PACS 42.65.Ky; 42.65.Yj; 42.65.Tg; 05.45.–a

Комплексные периодические решения нелинейного уравнения Шредингера и невырожденные многокомпонентные кноидальные волны при параметрическом преобразовании частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Описан новый тип комплексных периодических решений нелинейного уравнения Шредингера, который может быть реализован при коллинеарном взаимодействии трех плоских монохроматических волн (мод) в среде с квадратичной нелинейностью. При переходе к вещественным переменным (к квадратурным компонентам) решения этого нового типа описывают невырожденные двухкомпонентные кноидальные волны, сформированные из двух «некогерентных» (неинтерферирующих) составляющих. Амплитуды последних совершают дополнительные (по отношению к колебаниями модуля) сложные, сдвинутые по фазе на $\pi/2$ нелинейные колебания, согласованные с колебаниями модуля решения, заданного эллиптической функцией.

***Ключевые слова**: нелинейное уравнение Шредингера, невырожденная многокомпонентная кноидальная волна, каскадная кубическая нелинейность, параметрическое преобразование частоты.*

1. Введение

В работе [1] было показано, что при взаимодействии трех ($i = 1 - 3$) плоских монохроматических волн – мод, распространяющихся вдоль оси z в среде с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$, задача преобразования частоты, в том числе генерации второй гармоники (ГВГ) и параметрического усиления, сводится к решению трех независимых нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). Каждое уравнение определяет эволюцию комплексной амплитуды $Y_i(z)$ одной ($i = 1 - 3$) из взаимодействующих мод и связано с двумя другими амплитудами $Y_j(z)$ ($j = 1 - 3 \neq i$) НУШ только через граничные ($z = 0$) условия. Переход к действительным переменным ($Y_i = Y_i' + \mathrm{i}Y_i''$) превращает каждое из уравнений в систему двух связанных НУШ, описывающих кноидальные волны (КВ), скомпонованные из двух «некогерентных» (неинтерферирующих) составляющих $Y_i'(z)$ и $Y_i''(z)$. Предложенный подход эквивалентен описанию результата конкуренции двух одновременно протекающих в среде с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$ процессов ($\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$ и $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$) через эффективную каскадную кубическую нелинейность $\chi^{(3)}_{\mathrm{eff}}$ [2]. При этом, благодаря отработанным схемам построения решений подобных систем уравнений, аналитические решения исходной задачи в форме КВ можно строить по стандартным алгоритмам.

Один из эффективных алгоритмов такого типа, основанный на использовании фундаментальных решений уравнения Ламэ первого и второго порядков [3], был нами ранее представлен в [4]. Однако, поскольку в рассмотренной в [1] ситуации оба уравнения каждой ($i = 1 - 3$) из систем, описывающих двухкомпонентные КВ $Y_i(z)$, одинаковы, с его помощью можно построить решения только так называемого манаковского типа, для которых Y_i' и Y_i'' пропорциональны одной и той же функции, а фаза $\varphi_i = \arctan[Y_i'(z)/Y_i''(z)] = \mathrm{const}$ не зависит от z [4]. Это значит, что должен существовать некий новый (по отношению к описанному в [4]) класс комплексных периодических решений НУШ $Y_i(z)$, который при переходе к действительным переменным ($Y_i = Y_i' + \mathrm{i}Y_i''$) и будет описывать невырожденные двухкомпонентные КВ при параметрическом преобразовании частоты. Собственно на решениях именно такого типа мы и собираемся остановиться в настоящей работе.

2. НУШ для комплексных амплитуд

Запишем НУШ в стандартном нормированном виде:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \pm 2(YY^* - \beta)Y = 0, \tag{1}$$

где знаки «±» отвечают случаям нелинейности так называемых фокусирующего и дефокусирующего типов соответственно, а $\beta = \mathrm{const}$. Предположим, что в отличие от чаще всего рассматриваемых ситуаций Y в (1) является комплексной функцией, которую мы и представим в виде

$$Y(z) = X(z)\exp[\mathrm{i}\varphi(z)]. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и разделив действительную и мнимую части, мы получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - X\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \pm 2(X^2 - \beta)X = 0, \tag{3а}$$

$$X\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\,\frac{\partial X}{\partial z}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{3б}$$

Поскольку решения, для которых $X(z) \equiv 0$, нас не интересуют, из (3б) следует интеграл

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 12 декабря 2006 г.

$$X^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(X^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)\bigg|_{z=0} = \mathrm{const}, \tag{4}$$

который и дает возможность найти КВ нового типа для НУШ (1). Отметим, что, насколько нам известно, интеграл вида (4) для НУШ ранее не приводился.

Введя обозначение $\partial\varphi/\partial z|_{z=0} = \varphi_0'$ и определив интенсивность как $I(z) = X^2(z)$, откуда следует, что $I(0) = I_0 = X^2(0) = X_0^2$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_0' I_0}{X^2}. \tag{5}$$

Подставив теперь (5) в (3а), найдем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{(\varphi_0')^2 I_0^2}{X^3} \pm 2(X^2 - \beta)X = 0, \tag{6}$$

решением которого и является искомая функция $X(z)$. При этом, решив уравнение (6) и определив тем самым $X(z)$, мы сможем сразу найти и $\varphi(z)$, проинтегрировав (5):

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{X^2(z')}. \tag{7}$$

Здесь $\varphi_0 = \varphi(0)$ – начальная ($z = 0$) фаза $Y(z)$. Отметим, что в описанной постановке задачи известные решения (1) в форме КВ отвечают предельному случаю, для которого

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \equiv 0, \quad \varphi(z) \equiv \varphi_0 = \mathrm{const}. \tag{8}$$

3. Комплексные периодические решения НУШ

Попробуем найти решение (6) в виде

$$X(z) = \left[B + CF^2(z) \right]^{1/2}, \tag{9}$$

удобном для записи интегралов (сохранение полного потока энергии и соотношения Мэнли – Роу) исходной системы уравнений [1, 5], описывающей процесс параметрического преобразования частоты, через интенсивности $I(z) = B + CF^2(z)$ трех взаимодействующих мод. Здесь B и C – константы, а $F = F(z)$ – некая новая периодическая функция z. Подставив (9) в (6), получим

$$BC\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + CF(B + CF^2)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - (\varphi_0')^2 I_0^2$$
$$\pm 2(B - \beta + CF^2)(B + CF^2)^2 = 0. \tag{10}$$

Предположим теперь, что

$$F = \mathrm{sn}(\gamma z), \tag{11}$$

что сохраняет функциональный характер ядра вспомогательной линейной задачи [4]. Отметим, что общий вид искомого решения, соответствующий выражениям (9) и (11), может быть найден и прямым интегрированием (6) с использованием эллиптических интегралов [6]. Более того, замены $\mathrm{sn}(\gamma z) \to \mathrm{cn}(\gamma z)$ и $\mathrm{sn}(\gamma z) \to \mathrm{dn}(\gamma z)$ в (11) с учетом соотношений $\mathrm{cn}^2(\gamma z) = 1 - \mathrm{sn}^2(\gamma z)$ и $\mathrm{dn}^2(\gamma z) = 1 - k^2\mathrm{sn}^2(\gamma z)$ приводят лишь к перенормировке констант B и C, не меняя вида выражения (8). Здесь $0 \leqslant k \leqslant 1$ – модуль эллиптической функции, а γ – некая константа. Продифференцировав (11) и подставив полученный результат в (10), выразив $\mathrm{cn}^2(\gamma z)$ и $\mathrm{dn}^2(\gamma z)$ через $\mathrm{sn}^2(\gamma z)$ (см. выше) и приравняв коэффициенты при разных (от 0 до 3) степенях $\mathrm{sn}^2(\gamma z)$ нулю, с учетом того, что $B \equiv I_0$, мы получим, что либо $C = 0$ и

$$\left[(\varphi_0')^2 \mp 2(I_0 - \beta) \right] I_0^2 = 0, \tag{12}$$

либо $C \neq 0$ и

$$\left[C\gamma^2 - (\varphi_0')^2 I_0 \pm 2(I_0 - \beta) I_0 \right] I_0 = 0, \tag{13а}$$

$$[\gamma^2(1 + k^2) \mp (3I_0 - 2\beta)] I_0 = 0, \tag{13б}$$

$$(3I_0 - C)\gamma^2 k^2 - C\gamma^2 \pm 2(3I_0 - \beta)C = 0, \tag{13в}$$

$$k^2 = \mp C/\gamma^2. \tag{13г}$$

Из (13г) следует, что переход от нелинейности фокусирующего типа (знак «+» в (1)) к нелинейности дефокусирующего типа (знак «–» в (1)) меняет знак C.

При $C \neq 0$, подставив (13г) в (13б) и (13в), найдем, что либо $I_0 = 0$ и

$$\gamma^2 = \pm C \mp 2\beta, \tag{14а}$$

$$k^2 = \frac{C}{2\beta - C}, \tag{14б}$$

либо $I_0 \neq 0$ и

$$C\gamma^2 - (\varphi_0')^2 I_0 \pm 2(I_0 - \beta) I_0 = 0, \tag{15а}$$

$$\gamma^2 = \pm 3I_0 \pm C \mp 2\beta, \tag{15б}$$

$$k^2 = \frac{C}{2\beta - 3I_0 - C}, \tag{15в}$$

что и определяет значения трех из четырех свободных пока параметров – k, γ, $B = I_0$ и C.

Предположим, что именно начальная интенсивность I_0 волны является свободным параметром. Тогда при $I_0 \neq 0$, исключив γ^2 из (15а), мы получим уравнение

$$C^2 - 2\left(\beta - \frac{3}{2} I_0\right) C + I_0 \left[2(I_0 - \beta) \mp (\varphi_0')^2 \right] = 0, \tag{16}$$

откуда следует, что для искомого решения НУШ (1)

$$C_1 = \beta - \frac{3}{2} I_0 + \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2}, \tag{17а}$$

$$\gamma_1^2 = \pm \frac{3}{2} I_0 \mp \beta \pm \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2}, \tag{17б}$$

$$k_1^2 = \left\{ \beta - \frac{3}{2} I_0 + \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2} \right\}$$
$$\times \left\{ \beta - \frac{3}{2} I_0 - \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \tag{17в}$$

либо

$$C_2 = \beta - \frac{3}{2} I_0 - \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2}, \tag{18а}$$

$$\gamma_2^2 = \pm \frac{3}{2} I_0 \mp \beta \mp \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2}, \tag{18б}$$

$$k_2^2 = \left\{ \beta - \frac{3}{2} I_0 - \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2} \right\} \times \left\{ \beta - \frac{3}{2} I_0 + \left[\left(\beta - \frac{1}{2} I_0 \right)^2 \pm (\varphi_0')^2 I_0 \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \tag{18в}$$

В итоге новое комплексное периодическое решение (1)

$$Y_{1,2}(z) = \left[I_0 + C_{1,2} \mathrm{sn}^2(\gamma z) \right]^{1/2} \times \exp \left[\mathrm{i}\varphi_0 + \mathrm{i}\varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + C_{1,2}\, \mathrm{sn}^2(\gamma_{1,2} z')} \right] \tag{19}$$

с учетом (17) и (18) оказывается полностью заданным своими граничными условиями (I_0, φ_0 и φ_0'), а области его существования определяются требованиями $\gamma^2 \geqslant 0$ и $1 \geqslant k^2 \geqslant 0$.

Отметим, что к рассмотренному нами здесь новому классу решений НУШ (1) относятся и две тривиальные ситуации, в которых

$$Y(z) = \sqrt{I_0} \exp[\mathrm{i}(\varphi_0 + \varphi_0' z)] \tag{20}$$

при условии, что

$$(\varphi_0')^2 = \pm 2(I_0 - \beta) \tag{21}$$

($C = 0$, параметрическое просветление в терминологии [1]), и

$$Y(z) = \sqrt{C}\, \mathrm{sn}(\gamma z) \exp(\mathrm{i}\varphi_0) \tag{22}$$

при условии, что

$$\gamma^2 = \pm C \mp 2\beta, \tag{23а}$$

$$k^2 = \frac{C}{2\beta - C} \tag{23б}$$

($I_0 = 0$, решение манаковского типа в терминологии [1, 4], построенное с использованием фундаментального решения $\mathrm{sn}(\gamma z)$ уравнения Ламэ первого порядка). Более того, легко убедиться в том, что решения описанного нами выше класса могут быть и апериодическими (т. е. уединенными волнами, $k = 1$), однако лишь в случае нелинейности дефокусирующего типа. При этом из (17)–(19) следует, что соответствующие солитоны отличаются от известных так называемых темных солитонов [7] необычным поведением фазы:

$$Y_{1,2}(z) = \left[I_0 + C_{1,2} \tanh^2(\gamma_{1,2} z) \right]^{1/2} \times \exp \left[\mathrm{i}\varphi_0 + \mathrm{i}\varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + C_{1,2} \tanh^2(\gamma_{1,2} z')} \right], \tag{24}$$

где

$$C_{1,2} = \beta_{1,2} - \frac{3}{2} I_0; \tag{25а}$$

$$\gamma_{1,2}^2 = -\frac{3}{2} I_0 + \beta_{1,2}; \tag{25б}$$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} I_0 \pm \sqrt{I_0}\, |\varphi_0'|. \tag{25в}$$

4. Специфика нового класса периодических решений НУШ

Качественно новый характер описанного выше класса комплексных периодических решений НУШ становится очевидным, если с самого начала с помощью замены

$$Y(z) = Y'(z) + \mathrm{i}\, Y''(z) \tag{26}$$

выделить в искомом решении $Y(z)$ его действительную и мнимую части (квадратурные компоненты). Тогда после подстановки (26) в (1) и разделения действительных и мнимых частей полученного выражения мы придем к классической системе из двух связанных НУШ для вещественных переменных $Y'(z)$ и $Y''(z)$ в форме

$$\frac{\partial^2 Y'}{\partial z^2} \pm 2\left[(Y')^2 + (Y'')^2 - \beta \right] Y' = 0, \tag{27а}$$

$$\frac{\partial^2 Y''}{\partial z^2} \pm 2\left[(Y')^2 + (Y'')^2 - \beta \right] Y'' = 0. \tag{27б}$$

Если воспользоваться теперь схемой построения двухкомпонентных КВ, описанной в [4], то, поскольку β в (27а) и (27б) одинаковы, мы найдем, что амплитуды компонент Y' и Y'' пропорциональны одной и той же эллиптической функции (т. е. одному и тому же фундаментальному решению уравнения Ламэ первого либо второго порядка) $\theta(z)$:

$$Y'(z) = \theta(z) \sin\varphi, \tag{28а}$$

$$Y''(z) = \theta(z) \cos\varphi. \tag{28б}$$

При этом формально можно считать, что обе компоненты этого решения (Y' и Y'') могут быть построены простым проецированием однокомпонентного решения $Y(z) = \theta(z)$ на оси некой системы координат, повернутой на фиксированный (не зависящий от z) угол $\alpha = \varphi = \arctan(Y'/Y'')$ относительно исходной системы [4].

При той же замене (26) описанное в настоящей работе решение будет иметь вид

$$Y'(z) = \left[I_0 + C\, \mathrm{sn}^2(\gamma z) \right]^{1/2} \times \sin \left[\varphi_0 + \varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + C\, \mathrm{sn}^2(\gamma z')} \right], \tag{29а}$$

$$Y''(z) = \left[I_0 + C\, \mathrm{sn}^2(\gamma z) \right]^{1/2} \times \cos \left[\varphi_0 + \varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + C\, \mathrm{sn}^2(\gamma z')} \right]. \tag{29б}$$

Легко убедиться в том, что хотя по своей форме новое решение и похоже на КВ манаковского типа с модулем

$$|Y(z)| = [I_0 + C\,\mathrm{sn}^2(\gamma z)]^{1/2},$$

также соответствующим ядру уравнения Ламэ, однако угол поворота

$$\alpha(z) = \varphi_0 + \varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + C\,\mathrm{sn}^2(\gamma z')}$$

однокомпонентного решения при аналогичном проецировании, обеспечивающем построение двух квадратурных составляющих Y' и Y'' этого невырожденного решения, совершает теперь сложные нелинейные колебания, согласованные с колебаниями $|Y(z)|$. С учетом преобразования

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + C\,\mathrm{sn}^2(\gamma z')}$$

$$= \frac{1}{I_0}\int_0^{\mathrm{sn}(\gamma z)} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\lambda x^2)\left[(1-x^2)(1-k^2x^2)\right]^{1/2}}, \qquad (30)$$

где $\lambda = C/I_0$, характер этих колебаний описывается эллиптическим интегралом третьего рода [6]. Поскольку некоторые точные решения задачи параметрического преобразования частоты (сформулированной, правда, в форме системы связанных нелинейных уравнений, а не в форме НУШ) вида (19) ранее уже приводились, ознакомиться с характером согласованных нелинейных колебаний модуля и фазы решений такого типа можно в работе [8].

5. Заключение

Итак, выше было показано, что НУШ имеет новый (по отношению к рассмотренному в работе [4]) класс периодических решений. Эти решения комплексны и при переходе к вещественным переменным (к квадратурным компонентам) описывают невырожденные КВ, сформированные из двух «некогерентных» (неинтерферирующих) составляющих. Решения этого нового класса по форме похожи на вырожденные КВ (периодические решения так называемого манаковского типа), однако угол проецирования [4], обеспечивающего формирование двух составляющих решения, совершает сложные нелинейные колебания, согласованные с колебаниями их модуля.

Отметим, что форма записи решений этого нового класса может быть разной. Так, для того чтобы изменить характер граничных условий, можно сдвинуть приведенное нами выше решение (19) вдоль оси z. Например, сдвиг аргумента $\xi \to \xi + K$ эллиптической функции на четверть периода описывается хорошо известным преобразованием $\mathrm{sn}\,\xi \to \mathrm{cn}\,\xi/\mathrm{dn}\,\xi$ [6]. Здесь K – полный эллиптический интеграл первого рода. Существует множество других тождественных преобразований и замен, одновременно меняющих аргумент ξ и модуль k эллиптических функций [6].

Поскольку НУШ, учитывающее низший (кубический) порядок безынерционной нелинейности, имеет достаточно универсальный характер, можно ожидать, что описанный нами выше новый класс периодических решений окажется полезным и для других разделов физики. В круг подобных задач могут попасть задачи распространения цугов импульсов по оптическим волокнам [7, 9] и распространения пучков со специальной периодической поперечной структурой через фоторефрактивные кристаллы [4, 10], а также задачи нелинейной гидродинамики [11], физики плазмы [12], аналитического описания связанных волновых пакетов, скомпонованных из электронных волновых функций [13, 14], и др.

Авторы признательны РФФИ (грант № 06-02-16041) за поддержку настоящей работы.

1. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37**, 266 (2007).
2. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5**, 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Ф. *Квантовая электроника*, № 4, 81 (1973); Meredith G.R *J. Chem. Phys.*, **77**, 5863 (1982); Kobyakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54**, 3455 (1996).
3. Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
4. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1009 (1999); Выслоух В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **28**, 55 (1999).
5. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНИТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966); Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
7. Akhmediev N.N., Ankiewicz A. *Solitons, Nonlinear Pulses and Beams* (London: Chapman and Hall, 1997); Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos* (Cembridge: Cambridge University Press, 2000); Kamchatnov A.M. *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulation* (Singapore: World Scientific, 2000); Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego: Acad. Press, 2003).
8. Liu Xueming, Zhang Hanyi, Zhang Mingde. *Opt. Express*, **10**, 83 (2002).
9. Михайловский А.Б., Кудашев В.Р., Лахин В.П. и др. *Письма в ЖЭТФ*, **40**, 273 (1984); Hioe F.T. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1152 (1999); Chow K.W., Lai D.W.C. *Phys. Rev. E*, **65**, 026613 (2002); Chow K.W., Nakkeeran K., Malomed B.A. *Opt. Commun.*, **219**, 251 (2003).
10. Fleischer J.W., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. *Nature (London)*, **422**, 147 (2003).
11. Захаров В.Е. *ЖПМТФ*, № 2, 86 (1968); Martin D.U., Yuen H.C., Saffman P.G. *Wave Motion*, **2**, 215 (1980); Yuen H.C., Lake B.M. *Adv. Appl. Mech.*, **22**, 67 (1982).
12. Павленко В.П., Петвиашвили В.Н. *Физика плазмы*, **8**, 206 (1982); Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. *Phys. Rep.*, **142**, 103 (1986); Фильченков С.Е., Фрейман С.М., Юнаковский А.Д. *Физика плазмы*, **13**, 961 (1987); Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. *УФН*, **167**, 1137 (1997).
13. Davydov A.S. *Solitons in Molecular Systems* (The Netherlands, Dordrecht: D.Reidel, 1985); Hartmann M., Takahashi A., Mukamel S., Schreiber M. *Mol. Cryst. Liq. Cryst. Sci. Tech.*, **256**, 531 (1995); Xu Ji-Zhong, Huang Jing-Ning. *Phys. Lett. A*, **197**, 127 (1995); Воронов А.В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **33**, 219 (2003).
14. Davydov A.S. *Phys. Status Solidi B*, **146**, 619 (1988); Goff J.P., Tennant D.A. *Phys. Rev. B*, **52**, 15992 (1995); Haviland D.B., Delsing P. *Phys. Rev. B*, 54, R6857 (1996); Воронов А.В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *ЖЭТФ*, **120**, 1256 (2001).