PACS 42.65.Ky; 42.65.Yj; 42.65.Tg; 05.45.–a

Нелинейное уравнение Шредингера и многокомпонентные кноидальные волны в процессах параметрического преобразования частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Показано, что в приближении взаимодействия трех мод точное аналитическое решение задачи стационарного параметрического преобразования частоты, в том числе генерации второй гармоники и параметрического усиления в среде с квадратичной нелинейностью, сводится к решению трех независимых систем нелинейных уравнений. Каждая из этих систем состоит из двух нелинейных уравнений Шредингера, связана с остальными системами лишь граничными условиями и описывает многокомпонентную кноидальную волну, содержащую две неинтерферирующие составляющие. Правомерность перехода к такому представлению задачи обусловлена возможностью описания результата конкуренции двух одновременно протекающих на нелинейности второго порядка процессов – слияния и распада квантов – через эффективную каскадную кубическую нелинейность.

***Ключевые слова**: преобразование частоты, квадратичная нелинейность, каскадная кубическая нелинейность, нелинейное уравнение Шредингера, многокомпонентная кноидальная волна.*

1. Введение

Несмотря на множество публикаций, посвященных анализу многокомпонентных самосогласованных периодических решений нелинейных уравнений Шредингера (НУШ), Кортевега – де Вриза, sin-Гордона и др. [1 – 7], в лазерной физике такие решения пока рассматриваются как некая экзотика. Дело в том, что, хотя в оптике эти уравнения и имеют универсальный характер, поскольку учитывают низшие (кубические) члены в разложении нелинейной поляризации в волновом уравнении, принято считать, что решения такого типа – многокомпонентные кноидальные волны (МКВ) – важны для ограниченного круга задач. Это одномерные (1D) задачи солитоноподобного распространения цугов импульсов по оптическим волокнам [3 – 6, 8] и параметрической генерации цугов импульсов в режиме синхронной накачки [9] с учетом дисперсии, а также двух- и трехмерные (2D и 3D) задачи бездифракционного распространения пучков со специальной периодической поперечной структурой через фоторефрактивные кристаллы [7, 10] и кристаллы с квадратичной нелинейностью [11]. В то же время МКВ стали весьма популярными в других областях физики. Понятие МКВ широко используется в нелинейной гидродинамике [1, 12], физике плазмы [2, 13], при описании связанных волновых пакетов – квазичастиц (экситонов, биэкситонов, сверхпроводящих пар и т. д.), скомпонованных из электронных волновых функций, в физике 1D цепочек (сопряженные полимеры) [14] и 2D плоскостей (ферромагнетики и высокотемпературные сверхпроводники) [15].

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 30 октября 2006 г.

Ниже мы покажем, что решения НУШ в форме МКВ играют центральную роль в одной из классических задач нелинейной оптики – описании процессов параметрического преобразования частоты вверх и вниз, в том числе при генерации второй гармоники (ГВГ) и параметрическом усилении в нелинейных кристаллах (НЛК), т. е. средах, обладающих квадратичной нелинейностью [16].

2. Параметрическое преобразование и нелинейные уравнения Шредингера

Для простоты мы рассмотрим случай коллинеарного взаимодействия трех плоских монохроматических волн: двух – на основной частоте (амплитуды $A_{1,2}$, частоты $\omega_{1,2} = \omega$, волновые векторы $\boldsymbol{k}_{1,2}$) и одной – на частоте второй гармоники (амплитуда A_3, частота $\omega_3 = 2\omega$, волновой вектор $\boldsymbol{k}_3$), распространяющихся от плоскости $z = 0$ вдоль оси z в среде с квадратичной нелинейностью – в НЛК. Пренебрегая анизотропией и поглощением, будем считать, что НЛК занимает полупространство $z \geqslant 0$ и в нем реализован параметрический процесс так называемого типа II (oee-взаимодействие), который описывается хорошо известной системой уравнений для амплитуд трех связанных полей (мод) [16]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\mathrm{i}\beta A_2^* A_3 \exp(-\mathrm{i}\Delta z), \tag{1а}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = -\mathrm{i}\beta A_1^* A_3 \exp(-\mathrm{i}\Delta z), \tag{1б}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = -\mathrm{i}2\beta A_1 A_2 \exp(\mathrm{i}\Delta z). \tag{1в}$$

Здесь β – константа нелинейной связи; $\Delta = k_1 + k_2 - k_3$ – волновая расстройка. Система (1) имеет два интеграла движения:

$$I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) = I_{10} + I_{20} + I_{30}, \tag{2а}$$

$$I_1(z) - I_2(z) = I_{10} - I_{20}, \tag{2б}$$

где $I_i(z) = A_i(z)A_i^*(z)$ – переменная, пропорциональная плотности потока энергии i-й (здесь и далее $i = 1 - 3$) волны, которую ниже мы будем называть просто интенсивностью; $I_{i0} = I_i(z = 0)$. Первый интеграл описывает закон сохранения плотности потока энергии, а второй отражает так называемые соотношения Мэнли – Роу [16].

Используя (2), систему (1) можно свести к трем замкнутым нелинейным уравнениям, описывающим самосогласованные периодические решения для комплексных амплитуд $A_i(z)$ взаимодействующих в НЛК волн. Для этого, проведя замену переменных

$$A_j(z) = \tilde{A}_j(z)\exp(-\mathrm{i}\alpha_j z) \tag{3}$$

и выбрав константы α_{1-3} такими, чтобы

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \varDelta = 0, \tag{4}$$

перепишем систему (1) в виде

$$\frac{\partial\tilde{A}_1}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_1\tilde{A}_1 = -\mathrm{i}\beta\tilde{A}_2^*\tilde{A}_3, \tag{5а}$$

$$\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_2\tilde{A}_2 = -\mathrm{i}\beta\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3, \tag{5б}$$

$$\frac{\partial\tilde{A}_3}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_3\tilde{A}_3 = -\mathrm{i}2\beta\tilde{A}_1\tilde{A}_2. \tag{5в}$$

Затем после ряда несложных преобразований с учетом соотношения (2а) для амплитуды волны нелинейной поляризации $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$ на частоте ω_3 получим уравнение

$$\frac{\partial(\tilde{A}_1\tilde{A}_2)}{\partial z} = \mathrm{i}(\alpha_1 + \alpha_2)\tilde{A}_1\tilde{A}_2$$

$$- \mathrm{i}\beta(I_{10} + I_{20} + I_{30} - \tilde{A}_3\tilde{A}_3^*)\tilde{A}_3. \tag{6}$$

Продифференцировав теперь (5в) и подставив (6) в полученный результат, найдем выражение

$$\frac{\partial^2\tilde{A}_3}{\partial z^2} - \mathrm{i}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\frac{\partial\tilde{A}_3}{\partial z} + 2\beta^2$$

$$\times[I_{10} + I_{20} + I_{30} - (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 - \tilde{A}_3\tilde{A}_3^*]\tilde{A}_3 = 0. \tag{7}$$

Заметим, что второй член в (7) легко устраняется. Для этого с учетом произвольности выбора конкретных значений α_{1-3} (см. формулу (4)) надо положить, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varDelta/2, \tag{8а}$$

$$\alpha_3 = -\varDelta/2. \tag{8б}$$

После чего мы окончательно получим

$$\frac{\partial^2\tilde{A}_3}{\partial z^2} + 2\beta^2\Big(I_{10} + I_{20} + I_{30} + \frac{\varDelta^2}{8\beta^2} - \tilde{A}_3\tilde{A}_3^*\Big)\tilde{A}_3 = 0, \tag{9}$$

т. е. замкнутое уравнение для комплексной амплитуды $\tilde{A}_3$ в форме НУШ. Заметим, что поскольку (9) – уравнение второго порядка, нас будут интересовать только те его решения, которые удовлетворяют граничному условию

$$\left.\frac{\partial\tilde{A}_3}{\partial z}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}\frac{\varDelta}{2}\tilde{A}_{30} - \mathrm{i}2\beta\tilde{A}_{10}\tilde{A}_{20}, \tag{10}$$

следующему из уравнения (5в). Здесь $\tilde{A}_{i0} = \tilde{A}_i(z = 0)$.

Повторяя описанную выше схему последовательных действий, для амплитуды волны нелинейной поляризации $\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3$ на частоте ω_2 легко получить уравнение

$$\frac{\partial(\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3)}{\partial z} = -\mathrm{i}(\alpha_1 - \alpha_3)\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3$$

$$+ \mathrm{i}\beta(-2I_{10} + 4I_{20} + I_{30} - 4A_2A_2^*)\tilde{A}_2, \tag{11}$$

после чего, продифференцировав (5б) с учетом (11) и выбрав α_{1-3} такими, чтобы

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \varDelta/2, \tag{12а}$$

$$\alpha_2 = \varDelta/2, \tag{12б}$$

найдем аналогичное замкнутое нелинейное уравнение для амплитуды $\tilde{A}_2$ в форме НУШ:

$$\frac{\partial^2\tilde{A}_2}{\partial z^2} - \beta^2\Big(-2I_{10} + 4I_{20} + I_{30} - \frac{\varDelta^2}{4\beta^2} - 4A_2A_2^*\Big)\tilde{A}_2 = 0. \tag{13}$$

Как и в предыдущем случае, нас должны интересовать только те решения (13), которые удовлетворяют граничному условию

$$\left.\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \mathrm{i}\frac{\varDelta}{2}\tilde{A}_{20} - \mathrm{i}\beta\tilde{A}_{10}^*\tilde{A}_{30}, \tag{14}$$

следующему из уравнения (5б).

С учетом симметрии задачи замкнутое нелинейное уравнение для амплитуды $\tilde{A}_1$ в форме НУШ можно теперь получить простой перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Поэтому

$$\frac{\partial^2\tilde{A}_1}{\partial z^2} - \beta^2\Big(4I_{10} - 2I_{20} + I_{30} - \frac{\varDelta^2}{4\beta^2} - 4A_1A_1^*\Big)\tilde{A}_1 = 0 \tag{15}$$

при

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \varDelta/2, \tag{16а}$$

$$\alpha_1 = \varDelta/2 \tag{16б}$$

и граничном условии

$$\left.\frac{\partial\tilde{A}_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \mathrm{i}\frac{\varDelta}{2}\tilde{A}_{10} - \mathrm{i}\beta\tilde{A}_{20}^*\tilde{A}_{30}. \tag{17}$$

Возможность сведения системы (1) к трем замкнутым уравнениям в форме НУШ относительно комплексных амплитуд $\tilde{A}_{1-3}$, на первый взгляд, поразительна. Ведь хорошо известно, что периодические и апериодические решения НУШ – так называемые кноидальные волны и солитоны, выраженные через эллиптические функции Якоби $\mathrm{sn}\,\xi$, $\mathrm{cn}\,\xi$ и $\mathrm{dn}\,\xi$ [17] и гиперболические функции $\cosh\xi$ и

$\tanh \xi$ (где ξ – переменная, пропорциональная z), описывают самосогласованные решения множества задач в самых разных областях физики [3–6]. При этом возможность записи уравнений в форме НУШ обычно связывается с наличием в среде кубической нелинейности [3–6]. Однако никакого парадокса в этом нет, т. к., перейдя к замкнутым уравнениям (9), (13) и (15), мы, по сути, просто стали описывать результат конкуренции двух одновременно протекающих на нелинейности второго порядка процессов: слияния ($\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$) и распада ($\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$) квантов, через некую эффективную каскадную кубическую нелинейность [18].

Отметим также, что выписанные нами уравнения (9), (13) и (15) в форме НУШ все-таки связаны друг с другом граничными условиями (10), (14) и (17) и, что гораздо важнее, амплитуды полей $\tilde{A}_i$ в этих уравнениях в общем случае комплексны. Поэтому, в отличие от множества других нелинейных задач, описываемых НУШ, зависимости модулей и фаз амплитуд полей $\tilde{A}_i$ от координаты z в рассматриваемом нами случае могут иметь очень сложный характер. Из-за этого известные аналитические решения НУШ [16, 19], пропорциональные функциям Якоби $\mathrm{sn}\,\xi$, $\mathrm{cn}\,\xi$ и $\mathrm{dn}\,\xi$, не исчерпывают всех возможных решений исходной задачи (1), а определяют только те их ветви, для которых хотя бы у одной из взаимодействующих волн фаза амплитуды $\tilde{A}_i$ фиксирована, а фаза A_i в соответствии с (8б), (12б) или (16б) меняется линейно по мере распространения.

Для того чтобы обойти указанную проблему, мы можем разделить действительные и мнимые части амплитуд $\tilde{A}_i(z)$ всех трех взаимодействующих в НЛК волн, введя три пары действительных функций $\tilde{A}'_i(z)$ и $\tilde{A}''_i(z)$, таких, что

$$\tilde{A}_i(z) = \tilde{A}'_i(z) + \mathrm{i}\tilde{A}''_i(z). \tag{18}$$

Подставив теперь (18) в (9), (13) и (15) и в граничные условия (10), (14) и (17), получим три системы уравнений относительно действительных функций $\tilde{A}'_i(z)$ и $\tilde{A}''_i(z)$,

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}'_3}{\partial z^2} + 2\beta^2 \Big\{ I_{10} + I_{20} + I_{30} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - [(\tilde{A}'_3)^2 + (\tilde{A}''_3)^2] \Big\} \tilde{A}'_3 = 0, \tag{19а}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}''_3}{\partial z^2} + 2\beta^2 \Big\{ I_{10} + I_{20} + I_{30} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - [(\tilde{A}'_3)^2 + (\tilde{A}''_3)^2] \Big\} \tilde{A}''_3 = 0, \tag{19б}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}'_2}{\partial z^2} - \beta^2 \Big\{ -2I_{10} + 4I_{20} + I_{30} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - 4[(\tilde{A}'_2)^2 + (\tilde{A}''_2)^2] \Big\} \tilde{A}'_2 = 0, \tag{20а}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}''_2}{\partial z^2} - \beta^2 \Big\{ -2I_{10} + 4I_{20} + I_{30} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - 4[(\tilde{A}'_2)^2 + (\tilde{A}''_2)^2] \Big\} \tilde{A}''_2 = 0, \tag{20б}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}'_1}{\partial z^2} - \beta^2 \Big\{ 4I_{10} - 2I_{20} + I_{30} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - 4[(\tilde{A}'_1)^2 + (\tilde{A}''_1)^2] \Big\} \tilde{A}'_1 = 0, \tag{21а}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}''_1}{\partial z^2} - \beta^2 \Big\{ 4I_{10} - 2I_{20} + I_{30} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - 4[(\tilde{A}_1)^2 + (\tilde{A}''_1)^2] \Big\} \tilde{A}''_1 = 0, \tag{21б}$$

и соответствующие этим трем системам граничные условия

$$\tilde{A}'_{30} = \mathrm{Re} A_{30}, \tag{22а}$$

$$\tilde{A}''_{30} = \mathrm{Im} A_{30}, \tag{22б}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}'_3}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\Delta}{2}\tilde{A}''_{30} + 2\beta(\tilde{A}'_{10}\tilde{A}''_{20} + \tilde{A}''_{10}\tilde{A}'_{20}), \tag{22в}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}''_3}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\Delta}{2}\tilde{A}'_{30} - 2\beta(\tilde{A}'_{10}\tilde{A}'_{20} - \tilde{A}''_{10}\tilde{A}''_{20}), \tag{22г}$$

$$\tilde{A}'_{20} = \mathrm{Re} A_{20}, \tag{23а}$$

$$\tilde{A}''_{20} = \mathrm{Im} A_{20}, \tag{23б}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}'_2}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\Delta}{2}\tilde{A}''_{20} + \beta(\tilde{A}'_{10}\tilde{A}''_{30} - \tilde{A}''_{10}\tilde{A}'_{30}), \tag{23в}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}''_2}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\Delta}{2}\tilde{A}'_{20} - \beta(\tilde{A}'_{10}\tilde{A}'_{30} + \tilde{A}''_{10}\tilde{A}''_{30}), \tag{23г}$$

$$\tilde{A}'_{10} = \mathrm{Re} A_{10}, \tag{24а}$$

$$\tilde{A}''_{10} = \mathrm{Im} A_{10}, \tag{24б}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}'_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\Delta}{2}\tilde{A}''_{10} + \beta(\tilde{A}'_{20}\tilde{A}''_{30} - \tilde{A}''_{20}\tilde{A}'_{30}), \tag{24в}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}''_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\Delta}{2}\tilde{A}'_{10} - \beta(\tilde{A}'_{20}\tilde{A}'_{30} + \tilde{A}''_{20}\tilde{A}''_{30}). \tag{24г}$$

Легко убедиться в том, что каждая из выписанных нами систем (19), (20) и (21) по-прежнему замкнута (с точностью до ее граничных условий) и сформирована из пары связанных НУШ, описывающих двухкомпонентные кноидальные волны, составляющие которых $\tilde{A}'_i(z)$ и $\tilde{A}''_i(z)$ не интерферируют. Поскольку теперь обе эти составляющие действительны, дальнейшую схему построений самосогласованных периодических и апериодических аналитических решений для них приводить нет необходимости, т. к. данная схема аналогична подробно описанной нами в [10].

3. Особенности аналитических решений в форме МКВ

Заметим, что в тех ситуациях, когда нас не интересуют изменения фаз всех взаимодействующих волн по мере их распространения, т. е. все конкретные зависимости $\tilde{A}'_i(z)$ и $\tilde{A}''_i(z)$, достаточно получить аналитическое решение лишь для одной из систем уравнений (19), (20) или

(21). Зависимости интенсивностей двух оставшихся волн от z могут быть при этом найдены из интегралов (2). Например, решив систему уравнений (19), с учетом (2) можно сразу получить

$$I_1(z) = \frac{1}{2}\left\{2I_{10} + I_{30} - [\tilde{A}'_3(z)]^2 - [\tilde{A}''_3(z)]^2\right\}, \tag{25а}$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2}\left\{2I_{20} + I_{30} - [\tilde{A}'_3(z)]^2 - [\tilde{A}''_3(z)]^2\right\}, \tag{25б}$$

а решив системы (20) и (21), –

$$I_1(z) = I_{10} - I_{20} + [\tilde{A}'_2(z)]^2 + [\tilde{A}''_2(z)]^2, \tag{26а}$$

$$I_3(z) = 2I_{20} + I_{30} - 2\{[\tilde{A}'_2(z)]^2 + [\tilde{A}''_2(z)]^2\} \tag{26б}$$

и

$$I_2(z) = I_{20} - I_{10} + [\tilde{A}'_1(z)]^2 + [\tilde{A}''_1(z)]^2, \tag{27а}$$

$$I_3(z) = 2I_{10} + I_{30} - 2\{[\tilde{A}'_2(z)]^2 + [\tilde{A}''_2(z)]^2\} \tag{27б}$$

соответственно.

Отметим также, что, как было показано в [10], функциональный характер любого из решений систем (19), (20) и (21) ограничен фундаментальными решениями уравнения Ламэ первого и второго порядка [20], т. е. $\tilde{A}'_i(z)$ и $\tilde{A}''_i(z)$ обязаны быть пропорциональными одной из эллиптических функций $\mathrm{sn}\,\xi$, $\mathrm{cn}\,\xi$, $\mathrm{dn}\,\xi$, $\mathrm{dn}^2\xi + \gamma^{(2)}_{1,5}$, $\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,\xi$, $\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi$ и $\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi$ (здесь $\gamma^{(2)}_{1,5}$ – константы, см. [10]). В тех случаях, когда две составляющие МКВ ($\tilde{A}'_i(z)$ и $\tilde{A}''_i(z)$), полученные при решении какой-либо из выписанных выше систем (19), (20) или (21), пропорциональны одной и той же эллиптической функции, решение является вырожденным и сводится к МКВ так называемого манаковского типа [10]. При этом для одной из составляющих МКВ фаза амплитуды $\tilde{A}_i$ остается постоянной, а фаза A_i в соответствии с (8б), (12б) или (16б) меняется линейно по мере распространения. Заметим, что вследствие ортогональности фундаментальных решений уравнения Ламэ именно такой характер обязаны иметь МКВ, описывающие решения тех задач, в которых интенсивность любого из взаимодействующих в НЛК полей в некоторых точках оси z обращается в нуль.

Собственно, решения такого типа и приводятся обычно во всех публикациях, посвященных поиску точных аналитических решений рассматриваемой задачи [16, 19]. Если же это не так, то характер МКВ за счет граничных условий (22), (23) и (24) начинает меняться с изменением соотношения начальных (на входе в НЛК) фаз $\Delta\varphi_0 = \varphi_{10} + \varphi_{20} - \varphi_{30}$ комплексных амплитуд A_{i0} всех трех взаимодействующих волн. Это не удивительно, т. к. рассматриваемый процесс является когерентным и потому предельно чувствительным к фазам затравочных полей A_{i0} в тех случаях, когда они присутствуют на входе в НЛК (в плоскости $z = 0$). Решить в этом случае исходную задачу, используя традиционные подходы [16, 19], по-видимому, достаточно сложно, т. к. трудно себе представить, как должно выглядеть замкнутое уравнение, описывающее изменение фазы, которая определяется арктангенсом отношения двух разных эллиптических функций.

Отметим также, что характер решений системы (19), с одной стороны, и систем (20) и (21), с другой стороны, является принципиально разным, что определяет допустимый характер МКВ манаковского типа для волн A_3 и $A_{1,2}$ соответственно. Причина этого понятна из простой аналогии с задачей самовоздействия на так называемой керровской нелинейности, в рамках которой система (19) отвечает случаю распространения излучения через среду с нелинейностью дефокусирующего типа, в то время как ситемы (20) и (21) – случаю распространения через среду с нелинейностью фокусирующего типа (см., напр., [10]).

4. Примеры аналитических решений

В качестве примера реализации рассмотренного подхода проанализируем одно из известных простейших решений задачи (1), соответствующее МКВ манаковского типа и описывающее ГВГ в отсутствие на входе в НЛК волны с амплитудой A_3 на частоте $\omega_3 = 2\omega$ (т. е. при $I_{30} = 0$). С учетом этого сразу будем искать решение НУШ (9) в форме

$$\tilde{A}_3 = B_3 \mathrm{sn}\,(\gamma z). \tag{28}$$

После подстановки (28) в (9) немедленно получим два необходимых условия:

$$\gamma^2(1 + k^2) = 2\beta^2\left(I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right), \tag{29а}$$

$$\gamma^2 k^2 = \beta^2 B_3 B_3^*. \tag{29б}$$

Здесь k – модуль эллиптических функций $\mathrm{sn}\,\xi$, $\mathrm{cn}\,\xi$ и $\mathrm{dn}\,\xi$, значение которого должно лежать в интервале $1 \geqslant k \geqslant 0$.

При этом ситуации, когда $k \to 0$ и $k \to 1$, отвечают предельным случаям гармонических ($\mathrm{sn}\,(\gamma z) \to \sin(\gamma z)$, $\mathrm{cn}\,(\gamma z) \to \cos(\gamma z)$, $\mathrm{dn}\,(\gamma z) \to 1$) и апериодических ($\mathrm{sn}\,(\gamma z) \to \tanh(\gamma z)$, $\mathrm{cn}\,(\gamma z) \to 1/\cosh(\gamma z)$, $\mathrm{dn}\,(\gamma z) \to 1/\cosh(\gamma z)$) решений. Отсюда

$$\gamma^2 = \beta^2\left[2(I_{10} + I_{20}) + \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - B_3 B_3^*\right], \tag{30а}$$

$$k^2 = \frac{B_3 B_3^*}{2(I_{10} + I_{20}) + \Delta^2/(4\beta^2) - B_3 B_3^*}. \tag{30б}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $1 \geqslant k^2 \geqslant 0$ всегда, т. к. с учетом (2а) всегда выполнено очевидное соотношение

$$I_{10} + I_{20} \geqslant B_3 B_3^*. \tag{31}$$

При этом осцилляции $\tilde{A}_3(z)$ не могут быть гармоническими ($k = 0$), т. к. при $B_3 B_3^* = 0$ с учетом (25) мы получаем тривиальное решение

$$I_1(z) = I_{10}, \tag{32а}$$

$$I_2(z) = I_{20}, \tag{32б}$$

$$A_3(z) = A_{30} = 0, \tag{32в}$$

причем из (10) следует, что $A_{10} = 0$ или $A_{20} = 0$, т. е. хотя бы одно из полей на частоте ω в плоскости $z = 0$ также отсутствует. В то же время решение в форме (28) может быть апериодическим ($k = 1$), но только в тех случаях, когда перекачка энергии в моду на частоте ω_3 является полной ($I_{10} = I_{20}$, $B_3 B_3^* = 2I_{10}$), а процесс ГВГ – синхронным ($\Delta = 0$).

Амплитуда B_3 находится теперь из условия (10), которое с учетом (30а) сразу дает

$$(B_3 B_3^*)^2 - 2\left(I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right) B_3 B_3^* + 4I_{10} I_{20} = 0, \quad (33)$$

что и приводит нас к искомому результату

$$I_1(z) = I_{10} - \frac{1}{2}\left\{I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - \left[(I_{10} - I_{20})^2 + (I_{10} + I_{20})\frac{\Delta^2}{4\beta^2} + \left(\frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\mathrm{sn}^2(\gamma z), \quad (34а)$$

$$I_2(z) = I_{20} - \frac{1}{2}\left\{I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - \left[(I_{10} - I_{20})^2 + (I_{10} + I_{20})\frac{\Delta^2}{4\beta^2} + \left(\frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\mathrm{sn}^2(\gamma z), \quad (34б)$$

$$A_3(z) = \left\{I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - \left[(I_{10} - I_{20})^2 + (I_{10} + I_{20}) \times \frac{\Delta^2}{4\beta^2} + \left(\frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \mathrm{sn}(\gamma z)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}z\right) \quad (34в)$$

при

$$\gamma^2 = \beta^2\left\{I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} + \left[(I_{10} - I_{20})^2 + (I_{10} + I_{20})\frac{\Delta^2}{4\beta^2} + \left(\frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}, \quad (35)$$

$$k^2 = \left\{I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - \left[(I_{10} - I_{20})^2 + (I_{10} + I_{20}) \times \frac{\Delta^2}{4\beta^2} + \left(\frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \Big/ \left\{I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} + \left[(I_{10} - I_{20})^2 + (I_{10} + I_{20})\frac{\Delta^2}{4\beta^2} + \left(\frac{\Delta^2}{8\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}. \quad (36)$$

Вполне естественно, что решение (34) совпадает с известным аналитическим решением для рассмотренного выше самого простого случая ГВГ [16, 19]. Однако еще раз подчеркнем, что изложенный подход позволяет получать аналитические решения исходной задачи (1) в любой ситуации, т. е. при любых граничных условиях. Проиллюстрируем это вторым примером, описывающим еще одно решение задачи (1), также соответствующее МКВ манаковского типа при ГВГ с полным истощением поля с амплитудой A_2 за счет полной перекачки его энергии в поле с амплитудой A_3. С учетом этого будем искать решение уравнения (13) в форме

$$\tilde{A}_2 = B_2 \mathrm{cn}\,(\gamma z). \quad (37)$$

После подстановки (31) в (13) мы также получим два требования:

$$\gamma^2 = \beta^2\left(2I_{10} - 4I_{20} - I_{30} + \frac{\Delta^2}{4\beta^2} + 4B_2 B_2^*\right), \quad (38а)$$

$$\gamma^2 k^2 = 2\beta^2 B_2 B_2^*, \quad (38б)$$

которые с учетом граничного условия (14) сразу дают искомое решение

$$I_1(z) = I_{10} - I_{20}\mathrm{sn}^2(\gamma z), \quad (39а)$$

$$A_2(z) = A_{20}\mathrm{cn}\,(\gamma z)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}z\right), \quad (39б)$$

$$I_3(z) = 2I_{20}\left[\frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}} + \mathrm{sn}^2(\gamma z)\right] \quad (39в)$$

при

$$\gamma^2 = 2\beta^2 I_{10}\left[1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}}\left(1 - \frac{I_{20}}{I_{10}}\right)\right], \quad (40а)$$

$$k^2 = I_{20} \Big/ \left[I_{10} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2}\left(1 - \frac{I_{20}}{I_{10}}\right)\right]. \quad (40б)$$

Из (39) следует, что решение такого типа существует лишь при $I_{10} \geqslant I_{20}$ и амплитуда A_{30} волны на частоте ω_3 на входе в НЛК в данном случае может быть сколь угодно малой лишь при синхронном взаимодействии ($\Delta \to 0$). При этом в случае равной интенсивности ($I_{10} = I_{20}$) волн с амплитудами $A_{1,2}$ на входе в НЛК решение (39) становится апериодическим ($k = 1$), и

$$I_1(z) = I_2(z) = \frac{I_{10}}{\cosh^2(\gamma z)}, \quad (41а)$$

$$I_3(z) = \frac{\Delta^2}{4\beta^2} + 2I_{10}\tanh^2(\gamma z) \quad (41б)$$

при

$$\gamma^2 = 2\beta^2 I_{10}. \quad (42)$$

Насколько нам известно, аналитическое решение (39) исходной задачи (1) до настоящего времени в публикациях не приводилось.

В заключение остановимся на еще одном весьма любопытном и не встречавшемся нам в литературе точном аналитическом решении задачи (1), также соответствующем МКВ манаковского типа при ГВГ с неполным истощением поля с амплитудой A_2 за счет перекачки его энергии в поле с амплитудой A_3. С учетом этого будем искать решение уравнения (13) в форме

$$\tilde{A}_2 = B_2 \mathrm{dn}\,(\gamma z). \quad (43)$$

После подстановки (43) в (13) мы также получим два требования:

$$\gamma^2 k^2 = \beta^2\left(2I_{10} - 4I_{20} - I_{30} + \frac{\Delta^2}{4\beta^2} + 4B_2 B_2^*\right), \quad (44а)$$

$$k^2(\gamma^2 - 2\beta^2 B_2 B_2^*) = 0. \quad (44б)$$

Равенство (44б) может быть выполнено либо в тривиальном случае

$$k^2 = 0, \tag{45}$$

либо при соблюдении условия

$$\gamma^2 = 2\beta^2 B_2 B_2^*. \tag{46}$$

В первом из этих двух случаев с учетом (44а) и условия (14) получим

$$I_1(z) = I_{10}, \tag{47а}$$

$$I_2(z) = I_{10}\left(1 + \frac{8\beta^2 I_{10}}{\Delta^2}\right), \tag{47б}$$

$$I_3(z) = I_{10}\left(1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}}\right), \tag{47в}$$

что отвечает режиму так называемого параметрического просветления, т. е. ситуации, в которой скорости процессов $\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$ и $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ одинаковы. Во втором случае с учетом граничных условий (14) имеем

$$I_1(z) = I_{10}\mathrm{cn}^2(\gamma z) + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}}(I_{20} - I_{10})\mathrm{sn}^2(\gamma z), \tag{48а}$$

$$A_2(z) = A_{20}\mathrm{dn}\,(\gamma z)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}z\right), \tag{48б}$$

$$I_3(z) = \frac{\Delta^2}{4\beta^2 I_{10}} I_{20}\mathrm{cn}^2(\gamma z) + 2I_{10}\left(1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}}\right)\mathrm{sn}^2(\gamma z) \tag{48в}$$

при

$$\gamma^2 = 2\beta^2 I_{20}, \tag{49а}$$

$$k^2 = \frac{I_{10}}{I_{20}} - \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}}\frac{I_{20} - I_{10}}{I_{20}}. \tag{49б}$$

При этом из требования $0 \leqslant k \leqslant 1$ и граничного условия (14) следует, что это новое решение исходной задачи (1) существует лишь при условии

$$I_{10} \leqslant I_{20} \leqslant I_{10}\left(1 + \frac{8\beta^2 I_{10}}{\Delta^2}\right). \tag{50}$$

5. Заключение

Итак, выше мы показали, что в приближении трех взаимодействующих мод точное аналитическое решение задачи стационарного параметрического преобразования частоты, в том числе ГВГ и параметрического усиления в среде с квадратичной нелинейностью, сводится к решению трех независимых систем нелинейных уравнений. Каждая из этих систем состоит из двух НУШ, связана с остальными системами лишь через свои граничные условия и описывает МКВ, содержащую две неинтерферирующие составляющие. По сути, возможность использования этого чрезвычайно эффективного подхода связана с возможностью описания результата конкуренции двух одновременно протекающих на нелинейности второго порядка процессов слияния ($\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$) и распада ($\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$) квантов через эффективную каскадную кубическую нелинейность.

При этом, благодаря хорошо отработанным методам построения решений подобных систем уравнений, соответствующие любой ситуации (любым граничным условиям) аналитические решения исходной задачи в форме МКВ строятся по стандартным алгоритмам на базе весьма ограниченного множества эллиптических функций – фундаментальных решений уравнения Ламэ первого и второго порядка. Более того, использование описанного в настоящей работе подхода позволяет не только классифицировать такие решения, что существенно упрощает априорный выбор наиболее удобных для каждой конкретной ситуации эллиптических функций, но и сдвигать их вдоль оси z, меняя тем самым характер граничных условий. Последнее дает возможность использовать одну и ту же форму решения как для ГВГ, так и для параметрического усиления. Например, сдвиг аргумента эллиптических функций $\xi \to \xi + K$ на четверть периода (где K – полный эллиптический интеграл первого рода) описывается преобразованием [17]

$$\mathrm{sn}\,\xi \to \frac{\mathrm{cn}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi}, \quad \mathrm{cn}\,\xi \to -(1-k^2)^{1/2}\frac{\mathrm{sn}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi},$$

$$\mathrm{dn}\,\xi \to (1-k^2)^{1/2}\frac{1}{\mathrm{dn}\,\xi}.$$

Отметим также, что решения в форме МКВ можно экстраполировать на полупространство $z < 0$ (фактически заполнить это полупространство той же нелинейной средой) и затем «заставить» их двигаться с постоянной скоростью v вдоль оси z системы координат (т. е. провести преобразование $z \to \eta$, где $\eta = z - vt$ – бегущая координата, t – время). Такая возможность следует (по крайней мере без учета проблемы корректности использования мультипольных разложений при релятивистских скоростях [21]) непосредственно из инвариантности исходных уравнений (1) (фактически – волнового уравнения) относительно преобразований Лоренца. Поэтому возникает вопрос о том, являются ли такие решения «подлинными» солитоноподобными образованиями или речь здесь идет лишь о некой математической аналогии. Судя по всему, ответить на этот вопрос не так просто, поскольку наличие в одной из пар связанных НУШ (19) нелинейности дефокусирующего типа не позволяет «столкнуть» два движущихся с разными скоростями $v_{1,2}$ апериодических решения, которые могли бы затем (после столкновения) разойтись на бесконечно большое расстояние.

1. Yuen H.C., Lake B.M. *Adv. Appl. Mech.*, **22**, 67 (1982).
2. Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. *Phys. Rep.*, **142**, 103 (1986).
3. Akhmediev N.N., Ankiewicz A. *Solitons, Nonlinear Pulses and Beams* (London: Chapman and Hall, 1997).
4. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).
5. Kamchatnov A.M. *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulation* (Singapore: World Scientific, 2000).
6. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego: Acad. Press, 2003).
7. Fleischer J.W., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. *Nature (London)*, **422**, 147 (2003).
8. Михайловский А.Б., Кудашев В.Р., Лахин В.П. и др. *Письма в ЖЭТФ*, **40**, 273 (1984); Hioe F.T. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1152 (1999); Chow K.W., Lai D.W.C. *Phys. Rev. E*, **65**, 026613 (2002); Chow

K.W., Nakkeeran K., Malomed B.A. *Opt. Commun.*, **219**, 251 (2003).
9. Ankiewicz A., Maruno K., Akhmediev N. *Phys. Lett. A*, **308**, 397 (2003); Maruno K., Ankiewicz A., Akhmediev N. *Opt. Commun.*, **221**, 199 (2003).
10. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1009 (1999); Выслоух В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **28**, 55 (1999).
11. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. *Письма в ЖЭТФ*, **20**, 734 (1974); Bang O., Christiansen P.L., Clausen C.B. *Phys. Rev. E*, **56**, 7257 (1997); Kobyakov A., Darmanyan S., Pertsch T., Lederer E. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**, 1737 (1999); Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S., Bang O., Soukoulis C.M. *Phys. Rev. E*, **63**, 016615 (2001); Malomed B.A., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., et al. *Phys. Rev. E*, **65**, 056606 (2002); Torner L., Barthelemy A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **39**, 22 (2003); Kartashov Y.V., Torner L., Vysloukh V.A. *Opt. Lett.*, **29**, 1117 (2004).
12. Захаров В.Е. *ЖПМТФ*, № 2, 86 (1968); Martin D.U., Yuen H.C., Saffman P.G. *Wave Motion*, **2**, 215 (1980).
13. Павленко В.П., Петвиашвили В.И. *Физика плазмы*, **8**, 206 (1982); Фильченков С.Е., Фрейман Г.М., Юнаковский А.Д. *Физика плазмы*, **13**, 961 (1987); Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. *УФН*, **167**, 1137 (1997).
14. Davydov A.S. *Solitons in Molecular Systems* (The Netherlands, Dordrecht: D.Reidel, 1985); Takeuchi S., Yoshizawa M., Matsuda T., et al. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 2508 (1992); Takahashi A., Mukamel S. *J. Chem. Phys.*, **100**, 2366 (1994); Hartmann M., Takahashi A., Mukamel S., Schreiber M. *Mol. Cryst. Liq. Cryst. Sci. Techn.*, **256**, 531 (1995); Xu Ji-Zhong, Huang Jing-Ning. *Phys. Lett. A*, **197**, 127 (1995); Воронов А.В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **33**, 219 (2003).
15. Davydov A.S. *Phys. Stat. Sol. B*, **146**, 619 (1988); Goff J.P., Tennant D.A. *Phys. Rev. B*, **52**, 15992 (1995); Haviland D.B., Delsing P. *Phys. Rev. B*, **54**, R6857 (1996); Воронов А.В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *ЖЭТФ*, **120**, 1256 (2001).
16. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНИТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966); Цернике Ф., Мидвинтер Дж. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Мир, 1976); Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
18. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5**, 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Ф. *Квантовая электроника*, № 4 (16), 81 (1973); Meredith G.R. *J. Chem. Phys.*, **77**, 5863 (1982); Kobyakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54**, 3455 (1996).
19. Liu Xueming, Zhang Hanyi, Zhang Mingde. *Opt. Express*, **10**, 83 (2002).
20. Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982).