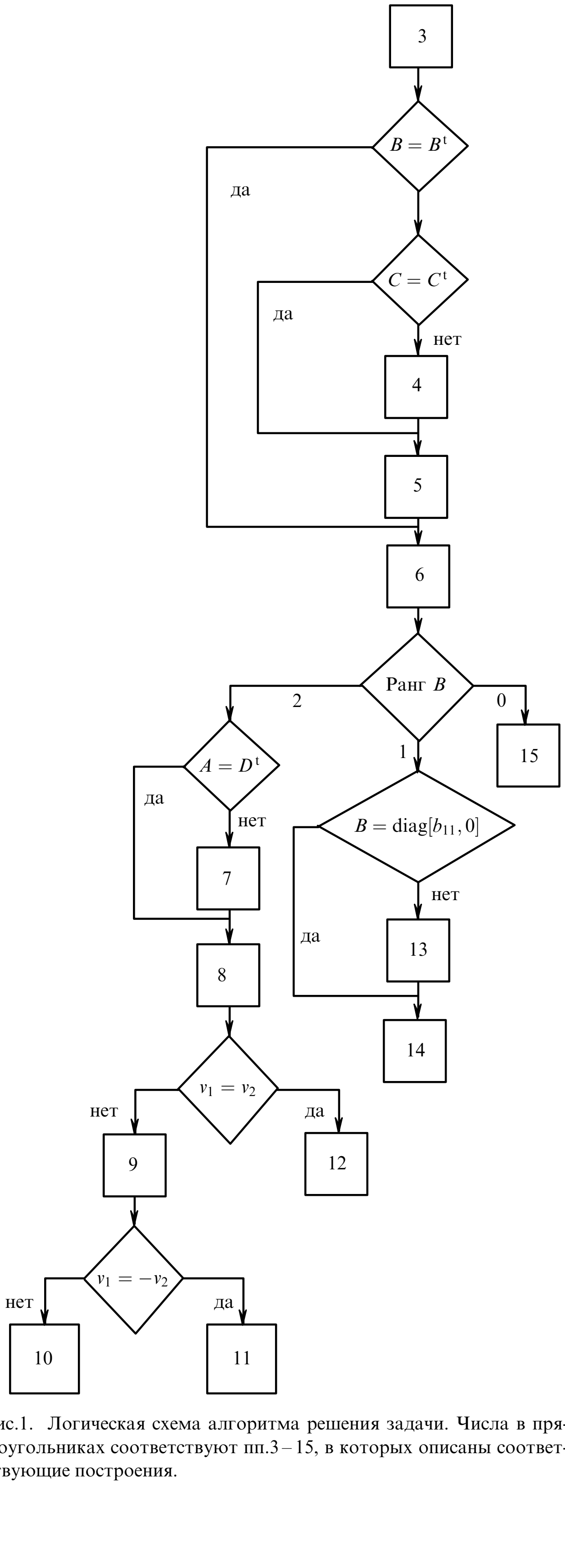

Рис.1. Логическая схема алгоритма решения задачи. Числа в прямоугольниках соответствуют пп.3 – 15, в которых описаны соответствующие построения.

является собственным значением матрицы

$$\Xi = \frac{1}{2}(T + T^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + D^{\mathrm{t}} & B - B^{\mathrm{t}} \\ C - C^{\mathrm{t}} & D + A^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

и удовлетворяет уравнению

$$v^2 + pv + q = 0\,, \tag{7}$$

где

$$p = -\frac{\mathrm{tr}(A + D^{\mathrm{t}})}{2};$$

$$q = \frac{\det(A + D^{\mathrm{t}}) + (b_{12} - b_{21})(c_{12} - c_{21})}{4}.$$

Корни уравнения (7) представим в виде $v_{1,2} = \cos\theta_{1,2}$, где $\theta_{1,2}$ – некоторые числа; тогда собственные числа матрицы T представляются в виде $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_j}$, $j = 1, 2$. Эти числа по модулю равны единице, если оба корня уравнения (7) вещественны и по абсолютной величине не превышают единицы, тогда значения $\theta_{1,2}$ оказываются вещественными.

При совпадении значений v_1 и v_2 ($v_1 = v_2 = v$) собственные числа оказываются кратными, и для проверки устойчивости следует убедиться в отсутствии у матрицы T присоединённых векторов. При $v = \pm 1$ кратность собственного числа равна четырём. В этом случае матрица T, если у неё нет присоединённых векторов, очевидно, совпадает с $\pm E_4$ (E_4 – единичная матрица 4×4). В случае $v \neq \pm 1$ собственные числа матрицы T вырождены двукратно, но для матрицы Ξ (6) значение v – четырёхкратное собственное число, так что для устойчивости в этом случае необходимо (а можно показать, что и достаточно) выполнение соотношения $\Xi = vE_4$. Это значит, что B и C симметричны, а матрица

$$G = \frac{A + D^{\mathrm{t}}}{2} \tag{8}$$

с точностью до множителя v совпадает с E – единичной матрицей 2×2: $G = vE$. Другой случай кратных собственных чисел T, когда одно или оба значения v_j обращаются в ± 1, но не совпадают между собой, более сложен и требует специального рассмотрения.

Отметим, что если матрица B или C оказывается симметричной, то задача решения уравнения (1) существенно упрощается. В частности, корни уравнения (7) совпадают с собственными числами матрицы G (8). Собственные векторы G в этом случае, очевидно, можно выбрать вещественными.

4. Рассмотрим общий случай, когда $B \neq B^{\mathrm{t}}$, $C \neq C^{\mathrm{t}}$ (в противном случае переходим к п.6 или п.5 соответственно). Упрощение уравнения (1) мы начинаем с симметризации блока C. Матрицу $\tilde{T}$ ищем в специальном виде

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} E & O \\ z\Phi & E \end{pmatrix},$$

где $\Phi = \Phi^{\mathrm{t}}$ – некоторая симметричная вещественная матрица 2×2; O – нулевая матрица той же размерности; z – вещественный множитель, подлежащий определению. Тогда

$$T' = \begin{pmatrix} A + zB\Phi & B \\ C + z(D\Phi - \Phi A) - z^2\Phi B\Phi & D - z\Phi B \end{pmatrix},$$

и

$$H = H' + z\Phi. \qquad (9)$$

Условие симметричности матрицы

$$C' = C + z(D\Phi - \Phi A) - z^2\Phi B\Phi$$

порождает уравнение относительно z:

$$(c_{12} - c_{21}) + [-(a_{12} + d_{21})\phi_{11} + (a_{11} - a_{22} + d_{11} - d_{22})\phi_{12}$$

$$+ (a_{21} + d_{12})\phi_{22}]z - (b_{12} - b_{21})(\det\Phi)z^2 = 0;$$

выбор матрицы Φ должен обеспечить его разрешимость. В частности, при совпадении знаков $\det\Phi$ и $(b_{12} - b_{21}) \times (c_{12} - c_{21})$ дискриминант этого уравнения будет заведомо положительным, а корни – вещественными. Каждый из этих корней позволяет при помощи замены (9) перейти к уравнению (4) с симметричным блоком C'. Например, в случае $(b_{12} - b_{21})(c_{12} - c_{21}) > 0$ можно положить $\Phi = E$, а если $(b_{12} - b_{21})(c_{12} - c_{21}) < 0$, то

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представляет также интерес случай, когда Φ – вырожденная симметричная матрица, имеющая с точностью до множителя вид

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & 1 - \cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

В этом случае уравнение относительно z оказывается линейным и имеет единственное решение, если коэффициент при z отличен от нуля. Выбором φ (в частности, $\varphi = 0$, $\pi/2$ или $\pi/4$) этого можно добиться всегда, за исключением случая

$$a_{21} + d_{12} = a_{12} + d_{21} = a_{11} - a_{22} + d_{11} - d_{22} = 0,$$

когда антисимметричная часть матрицы $A\Phi - \Phi D$ обращается в нуль для любой симметричной матрицы Φ, так что уравнение относительно z не содержит линейного слагаемого.

Выбор матрицы Φ – фактически единственный неформальный момент в настоящей работе, и от него существенно зависит уровень сложности и громоздкости последующих вычислений, особенно если решение ищется аналитически, а не численно. Однако на конечный результат он никак не повлияет, если только уравнение относительно z имеет вещественные корни.

5. Следующий шаг – преобразование матрицы с симметричным блоком C в матрицу с симметричным блоком B. Выбирая

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix},$$

получаем

$$T' = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix},$$

и

$$H = -(H')^{-1}.$$

Отметим, что для гауссова пучка такой переход соответствует преобразованию Фурье по поперечным координатам.

6. Мы свели задачу к частному случаю матрицы с симметричным блоком B (напомним, что матрица B связывает поперечную проекцию единичного вектора, направленного вдоль исходящего из начала координат приосевого луча, и радиус-вектор точки, через которую пройдёт этот луч после полного обхода резонатора). Условие симметричности матрицы B означает наличие у неё двух вещественных взаимно ортогональных собственных векторов. Отметим, что некоторые задачи могут обладать этим свойством изначально, в частности задача о линейном резонаторе с эллиптическими зеркалами, если матрицу монодромии рассматривать для сечения, примыкающего к одному из зеркал; направления собственных векторов B в этом случае совпадают с главными направлениями кривизны противолежащего зеркала S_2 (рис.2). Действительно, если поперечная проекция волнового вектора направлена вдоль одного из этих направлений, то и исходный, и однократно отражённый лучи будут оставаться в плоскости, образованной этим вектором и оптической осью, так что радиус-вектор точки пересечения отражённого луча с исходной плоскостью будет ему коллинеарен. Свойства другого зеркала (S_1) никак не влияют на матрицу B: отражение от него определит направление последующего распространения луча, но не скажется на положении рассматриваемой точки.

Наши дальнейшие действия зависят от ранга матрицы B. Рассмотрим сначала основной случай, когда матрица $B = B^{\rm t}$ – невырожденная (если $\det B = 0$, $B \neq O$, то перейдём к п.13, а при $B = O$ – к п.15). Ррешение для этого случая было получено в работе [3]. Сформулируем её результаты, несколько видоизменив ход решения в соответствии с применяемой в настоящей статье методикой.

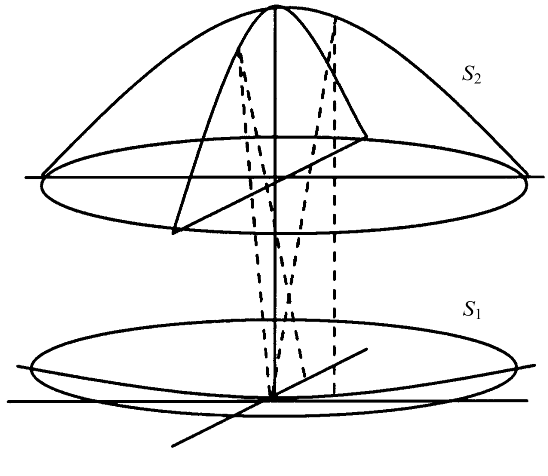

Рис.2. Двухзеркальный резонатор с эллиптическими зеркалами. Штриховыми линиями показаны лучи, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях. Каждая из таких плоскостей содержит оптическую ось и один из собственных векторов симметричной матрицы B.

7. Следующий шаг – переход к матрице, у которой блок D получается из A транспонированием (если $A = D^{\mathrm{t}}$ изначально, переходим к п.8). Рассмотрим симплектическую матрицу

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} E & O \\ (DB^{-1} - B^{-1}A)/2 & E \end{pmatrix}$$

и осуществим преобразование вида (5). Результирующая матрица будет иметь вид

$$T' = \begin{pmatrix} G & B \\ G^{\mathrm{t}}B^{-1}G - B^{-1} & G^{\mathrm{t}} \end{pmatrix},$$

матрица G будет определяться из соотношения (8), а выражение для C' – следовать из условия симплектичности (2) (отметим попутно, что блок C' оказывается симметричным). Матрицы H и H' – решения исходной и преобразованной задач – связаны преобразованием (3), которое в данном случае принимает вид

$$H = \frac{DB^{-1} - B^{-1}A}{2} + H'.$$

Забегая вперёд, отметим, что, за исключением одного особого случая, выделенное нами слагаемое $\tilde{C}$ совпадает с $\mathrm{Re}H$ – вещественной частью матрицы H, определяющей форму волнового фронта. Соответственно матрица H' оказывается чисто мнимой и отвечает за убывание поля при удалении от оси резонатора.

8. Приступим теперь к решению задачи для случая, когда $B = B^{\mathrm{t}}$ – невырожденная симметричная матрица и $A = D^{\mathrm{t}} = G$, причём $|v_{1,2}| \leqslant 1$ (в дальнейшем мы покажем, что в данном случае должно выполняться строгое неравенство). Тогда

$$T = \begin{pmatrix} G & B \\ G^{\mathrm{t}}B^{-1}G - B^{-1} & G^{\mathrm{t}} \end{pmatrix},$$

и уравнение (1) принимает вид

$$HBH + HG - G^{\mathrm{t}}H - G^{t}B^{-1}G + B^{-1} = O. \tag{11}$$

Уравнение (11) порождает два уравнения для симметричной и антисимметричной частей,

$$HBH - G^{\mathrm{t}}B^{-1}G + B^{-1} = O, \quad HG - G^{\mathrm{t}}H = O,$$

которые после домножения слева на B с учётом условий симплектичности (2) принимают вид

$$(BH)^2 - G^2 + E = O, \tag{12}$$

$$BHG - GBH = O. \tag{13}$$

Из уравнения (12) явствует, что при обращении одного или обоих собственных чисел матрицы G в ± 1 матрица $(BH)^2$, а следовательно, и H, оказывается вырожденной. Поэтому в данном случае для устойчивости резонатора необходимо, чтобы оба значения $v_{1,2}$ были по модулю строго меньше единицы (в отличие от случая вырожденной матрицы B, который будет рассмотрен ниже).

9. Решение системы уравнений (12), (13) начнём со случая, когда $G \neq vE$, $v_1 \neq v_2$ (в противном случае переходим к п.12). Тогда из (13) следует, что матрицы BH и G коммутируют, а значит, BH обладает теми же собственными векторами, что и G, и представляется в виде линейной комбинации G и единичной матрицы, а матрица H – в виде линейной комбинации $B^{-1}G$ и B^{-1}. Наша задача, таким образом, заключается в отыскании коэффициентов этой линейной комбинации.

10. Предположим также, что $\mathrm{tr}G \neq 0$, $v_1 \neq -v_2$ (иначе см. п.11) и $G^2 \neq v^2E$; тогда из (12) следует, что $\mathrm{tr}(BH) \neq 0$. Кроме того, из этого же уравнения следует, что $-(BH)^2$ есть матрица с положительными собственными числами, равными $1 - v_{1,2}^2$. С учётом того, что её собственные векторы являются вещественными, BH – чисто мнимая матрица и, следовательно,

$$H = \mathrm{i}|H|,$$

где $|H|$ – положительно определённая вещественная матрица. Уравнение (12) принимает вид

$$(B|H|)^2 = E - G^2. \tag{14}$$

Это, между прочим, означает, что если уравнение (1) имеет вид (11) изначально, а не приведено к нему преобразованиями подобия, то при $v_1 \neq \pm v_2$ оно характеризует поперечное распределение поля в сечении, где гауссов пучок имеет перетяжку и волновой фронт является плоским.

Воспользовавшись тем, что произвольная матрица M размерности 2×2 удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$M^2 - \mathrm{tr}M \times M + \det M \times E = O, \tag{15}$$

получим, применив (15) к матрицам $B|H|$ и G в уравнении (14),

$$\mathrm{tr}(B|H|) \times B|H| = (\det(B|H|) + \det G + 1)E - \mathrm{tr}G \times G, \tag{16}$$

и поскольку в рассматриваемом случае $\mathrm{tr}(BH) \neq 0$, для получения искомого выражения для $|H|$ нам останется найти $\det(B|H|)$ и $\mathrm{tr}(B|H|)$.

Найдём определители матриц, стоящих в левой и правой частях уравнения (14):

$$\det{}^2(B|H|) = \det(E - G^2) = (1 + \det G)^2 - \mathrm{tr}^2 G;$$

тогда

$$\det(B|H|) = [\det(E - G^2)]^{1/2} \mathrm{sign}\det B.$$

Вычислим теперь след (16):

$$\mathrm{tr}^2(B|H|) = 2(\det(B|H|) + \det G + 1) - \mathrm{tr}^2 G,$$

откуда

$$|\mathrm{tr}(B|H|)| = \{2[\det(B|H|) + \det G + 1] - \mathrm{tr}^2 G\}^{1/2}.$$

Тогда для матрицы H мы получим следующее окончательное выражение:

$$H = \frac{\mathrm{i}}{|\mathrm{tr}(B|H|)|}\hat{H}\,\mathrm{sign}\,\mathrm{tr}\hat{H},$$

где

$$\hat{H} = [\det(B|H|) + \det G + 1] \times B^{-1} - \mathrm{tr}G \times B^{-1}G.$$

11. Рассмотрим теперь частный случай, когда G – бесследовая матрица: $v_1 = -v_2 = v = \sqrt{-\det G}$, $\mathrm{tr}G = 0$. Тогда

$$G^2 = v^2E = -\det G \times E$$

и уравнение (12) переходит в

$$-(BH)^2 = (1 - v^2)E. \quad (17)$$

Сделаем замену

$$H = \mathrm{i}h\sqrt{1 - v^2}, \quad (18)$$

где h – симметричная матрица с положительно определённой вещественной частью, и тогда (12) превратится в

$$(Bh)^2 = E. \quad (19)$$

Из уравнения (19) вытекает, что собственные числа матрицы Bh равны ± 1, причём в случае совпадения собственных чисел присоединённых векторов быть не должно. Это значит, что Bh либо совпадает с $\pm E$, либо является бесследовой матрицей с определителем, равным -1. При решении вопроса о том, какая из указанных возможностей реализуется, принципиальное значение имеет знак $\det B$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть матрица B знакоопределена, $\det B > 0$. Матрица $\mathrm{Re}h$ положительно определена, $\det \mathrm{Re}\, h > 0$ и, следовательно, $\det \mathrm{Re}(Bh) > 0$. Тогда знаки собственных чисел $\mathrm{Re}(Bh)$ совпадают, и $\mathrm{tr}\mathrm{Re}(Bh) \neq 0$, т. е. Bh не является бесследовой матрицей. В этом случае

$$Bh = \pm E,$$
и
$$h = \pm B^{-1} \quad (20)$$

является чисто вещественной матрицей, знак которой выбирается из условия её положительной определённости и совпадает со знаком $\mathrm{tr}B$. Для матрицы H окончательно имеем:

$$H = \mathrm{i}\sqrt{1 - v^2}B^{-1}\mathrm{sign}\,\mathrm{tr}B. \quad (21)$$

2. Пусть теперь матрица B не знакоопределена, $\det B < 0$. Тогда (20) – уже не искомое решением, поскольку также не является знакоопределённой матрицей. Поэтому в данном случае Bh – матрица с собственными числами $+1$ и -1, нулевым следом и определителем, равным -1. Поскольку согласно (13) эта матрица коммутирует с G, она должна совпадать с G с точностью до множителя. Окончательное выражение для матрицы H имеет следующий вид:

$$H = \mathrm{i}\frac{\sqrt{1 - v^2}}{v}B^{-1}G\,\mathrm{sign}\,\mathrm{tr}(B^{-1}G).$$

В обоих случаях матрица H снова оказывается чисто мнимой.

12. Рассмотрим теперь случай, когда $v = v_1 = v_2$. При этом, как было указано выше, условием устойчивости резонатора является равенство $G = vE$. Тогда уравнение (13) выполняется автоматически, а (12) снова принимает вид (17). Следуя п.11, мы опять приходим к формуле (21) для $\det B > 0$, а в случае $\det B < 0$ по-прежнему Bh оказывается матрицей с нулевым следом и определителем, равным -1. Однако теперь уже никакой дополнительной информацией о виде этой матрицы мы не обладаем, и решение такой задачи заведомо неоднозначно [4].

Для того чтобы описать семейство соответствующих матриц, представим B в виде линейной комбинации единичной матрицы E и бесследовой матрицы σ с определителем, равным -1:

$$B = b_0E + b\sigma, \quad b_0 = \frac{\mathrm{tr}B}{2}, \quad b = (b_0^2 + d)^{1/2},$$

$$d = |\det B| = -\det B, \quad \sigma = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix},$$

где c, s – некоторые числа, $c^2 + s^2 = 1$. Рассмотрим также матрицу

$$\sigma' = \begin{pmatrix} s & -c \\ -c & -s \end{pmatrix}.$$

Тогда искомое семейство решений уравнения (19) имеет вид

$$h = \frac{(1 + \zeta^2)(bE - b_0\sigma) + 2\zeta\sqrt{d}\sigma'}{(1 - \zeta^2)d}, \quad (22)$$

где ζ – комплексный параметр. Матрица (22) имеет положительно определённую вещественную часть при $|\zeta| < 1$, соответственно матрица H (18) при тех же ζ имеет положительно определённую мнимую часть.

Простейшим примером резонатора, в котором реализуется такого рода неоднозначность решения, является рассмотренный в [4] трёхзеркальный резонатор с двумя плоскими и одним эллиптическим зеркалом, радиусы кривизны которого подобраны такими, чтобы обеспечить совпадение собственных чисел матрицы монодромии.

Рассмотрение случаев, для которых B – невырожденная симметричная матрица, на этом закончено.

13. Пусть теперь $B = B^{\mathrm{t}}$ – вырожденная симметричная ненулевая матрица. В этом случае её можно представить в виде

$$B = \mathrm{tr}B \times \Phi_{\varphi},$$

где Φ_{φ} – матрица вида (10), $\mathrm{tr}B \neq 0$, а $\varphi = \arctan(b_{12}/b_{11})$ (или $\varphi = \pi/2$ при $b_{12} = b_{11} = 0$).

Вырожденность матрицы B физически означает наличие в рассматриваемом сечении фокусировки геометрооптических лучей по одному из направлений. В частности, для упомянутой выше задачи о двухзеркальном резонаторе матрица B вырождена, если один из радиусов кривизны противолежащего зеркала равен расстоянию между зеркалами. В этом случае лучи, для которых поперечная проекция лучевого вектора параллельна соответствующему главному направлению кривизны, после отражения будут возвращаться в начало координат.

Диагонализуем матрицу B поворотом координатных осей на угол φ (мы предполагаем, что $\varphi \neq 0$, в противном случае переходим к п.14). Для этого рассмотрим симплектическую матрицу

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} U_{\varphi} & O \\ O & U_{\varphi} \end{pmatrix},$$

где

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{23}$$

– матрица поворота на угол φ, и осуществим преобразование вида (5). Результирующая матрица будет иметь вид

$$T' = \begin{pmatrix} U_{-\varphi}AU_\varphi & U_{-\varphi}BU_\varphi \\ U_{-\varphi}CU_\varphi & U_{-\varphi}DU_\varphi \end{pmatrix},$$

причём, как нетрудно убедиться,

$$B' = U_{-\varphi}BU_\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы H и H' – решения исходной и преобразованной задачи – связаны преобразованием (3), которое в данном случае принимает вид

$$H = U_\varphi H' U_{-\varphi}.$$

14. Задача с вырожденной ненулевой матрицей $B = B^{\mathrm{t}}$ сведена к случаю, когда у матрицы отличен от нуля единственный элемент – b_{11}. В этом случае из условия симплектичности T следует, в частности, что

$$a_{21} = d_{12} = 0, \quad a_{11}d_{11} - b_{11}c_{11} = a_{22}d_{22} = 1. \tag{24}$$

Матрица G (8) оказывается верхнетреугольной, так что корни уравнения (7) совпадают с её диагональными элементами, т. е. $v_i = (a_{ii} + d_{ii})/2$, $i = 1, 2$. Кроме того, из структуры матрицы T, следующей из (24), вытекает, что элементы a_{22} и d_{22} являются её собственными числами, а другие два собственных числа T суть собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ c_{11} & d_{11} \end{pmatrix}.$$

Сформулируем условия, обеспечивающие устойчивость резонатора. Прежде всего значения a_{22} и d_{22} должны быть равны ± 1 и совпадать между собой: $a_{22} = d_{22} = v_2 = \pm 1$ (в отличие от случая невырожденной матрицы $B = B^{\mathrm{t}}$). Таким образом, одно из собственных чисел T двукратно вырождено. Условие отсутствия присоединённых векторов имеет вид

$$2(v_1 - v_2)c_{22} = a_{12}c_{21} + d_{21}c_{12}.$$

В то же время значение $v_1 = \cos\theta$ должно быть по модулю строго меньше единицы, поскольку при обращении собственных чисел в ± 1 ненулевое значение b_{11} приводит к появлению присоединённых векторов. (Отметим, что для двухзеркального резонатора из условий устойчивости, в частности, следует, что для второго зеркала один из главных радиусов кривизны также должен быть равным расстоянию между зеркалами.)

Пусть условия устойчивости выполнены. Переписав матричное уравнение (1) в виде системы алгебраических уравнений относительно элементов матрицы H, можно обнаружить, что два из них суть квадратные уравнения (одно относительно h_{11}, а другое относительно $h_{12} = h_{21}$), а два других содержат оба этих элемента и позволяют линейно выразить один через другой. Система уравнений совместна при выполнении условий симплектичности и устойчивости и имеет два решения, различающиеся знаками мнимых частей. Выпишем одно из этих решений:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1}{b_{11}}\left(\frac{d_{11} - a_{11}}{2} + \mathrm{i}\sin\theta\right), \\ h_{12} &= \frac{1}{b_{11}}\left[\frac{d_{21} - a_{12}}{2} + \mathrm{i}\frac{a_{12} + d_{21}}{2(v_1 - v_2)}\sin\theta\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

В выражениях (25) знак θ выбираем совпадающим со знаком b_{11}, и тогда $\mathrm{Im}\, h_{11} > 0$, что необходимо для положительной определённости $\mathrm{Im}\, H$.

Уравнение (1) в рассматриваемом случае не накладывает никаких ограничений на h_{22}, так что формулы (25) при всевозможных значениях этого элемента определяют одно из двух семейств решений данного уравнения. При этом $\mathrm{Im}\, H$ положительно определена, если

$$\mathrm{Im}\, h_{22} > \frac{(a_{12} + d_{21})^2}{4(v_1 - v_2)^2}\sin\theta.$$

15. Нам осталось рассмотреть случай $B = B^{\mathrm{t}} = O$. Это случай, когда все лучи, выходящие из начала координат, после обхода резонатора фокусируются в ту же точку. В задаче о двухзеркальном резонаторе это соответствует ситуации, когда противолежащее зеркало является сферическим и его радиус равен расстоянию между зеркалами. Из условия симплектичности T следует, что $AD^{\mathrm{t}} = E$, $A^{\mathrm{t}}C = C^{\mathrm{t}}A$. Уравнение (1) принимает вид

$$HA - DH = C. \tag{26}$$

Собственные числа T в этом случае суть собственные числа матриц A и D и для устойчивой матрицы равны по модулю единице. Отсюда, в частности, следует, что определители этих матриц равны либо $+1$, либо -1. В первом случае собственные числа равны $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$, A и D – унимодулярные матрицы со следом $2\cos\theta$. Во втором – их собственные числа равны $+1$ и -1, а матрицы A, D – бесследовые. Рассмотрим эти ситуации отдельно.

В первом случае собственные числа вырождены четырёхкратно ($\theta = 0, \pi$) либо двукратно. При четырёхкратном вырождении для устойчивости необходимо выполнение условий $A = D = \pm E$, $C = O$, и тогда произвольная симметричная матрица H с положительно определённой мнимой частью будет удовлетворять уравнению (26). Именно эта ситуация реализуется в двухзеркальном резонаторе, причём второе зеркало также должно быть сферическим с тем же радиусом кривизны (конфокальный резонатор). Такой резонатор был рассмотрен в работе [5].

Пусть теперь $\theta \neq 0, \pi$. В этом случае из условия отсутствия присоединённых векторов, которое одновременно обеспечивает разрешимость уравнения (26), следует, что матрица C должна быть симметрична; с учётом симметричности $A^{\mathrm{t}}C$ отсюда следует, что либо $C = O$, либо $\det C < 0$. Решение системы линейных уравнений, к которой приводит (26), может быть с учётом условий симплектичности записано в следующем виде:

$$H = \frac{AC - CD}{(a_{11} - a_{22})^2 + 2(a_{12}^2 + a_{21}^2)} + \zeta \begin{pmatrix} -2a_{21} & a_{11} - a_{22} \\ a_{11} - a_{22} & 2a_{12} \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Формула (27) при всевозможных значениях комплексного параметра ζ определяет семейство решений уравнения (26). Мнимая часть H положительно определена, когда $\operatorname{Im}\zeta$ совпадает по знаку с $a_{12} - a_{21}$ (здесь эта величина в нуль не обращается).

Отметим, что поскольку в данном случае матрица C симметрична, рассмотренное в п.5 преобразование позволяет свести задачу к рассмотренной ранее (если только $C \neq O$).

Остановимся теперь на втором случае, когда определители матриц A и D равны -1. Собственные числа этих матриц равны ± 1, собственные числа матрицы T – также ± 1 и двукратно вырождены. В этом случае $D = A^{\mathrm{t}}$, а из условия отсутствия присоединённых векторов, обеспечивающего устойчивость резонатора и разрешимость (26), следует, что матрица C теперь должна быть уже антисимметрична. Решение уравнения (26) имеет вид

$$H = \frac{CA}{2} + \zeta_1(E + DA) + \zeta_2(A + D). \qquad (28)$$

Формула (28) при всевозможных значениях комплексных параметров ζ_1 и ζ_2 определяет двухпараметрическое семейство решений уравнения (26). Мнимая часть H положительно определена, когда $\operatorname{Im}\zeta_1 > |\operatorname{Im}\zeta_2| \geqslant 0$.

16. Из предшествующего анализа вытекает, что для устойчивых матриц T с симметричным блоком B существует связь между его рангом и значениями собственных чисел T: для невырожденной матрицы B оба значения $|v_{1,2}|$ меньше единицы (а соответствующие значения $\theta \neq 0, \pi$); для вырожденной ненулевой матрицы одно из значений $|v|$ равно единице, а другое меньше нее; наконец, при $B = O$ либо $v_1 = v_2 = v \neq \pm 1$, либо $|v_{1,2}| = 1$. Из этого наблюдения также следует, что если изначально у нас есть устойчивая матрица T с несимметричным блоком B, то мы можем по значениям $v_{1,2}$, предугадать, каким будет ранг симметричной матрицы B' после преобразования (5), несмотря на то что такое преобразование заведомо не единственное. Неопределённость остаётся лишь в случае $v_1 = v_2 \neq \pm 1$, когда результирующая матрица B' оказывается либо невырожденной, либо нулевой. Разумеется, то же самое можно сказать и о ранге блока C при его симметризации.

Отметим также, что во всех случаях, преобразующихся в задачу с вырожденным симметричным блоком B, в частности каждый раз, когда хотя бы одно из значений v равно по модулю единице, решение задачи оказывается не единственным (при выполнении условий устойчивости). Семейство решений может также возникнуть и в случае невырожденного блока $B = B^{\mathrm{t}}$ при совпадении значений $v_{1,2}$ тогда, когда $\det B < 0$.

17. Проиллюстрируем описанные выше построения модельным примером. Рассматривается многозеркальный кольцевой резонатор с неплоским осевым контуром, обеспечивающий пространственный поворот изображения (см., напр., [2, 6]) на угол φ. Число зеркал считаем чётным, одно из них является сферическим (или эллиптическим), причём одно из главных направлений кривизны лежит в плоскости падения луча; остальные зеркала плоские. Длину осевого контура обозначим через L. Для изображённого на рис.3 контура, проходящего вдоль рёбер тетраэдра, угол φ равен сумме двугранных углов между гранями, пересекающимися по этим рёбрам. Распространение вдоль контура описывается матрицей

$$T_L = \begin{pmatrix} E & LE \\ O & E \end{pmatrix},$$

поворот на угол φ – матрицей

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} U_\varphi & O \\ O & U_\varphi \end{pmatrix},$$

где U_φ – матрица (23), а отражение от эллиптического зеркала – матрицей

$$T_{2\Psi} = \begin{pmatrix} E & O \\ -2\Psi & E \end{pmatrix},$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}; \quad \psi_1 = \frac{1}{R_1 \cos\alpha}; \quad \psi_2 = \frac{\cos\alpha}{R_2};$$

α – угол падения; $R_{1,2}$ – радиусы кривизны. Матрица монодромии для сечения, расположенного на расстоянии $L/2$ от зеркала, вычисляется по формуле

$$T = T_{\varphi/2} T_{L/2} T_{2\Psi} T_{L/2} T_{\varphi/2}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma U_\varphi + \delta I & \dfrac{L}{2}[(\gamma+1)U_\varphi + \delta I] \\ \dfrac{2}{L}[(\gamma-1)U_\varphi + \delta I] & \gamma U_\varphi + \delta I \end{pmatrix}, \qquad (29)$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{(\psi_1 + \psi_2)L}{2}; \quad \delta = \frac{(\psi_2 - \psi_1)L}{2}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Достаточные условия устойчивости матрицы T имеют вид

$$|\delta| < ||\gamma| - |\cos\varphi||, \ \delta^2 > (\gamma^2 - 1)\sin^2\varphi, \ |\gamma| < \frac{1}{|\cos\varphi|};$$

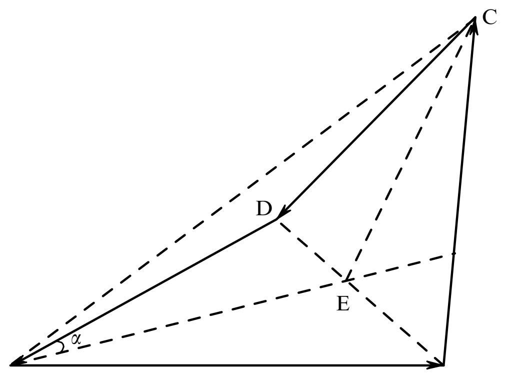

Рис.3. Схема лучевого контура резонатора. Стрелками показано направление обхода. Сферическое (эллиптическое) зеркало расположено в точке А.

для $\varphi = \pi/3$ множество (30) изображено на рис.4. Случаи, когда неравенства в (30) превращаются в равенства, отвечают появлению кратных собственных чисел и требуют отдельного рассмотрения. В настоящей статье мы не станем этого делать; авторы намерены посвятить полному исследованию этой задачи отдельную работу. Здесь же мы ограничимся лишь самым простым в техническом отношении случаем, когда $(b_{12} - b_{21})(c_{12} - c_{21}) > 0$, т. е. $|\gamma| > 1$. Будем также для определённости считать значения γ, δ, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ положительными.

Преобразование матрицы (29) начнём с необязательной, но полезной операции масштабирования, в результате которой вид её несколько упрощается. Пусть

$$\tilde{T}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{L}{2}}E & O \\ O & \sqrt{\dfrac{2}{L}}E \end{pmatrix}.$$

Тогда $T_0 = \tilde{T}_0^{-1} T \tilde{T}_0$ – матрица с блоками

$$A_0 = D_0 = \gamma U_\varphi + \delta I, \quad B_0 = A_0 + U_\varphi, \quad C_0 = A_0 - U_\varphi,$$

а

$$H = \frac{2}{L} H_0.$$

Следующий этап – симметризация блока C (см. п.4). Выбираем

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} E & O \\ zE & E \end{pmatrix};$$

значение z определяется из условии симметричности блока C матрицы $T_1 = \tilde{T}_1^{-1} T_0 \tilde{T}_1$. Данное условие приводит к соотношениям

$$z = \pm\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{1 + z^2}{1 - z^2};$$

при этом $H_0 = zE + H_1$. Выберем для определённости положительное значение z и выпишем блоки матрицы T_1:

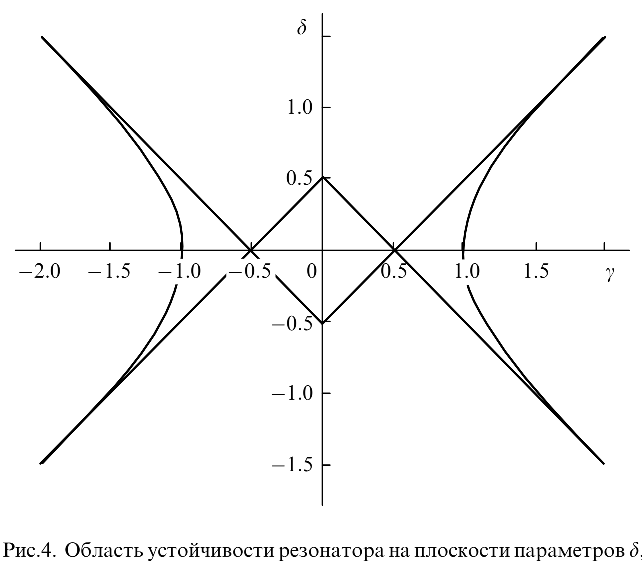

Рис.4. Область устойчивости резонатора на плоскости параметров δ, γ при $\varphi = \pi/3$ (квадрат и два криволинейных треугольника).

$$A_1 = (1 + z)\left(\frac{U_\varphi}{1 - z} + \delta I\right), \quad B_1 = \frac{2U_\varphi}{1 - z^2} + \delta I,$$

$$C_1 = (1 - z^2)\delta I, \quad D_1 = (1 - z)\left(\frac{U_\varphi}{1 + z} + \delta I\right).$$

Далее перейдём к матрице T_2, в которой симметричным является уже блок B: $A_2 = D_1$, $B_2 = -C_1$, $C_2 = -B_1$, $D_2 = A_1$; при этом $H_1 = -H_2^{-1}$ (см. п.5).

После этого, наконец, проделаем последнее преобразование из этой серии, перейдя к матрице T_3 с блоками $A_3 = G$, $D_3 = G^{\mathrm{t}}$, $B_3 = B_2$, $C_3 = G^{\mathrm{t}} B_2^{-1} G - B_2^{-1}$ (см. п.7), где

$$G = \frac{A_2 + D_2^{\mathrm{t}}}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\cos\varphi & (\gamma^2 - 1)^{1/2}\sin\varphi \\ -(\gamma^2 - 1)^{1/2}\sin\varphi & \gamma\cos\varphi \end{pmatrix} + \delta I;$$

$$B_2^{-1} = -\frac{\gamma + 1}{2\delta} I$$

(здесь удобно снова перейти от z к γ). При этом в матрице H_2 выделяется вещественная часть: $H_2 = \mathrm{Re}\, H_2 + H_3$, где

$$\mathrm{Re} H_2 = \frac{D_2 B_2^{-1} - B_2^{-1} A_2}{2} = -\frac{\gamma + 1}{2\delta}$$

$$\times \begin{pmatrix} (\gamma^2 - 1)^{1/2}\cos\varphi & \gamma\sin\varphi \\ \gamma\sin\varphi & -(\gamma^2 - 1)^{1/2}\cos\varphi \end{pmatrix} - \frac{(\gamma^2 - 1)^{1/2}}{2} E,$$

а H_3 – чисто мнимая матрица с положительной мнимой частью (см. п.10), удовлетворяющей уравнению (14).

Найдём H_3, воспользовавшись формулами п.10. Для этого выпишем значения нескольких вспомогательных величин и матриц:

$$B_3^{-1} G = -\frac{\gamma + 1}{2\delta} \begin{pmatrix} \gamma\cos\varphi & (\gamma^2 - 1)^{1/2}\sin\varphi \\ (\gamma^2 - 1)^{1/2}\sin\varphi & -\gamma\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\gamma + 1}{2} E,$$

$$\mathrm{tr} G = 2\gamma\cos\varphi,$$

$$\det G = \gamma^2 - \delta^2 - \sin^2\varphi,$$

$$\det(B_3|H_3|) = -|\det(B_3|H_3|)|$$

$$= -\{[(\gamma + \cos\varphi)^2 - \delta^2][(\gamma - \cos\varphi)^2 - \delta^2]\}^{1/2}$$

(знак перед корнем совпадает со знаком $\det B_3$),

$$|\mathrm{tr}(B_3|H_3|)| = \{2[2\gamma\cos\varphi(1 - \gamma\cos\varphi) + [(\gamma - \cos\varphi)^2 - \delta^2]$$

$$- \{[(\gamma + \cos\varphi)^2 - \delta^2][(\gamma - \cos\varphi)^2 - \delta^2]\}^{1/2}\}^{1/2}$$

$$= \{2\{\det{}^2(B_3|H_3|) + 4\gamma^2\cos^2\varphi[\delta^2 - (\gamma^2 - 1)\sin^2\varphi]\}^{1/2}$$

$$-|\det(B_3|H_3|)|\}^{1/2};$$

подкоренные выражения положительны в рассматриваемой области параметров. Матрица $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = (\gamma+1)\left\{\frac{|\det(B_3|H_3|)| + \delta^2 - \gamma^2 - \cos^2\varphi}{2\delta} I + \frac{\gamma\cos\varphi}{\delta}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix} \gamma\cos\varphi & (\gamma^2-1)^{1/2}\sin\varphi \\ (\gamma^2-1)^{1/2}\sin\varphi & -\gamma\cos\varphi \end{pmatrix} + \gamma\cos\varphi E\right\},$$

и, наконец,

$$H_3 = \frac{\mathrm{i}}{|\mathrm{tr}(B_3|H_3|)|}\hat{H};$$

знак в последней формуле положительный, поскольку $\mathrm{tr}\hat{H} = 2(\gamma+1)\gamma\cos\varphi > 0$.

Выражение для матрицы H – решения исходной задачи – в исследуемой области значений параметров имеет следующий вид:

$$H = \frac{2}{L}\left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2} E - (\mathrm{Re}\,H_2 + H_3)^{-1}\right].$$

Подставив в это выражение матрицы $\mathrm{Re}\,H_2$ и H_3, получим после достаточно громоздких преобразований (выкладки проводились с помощью компьютера)

$$H = \frac{1}{2L[(\gamma+1)(\gamma+\cos^2\varphi) - \delta^2]}$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{i}|\mathrm{tr}(B_3|H_3|)|}{\gamma}(wE + vI) + 2\sin\varphi v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right],$$

где

$$w = \frac{\gamma^2 + (1+2\gamma)\cos^2\varphi - \delta^2 - \det(B_3|H_3|)}{\cos\varphi};$$

$$v = \frac{(\gamma+1)[\gamma^2 - \cos^2\varphi + \det(B_3|H_3|)] - (\gamma-1)\delta^2}{\delta}.$$

Эта матрица является одним из четырёх симметричных решений уравнения (1). Очевидно, второе решение получается из неё комплексным сопряжением. Остальные два решения можно получить при другом выборе знака $\det(B_3|H_3|)$ (в том числе и в $|\mathrm{tr}(B_3|H_3|)|$); выполнение (1) проверяется непосредственно. Таким образом, решение, полученное для одной из подобластей множества (30), позволило найти все решения (1), и выбор нужного решения для других подобластей (30) определялся из условия положительной определённости диагональной матрицы $\mathrm{Im}H$, т.е. из условия положительности её элементов.

Отметим также без доказательства, что для точек $\delta = 0$ и $|\gamma| = |\cos\varphi| \neq 0$, разделяющих подобласти, задача сводится к рассмотренному в пп.13,14 случаю $\det B = 0$, $B = B^{\mathrm{t}} \neq O$, а для точки $\delta = \gamma = \cos\varphi = 0$ – к рассмотренному в п.15 случаю $B = O$, $\det A = \det D = -1$. Формулы для решений в этих случаях содержат один или два комплексных параметра соответственно.

18. В заключение подведём некоторые итоги. В настоящей работе предложен новый способ построения фундаментальной моды резонатора в виде гауссова пучка со сложным астигматизмом. В отличие от традиционного метода, в котором характеристики пучка выражаются через собственные векторы матрицы монодромии 4×4, в предлагаемой нами процедуре искать такие векторы не требуется. Другим достоинством метода является, на наш взгляд, то, что он позволяет получать явные аналитические формулы для пучка в терминах элементов исходной матрицы и, таким образом, дает возможность проследить зависимость его характеристик от параметров задачи. В то же время предложенный алгоритм может служить основой и для численных расчётов.

Предлагаемая нами процедура состоит в последовательном упрощении задачи с помощью преобразований подобия и в сведении её в конце концов к одному из базовых вариантов, допускающих явное решение – в ряде случаев в виде семейства функций. Для каждого из таких вариантов конкретизировано условие устойчивости. Установлено соответствие между этими вариантами и спектральными характеристиками исходной матрицы монодромии.

Возможности метода проиллюстрированы на модельном примере резонатора с неплоским контуром, осуществляющего пространственный поворот изображения.

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972).
2. Головнин И.В., Ковригин А.И., Коновалов А.Н., Лаптев Г.Д. *Квантовая электроника*, **22** (5), 461 (1995).
3. Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **88** (2), 127 (2000).
4. Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **88** (1), 130 (2000).
5. Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **24** (8), 736 (1997).
6. Кравцов Н.В., Наний О.Е. *Квантовая электроника*, **20** (4), 322 (1993).