

Дифракционные явления в кольцевых газовых лазерах

Т.В.Радина

Исследована дифракционная невязанность частот и интенсивностей генерации встречных волн кольцевого газового лазера. Для этого в рамках модели гауссовых пучков решена самосогласованная задача на собственные колебания кольцевого оптического резонатора, содержащего нелинейную газовую среду и модельную диафрагму. Получены и проанализированы выражения для частотнозависимых потерь, частот и интенсивностей генерации встречных волн. Проведен анализ опубликованных экспериментальных данных по влиянию дифракционных явлений на частоты и интенсивности встречных волн. Сравнение экспериментальных данных с теоретическими результатами позволило провести классификацию невязанных эффектов, связанных с дифракцией. Объяснены механизмы асимметрии зоны генерации относительно центральной частоты перехода и асимметрии контура интенсивности генерации.

Ключевые слова: кольцевой лазер, собственные колебания резонатора, частотнозависимые потери, невязанность.

1. Введение

В 1963 году была продемонстрирована возможность получения в кольцевом лазере стабильной генерации в обоих направлениях [1]. Создание кольцевого лазера открыло уникальные возможности проведения прецизионных исследований в различных областях фундаментальной физики. Это и исследование релятивистских и гравитационных эффектов в теории относительности [2, 3], и создание детекторов гравитационных волн [4], и проверка эффектов квантовой электродинамики [5], и исследование других тонких явлений [6, 7]. Уже этот краткий перечень показывает, что изучение физических процессов, определяющих основные свойства кольцевого лазера, становится все более актуальным. Следует ожидать, что новые теоретические и экспериментальные исследования позволят не только увеличить возможности существующих приборов, но и расширят круг применений кольцевого лазера.

Одним из важных применений кольцевого лазера явилось его использование в качестве датчика лазерного гироскопа. В настоящее время разработаны лазерные гироскопы, точность которых позволяет измерить неравномерность вращения Земли [3]. Среди физических процессов, определяющих предельную точность лазерных гироскопов, заметное место занимают дифракционные эффекты. Изучению этих эффектов посвящено большое число работ. Даже неполный их перечень (см., напр., [8–31]) весьма внушителен. Установлено, что в лазере с неоднородным резонатором по различным причинам возникает разность частот встречных волн даже при отсутствии вращения, т. е. существует сдвиг нуля частот-

ной характеристики. Эффекты, приводящие к различию частот и интенсивностей встречных волн в покоящемся лазере, принято называть невязанными, а само явление – невязанностью частот и интенсивностей. Достаточно полный обзор невязанных эффектов в кольцевых лазерах дан в [31].

Существование невязанных эффектов приводит к возникновению вблизи центра доплеровски уширенной линии усиления узкой области частот (так называемой области сильной связи), внутри которой одна из встречных волн полностью или почти полностью погашена. При определенных условиях зависимость интенсивности волны от частоты в этой области имеет форму резонансного пика. Наличие такого рода резонансов интенсивности стимулировало проведение работ по их использованию для стабилизации частоты кольцевого лазера с поглощающей ячейкой [32], а также в спектроскопии сверхвысокого разрешения [33].

В настоящей работе проведен теоретический анализ поведения разностей частот и интенсивностей генерации встречных волн в лазере с невязанными элементами в зависимости от отстройки частоты резонатора от центра линии. Показано, что это поведение качественно различается в случаях, когда невязанные элементы создают разность потерь или разность частот встречных волн. Сравнение опубликованных экспериментальных данных, накопленных в результате многолетних исследований, с нашими теоретическими результатами впервые позволило провести классификацию невязанных эффектов, связанных с дифракцией. Установлено, что преобладание того или иного механизма невязанности определяет поведение возникающих при этом разностей интенсивностей и частот генерации встречных волн.

Ответив на вопрос, какие физические причины обуславливают возникновение амплитудной или фазовой невязанности встречных волн в лазере без невязанных элементов, можно объяснить возникновение частотнозависимого сдвига нуля частотной характеристики кольцевого лазера, работающего в режиме датчика лазерного

Т.В.Радина. Научно-исследовательский институт им. В.А.Фока Санкт-Петербургского государственного университета, Россия, 190904 С.-Петербург, Петродворец, ул. Ульяновская, 1; e-mail: radina@paloma.spbu.ru

гироскопа. Опубликованные ранее теоретические работы не могли дать ответа на этот вопрос. В данной работе это сделано на основе решения самосогласованной задачи на собственные колебания кольцевого оптического резонатора, содержащего нелинейную газовую среду и модельную диафрагму. Показано, что дифракция на апертурах такого резонатора порождает невязанность как частотнозависимых потерь, так и частотнозависимых фазовых набегов встречных волн. В кольцевом лазере со съюстированным резонатором совместное действие дифракции и индуцированной полем радиальной неоднородности нелинейной среды является причиной доминирующей роли разности потерь. Разъюстировка резонатора, вызванная перекосом зеркал, применением несимметричных относительно оптической оси диафрагм (или перемещением диафрагмы перпендикулярно плоскости резонатора) приводит к доминирующей роли разности частот.

Кроме того, мы исследовали поведение интенсивности и частоты генерации вблизи и внутри области сильной связи в случае существования как амплитудной, так и фазовой невязанности. Это актуально при решении задач нелинейной спектроскопии и стабилизации частоты, где существенна точность, с которой пик мощности и нелинейный резонанс дисперсии позволяют воспроизвести частоту квантового перехода ω_{ab} .

2. Исследование генерации кольцевого лазера в модели плоских волн

Проанализируем поведение частот и интенсивностей стационарной генерации встречных волн кольцевого лазера в модели плоских волн, разработанной Лэмбом [34] для линейного лазера. Обобщение этой теории для кольцевого лазера дано во многих работах. Однако автору неизвестны публикации, где был бы дан систематический анализ работы лазера, в резонаторе которого созданы неодинаковые фазовые или амплитудные условия для встречных волн, хотя имеются публикации, где такие попытки предпринимались [35–37]. Отличие полученных нами результатов от приведенных в указанных работах главным образом объясняется тем, что мы впервые выполнили расчет поляризуемости среды в полях встречных волн в третьем порядке теории возмущений в общем виде, не ограничиваясь членами второго порядка малости по отношению естественной ширины линии к доплеровской.

Моды кольцевых резонаторов представляют собой бегущие волны. Рассмотрим лазер, в котором генерация в каждом направлении осуществляется только на одной

из собственных частот ω_r и ω_l . И хотя поле в резонаторе является суперпозицией полей двух бегущих во встречных направлениях волн:

$$E(z) = E_r(z) \exp(-i\omega_r t) + E_l(z) \exp(-i\omega_l t) + \text{компл. сопр.}, \quad (1)$$

по существующей терминологии такой лазер называется одномодовым, т. к. обе волны имеют один и тот же продольный индекс. Поле каждой из волн удовлетворяет стационарному волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_j^2 \right) E_j(z) = -4\pi k_j^2 P_j(z), \quad k_j = \omega_j/c, \quad j = r, l. \quad (2)$$

Поле (1) индуцирует в нелинейной среде макроскопическую поляризованность активной среды

$$P(z) = P_r(z) \exp(-i\omega_r t) + P_l(z) \exp(-i\omega_l t) + \text{компл. сопр.}, \quad (3)$$

где

$$2\pi P_r(z) = [-(1/k_r)K(Z_r - \beta_r I_r - \theta_l I_l)]E_r(z) = 2\pi \kappa_r E_r(z). \quad (4)$$

Здесь и далее уравнения для встречной волны получаются заменой индексов $r \leftrightarrow l$. Определения безразмерных интенсивностей волн I_r , I_l и коэффициента K усиления среды даны в Приложении 1. Там же приведены зависимости величин Z_j , β_j и θ_j от отстройки и параметров перехода: полуширин уровней γ_a , γ_b , однородной (γ_{ab}) и неоднородной (ku) полуширин линии ($k = (k_r + k_l)/2$). Мнимая часть функции $Z_j = Z_j' + iZ_j''$ описывает зависимость ненасыщенного усиления от отстройки $\omega_j - \omega_{ab}$, ее реальная часть отвечает за линейную дисперсию. Нелинейное насыщение усиления и нелинейную дисперсию, обусловленные самовоздействием встречных волн, описывают мнимые и реальные части коэффициентов $\beta_j = \beta_j' + i\beta_j''$, а эти же параметры, обусловленные взаимодействием встречных волн, – мнимые и реальные части коэффициентов $\theta_j = \theta_j' + i\theta_j''$ соответственно. На рис.1 представлены эти функции при $\omega_r = \omega_l = \omega$ и следующих значениях параметров: $\lambda = 3.39$ мкм, $\gamma_a = 18$ МГц, $\gamma_b = 27$ МГц, $\gamma_{ab} = 120$ МГц, $ku = 300$ МГц, которые используются и в дальнейших расчетах.

Решение уравнения (2), которое дополнено условиями периодичности полей и условиями на частично пропускающем зеркале с коэффициентом отражения \mathcal{R} , найдено в виде плоских волн:

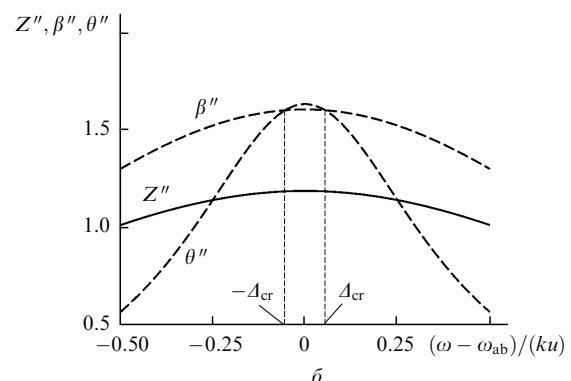
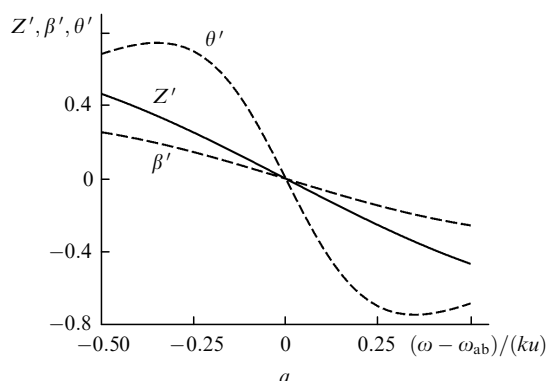


Рис.1. Зависимости реальных (а) и мнимых (б) частей коэффициентов Z , β и θ от отстройки.

$$E_r(z) = E_{0r} \exp \left[ik_r \int_0^z n_{zr}(z) dz \right], \quad (5)$$

$$E_l(z) = E_{0l} \exp \left[-ik_l \int_L^z n_{zl}(z) dz \right], \quad (6)$$

где L – длина резонатора. В приближении малого усиления излучения на длине волны показатель преломления среды $n_{zj}(z)$ для каждой из волн на длине газоразрядной трубки H равен

$$n_{zr} = 1 + 2\pi\chi_r = 1 - \frac{1}{k_r} K_0(Z_r - \beta_r I_r - \theta_l I_l), \quad (7)$$

вне трубки $n_{zr} = n_{zl} = 1$. Условие периодичности поля дает нам систему комплексных уравнений для встречных волн:

$$-\varphi_j + i\varepsilon_j + k_j \int_0^L n_{zj}(z) dz = 2\pi\tilde{q}. \quad (8)$$

Здесь \tilde{q} – большое целое число (продольный индекс моды); $\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_0 \pm \delta\varepsilon$; $\varepsilon_0 = \ln(1/\sqrt{\mathcal{R}})$ – потери на зеркале; $\pm\delta\varepsilon$ и φ_j – потери и дополнительные к геометрооптическому сдвигу фаз встречных волн, обусловленные действием невязимных устройств. Равенство нулю мнимых частей уравнений (8) для встречных волн, которое означает равенство насыщенного усиления каждой из волн ее потерям, позволяет получить выражение для интенсивностей генерации волн:

$$I_r = \frac{\eta_r \beta_1'' - \eta_l \theta_1''}{\beta_r'' \beta_1'' - \theta_r'' \theta_1''}, \quad \eta_r = Z_r'' - \frac{\varepsilon_r}{KH}. \quad (9)$$

Вещественные части (8) дают уравнения для частот генерации ω_r, ω_l :

$$\omega_r = \Omega + \delta\omega_r + (c/L)KH(Z_r' - I_r \beta_r' - I_l \theta_l'), \quad (10)$$

где $\Omega = (c/L)2\pi\tilde{q}$ – частота резонатора без среды; $\delta\omega_r = (c/L)\varphi_r$ – величина частотной подставки. В том случае, когда в резонаторе отсутствуют источники неравенства потерь или/и частот встречных волн, обе волны имеют равные частоты и интенсивности во всей области генерации. Зависимость интенсивностей волн $I_r = I_l = \eta/(\beta'' + \theta'')$, где $\beta = (\beta_r + \beta_l)/2$, $\theta = (\theta_r + \theta_l)/2$, $\eta = (\eta_r + \eta_l)/2$, от отстройки имеет вид кривой с провалом вблизи центральной частоты перехода. Такая зависимость типична для одномодовых линейных лазеров. Картина кардинально меняется в тех случаях, когда в резонаторе с помощью специальных невязимных устройств, наиболее распространенными из которых являются элементы на основе эффекта Фарадея, создается либо определенная разность потерь, либо разность частот встречных волн.

Неодинаковость потерь встречных волн $\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_0 \mp \delta\varepsilon$ обуславливает неравенство интенсивностей и частот генерации: $I_r - I_l = 2\Delta I$, $\omega_r - \omega_l = 2\Delta\omega$. Из (9) и (10) нетрудно получить

$$I_{r,1} = \eta \frac{1}{\beta'' + \theta''} \pm \frac{\delta\varepsilon}{KH} \frac{1}{\beta'' - \theta''} = I \pm \Delta I. \quad (11)$$

$$\Delta\omega = -\delta\varepsilon \frac{c}{2L} \frac{\beta' + \theta'}{\beta'' - \theta''}.$$

В силу того что зависимости коэффициентов β'' и θ'' от отстройки имеют четный, а коэффициентов β' и θ' – нечетный характер, разность интенсивностей является четной, а разность частот – нечетной функцией отстройки $\omega - \omega_{ab}$. Из (11) следует, что невязимные добавки ΔI и $\Delta\omega$ меняют знаки при переходе средней частоты генерации $\omega = (\omega_r + \omega_l)/2$ через некоторое значение ω_{cr} , при котором выполняется условие $\beta'' - \theta'' = 0$. Используя выражения для β'' и θ'' , данные в Приложении 1, получим, что это условие выполняется при симметричных относительно ω_{ab} отстройках

$$\Delta_{cr} = \pm \frac{|\omega_{cr} - \omega_{ab}|}{ku} \approx \pm \left(\frac{\gamma_{ab}}{ku} \right)^2 \left[\frac{\gamma_a \gamma_b}{(\gamma_a + \gamma_b) \gamma_{ab}} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Разность $|\omega_{cr} - \omega_{ab}|$ составляет около 16 МГц для линии с $\lambda = 3.39$ мкм и около 3 МГц – для линии с $\lambda = 0.6328$ мкм. Вблизи этих отстроек за счет сильной связи между встречными волнами происходит перераспределение энергии между волнами. При отстройках частоты $\xi = (\omega - \omega_{ab})/(ku) < -\Delta_{cr}$ и $\xi > \Delta_{cr}$ (там, где $\theta'' < \beta''$) интенсивность сильной волны (т. е. волны с меньшими потерями) резонансно возрастает при одновременном уменьшении интенсивности слабой волны (волны с большими потерями). Внутри области частот $-\Delta_{cr} < \xi < \Delta_{cr}$ (там, где $\theta'' > \beta''$) интенсивность слабой волны возрастает за счет сильной волны. Если разность потерь встречных волн невелика, то в этом интервале частот может происходить генерация обеих волн; при этом за счет перераспределения энергии, обусловленной сильной связью, интенсивность волны с большими потерями оказывается больше интенсивности волны, у которой потери меньше. При возрастании разности потерь волна с большими потерями может полностью погасить волну, потери которой меньше. Появление резонансов интенсивности при отстройках частот, близких к $\pm\Delta_{cr}$, сопровождается резким изменением разностной частоты. Результаты численных расчетов, приведенные на рис. 2, а и б, подтверждают сделанные нами оценки.

В том случае, когда между встречными волнами создана фазовая невязимость $2\delta\omega = \delta\omega_r - \delta\omega_l$, в низкочастотной области $\omega < \omega_{ab}$ более сильной является волна, обладающая большей частотой, т. к. она, находясь ближе к центральной частоте перехода, имеет большее усиление. При $\omega > \omega_{ab}$ ситуация меняется, здесь большим усилением обладает волна, имеющая меньшую частоту. А поскольку вне области сильной связи происходит перераспределение энергии из слабой волны в сильную, то разность интенсивностей встречных волн

$$I_{r,1} = I \pm \frac{F(\omega - \omega_{ab})}{\beta'' - \theta''} = I \pm \Delta I \quad (13)$$

является нечетной функцией отстройки (здесь F – параметр, имеющий четную зависимость от отстройки) (см. рис. 2, в). По этой причине внутри области сильной связи зависимости интенсивностей встречных волн имеют X-образный вид. Разность частот (рис. 2, з) при этом является четной функцией отстройки. Внутри области силь-

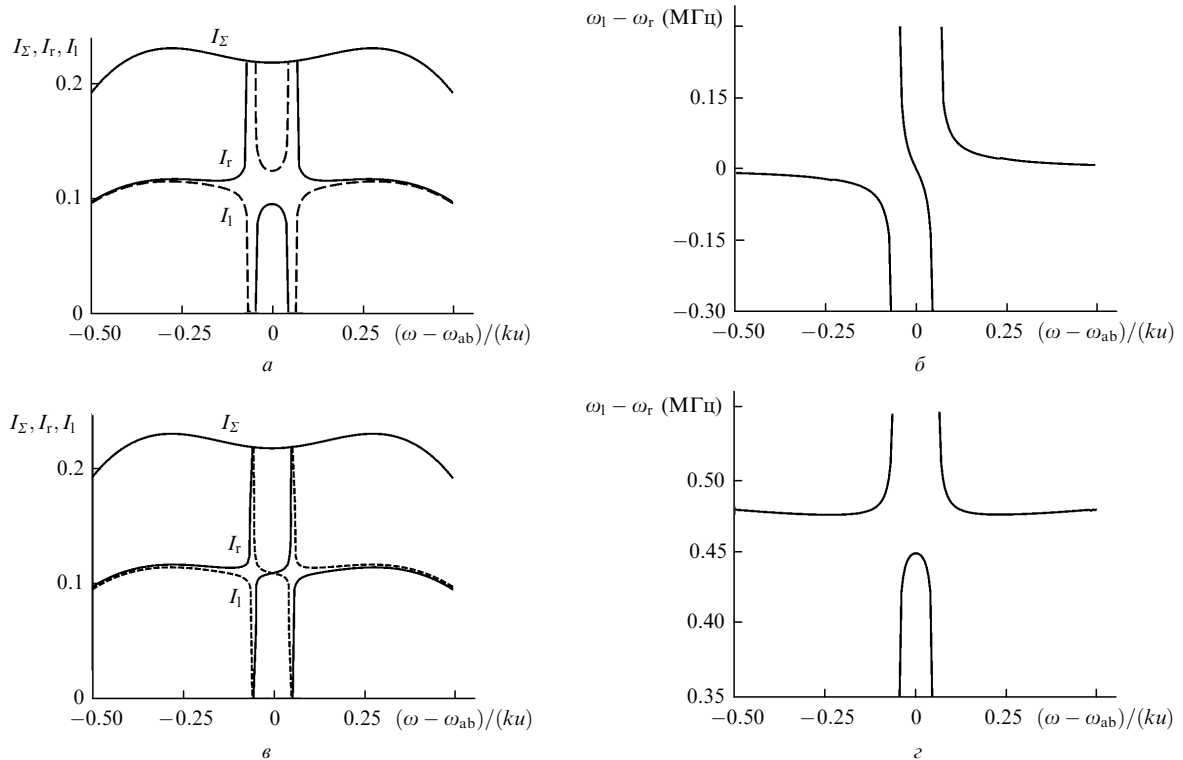


Рис.2. Расчетные зависимости безразмерных интенсивностей встречных волн I_r , I_l , их суммы I_Σ (а, б) и частотной невязимости $\omega_1 - \omega_r$ (б, з) от отстройки в случае применения устройства, создающего различные потери встречных волн, при $\epsilon_r = 1$, $\epsilon_l = 1.002$, $KH = 0.12$, $L = 1$ м (а, б), а также в случае применения устройства, обеспечивающего различие частот встречных волн $\delta\omega = 0.5$ МГц, при $KH = 0.12$, $L = 1$ м (в, з).

ной связи зависимость разности частот от отстройки имеет вид резонансного пика, центр которого совпадает с центром линии усиления. Отметим, что как при амплитудной, так и при фазовой невязимости зависимость суммы интенсивностей от отстройки имеет вид симметричной кривой с провалом вблизи центра линии усиления.

3. Результаты экспериментального исследования невязимых эффектов и попытки их объяснения

Впервые о неравенстве частот генерации встречных волн однододового кольцевого лазера без невязимых устройств было сообщено в работе [9]. Эксперимент проводился в лазере с квадратным резонатором (плечо 92 см), работавшем на длине волны $\lambda = 3.39$ мкм. При введении острия иглы либо лезвия бритвы в лазерный пучок (на расстоянии около 1 мм от оси пучка) были получены биения с частотой ~ 5 кГц. Отмечалось, что эффект, в дальнейшем названный дифракционной невязимостью, проявлялся сильнее при введении острия в пучок около окна трубки. Наблюдаемой разности частот $\Delta\omega$ авторы поставили в соответствие невязимность показателей преломления среды для встречных волн $\Delta n \sim 10^{-10}$, предположив, что причиной этой невязимости является насыщение интенсивности. Таким образом, уже в первой работе был отмечен нелинейный характер явления.

В [11] экспериментально исследовалась корреляция между разностью потерь, создаваемой невязимым элементом, и поведением интенсивностей встречных волн. Установлено, что при равенстве потерь встречных волн генерация каждой из них происходит во всей области отстройки. Неравенство потерь приводит к подавлению од-

ной из волн вблизи центра линии усиления при одновременном увеличении интенсивности другой волны. Увеличение разности потерь вызывало подавление одной из волн в большем интервале отстроек. Полученные в этой работе результаты полностью объясняются в рамках модели плоских волн (см. рис.2, а и б).

Подобные зависимости наблюдались и в лазерах без специально созданной амплитудной невязимости [10]. Приведенные на рис.3 зависимости интенсивностей встречных волн от отстройки свидетельствуют о том, что в резонаторе лазера существует источник амплитудной невязимости. Зависимость частоты биений при этом имела вид дисперсионной кривой. Авторы [10] сделали предположение о том, что добротности резонатора во встречных направлениях различны. Положив, что $|\Delta\eta|/\eta = 10^{-2}$ (где $\Delta\eta = (\eta_r - \eta_l)/2$), они смогли сопоставить полученные зависимости с теоретическими кривыми, описываемыми выражениями (9). Объяснить происхождение разности потерь встречных волн авторы не смогли. Ее существование просто постулировалось как в этой работе, так и во многих других (см., напр., [18, 36]). В работе [12], где была предпринята успешная попытка осуществления однонаправленной генерации в кольцевом лазере, впервые высказана идея о том, что источником неодинаковости потерь встречных волн является совместное действие дифракции и поперечной неоднородности активной среды. Здесь было введено понятие частотнозависимых потерь встречных волн, однако механизм, благодаря которому формируется их невязимность, указан не был.

При экспериментальном исследовании влияния фазовой невязимости, создаваемой фарадеевским элементом, на интенсивности и частоты генерации [11] были получены зависимости, которые хорошо согласуются с нашими расчетными данными (см. рис.2, в и з). Такого

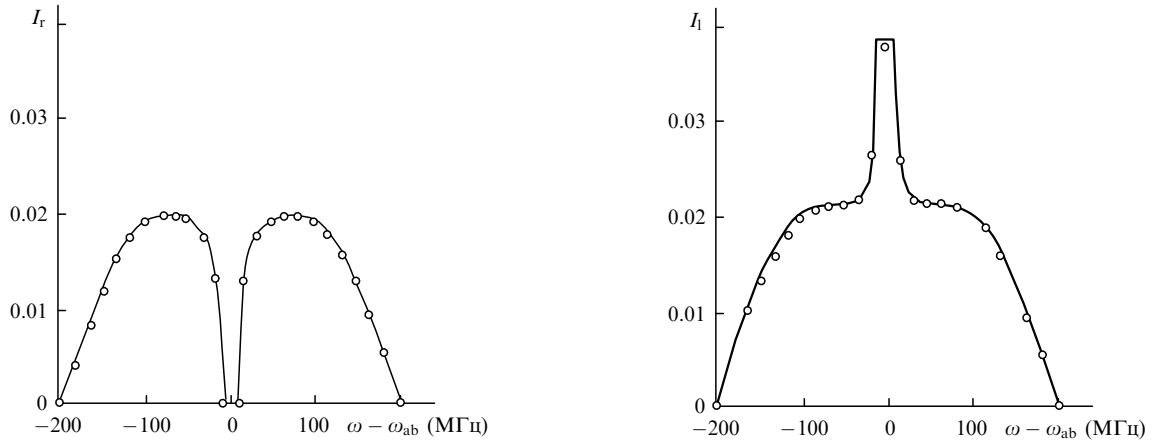


Рис.3. Зависимости от отстройки безразмерных интенсивностей генерации встречных волн I_r и I_l кольцевого лазера с симметричной диафрагмой [10].

рода зависимости наблюдались и при использовании резонаторов без невзаимных элементов в тех случаях, когда диафрагмирование резонатора приводило к его разъюстировке. В работе [13] опыты проводились как на чистом изотопе ^{20}Ne , так и на смеси изотопов ^{20}Ne , ^{22}Ne на длине волны $\lambda = 3.39$ мкм. Разрядная трубка длиной 0.18 м имела диаметр 3 мм и питалась от источника постоянного тока. Применение высокочастотного разряда (~ 40 МГц) практически не изменяло картину явления. Резонатор лазера ($L = 0.75$ м) образован двумя плоскими зеркалами и одним сферическим (радиус кривизны $R = 1.2$ м), которое в процессе работы могло быть заменено на плоское. Симметрично с разных сторон активной среды располагались две диафрагмы с возможностью регулировки как их расположения, так и диаметров отверстий. При смещении одной из диафрагм к оси или от оси резонатора на расстояние порядка долей миллиметра при размере отверстия ~ 1 мм наблюдалось различие интенсивностей встречных волн I_r и I_l , типичное поведение которых в случае чистого изотопа показано на рис.4. Разность $I_r - I_l$ определялась степенью введения диафрагмы в пучок, а знак изменялся при прохождении резонаторной частоты Ω через значение ω_{ab} . Зависимость возникающей при этом разности частот генерации от отстройки приведена на рис.5, где видно, что ее знак не изменялся во всей области генерации. Увеличение разрядного тока приводило к увеличению ΔI и $\Delta\omega$. Замена плоского зеркала сферическим увеличивала максимально достижимое расщепление частот $\Delta\omega$ в три раза (от 500 до 1500 кГц). Минимальная наблюдаемая разность частот $\Delta\omega$ (0.8 – 1.2 кГц) определялась полосой захвата.

В работе [13] было высказано предположение о том, что главной причиной невзаимности является радиальная неоднородность насыщенного показателя преломления среды. В силу невзаимной фокусировки, связанной с геометрией резонатора, воздействие встречных волн друг на друга может быть неодинаковым. Согласно [13] итогом неполного перекрытия пучков излучения в активной среде является различие траекторий встречных волн, которое изменяется при перестройке частоты из-за рефракции, возникающей при разъюстировке резонатора с асимметричной диафрагмой. Если излучение распространяется в среде не параллельно оси трубки, траектория пучка искривляется, отклоняясь в ту или иную сторону в зависимости от градиента показателя преломления среды. Знак этого градиента изменяется на обратный при

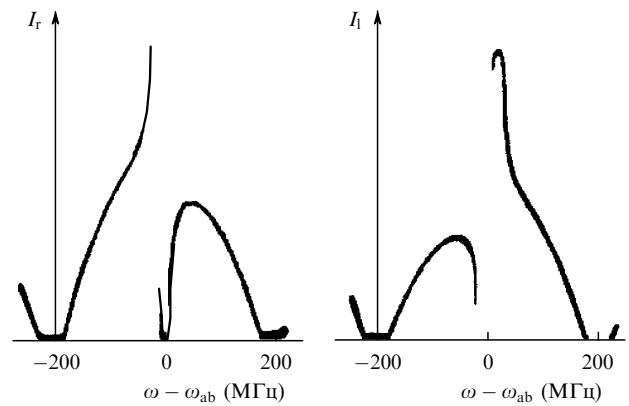


Рис.4. Зависимости от отстройки безразмерных интенсивностей генерации встречных волн I_r и I_l кольцевого лазера с асимметричной диафрагмой [13].

прохождении частоты ω через значение ω_{ab} . Этим авторы [13] объясняют искажение области генерации: при частотах $\omega > \omega_{ab}$ пучок наклоняется к оси трубки, усиление растёт и область генерации расширяется, а область частот $\omega < \omega_{ab}$ сужается.

Идея о том, что причиной невзаимности частот и интенсивностей является неодинаковость распределений полей встречных волн, высказанная в [13, 14], развита в работе [20]. В ней показано, что расщепление частот $\Delta\omega$ максимально, если диафрагма располагалась вблизи кю-

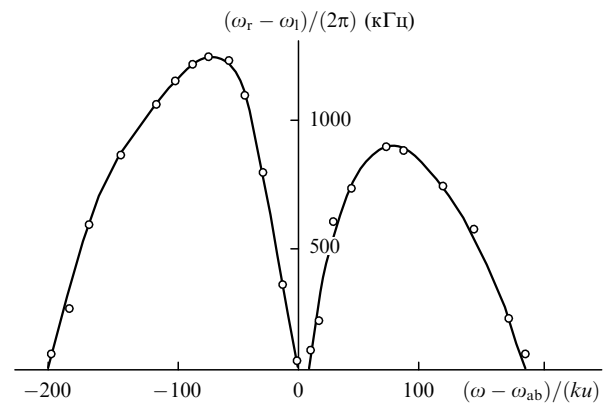


Рис.5. Зависимости разности частот генерации $(\omega_r - \omega_l)/(2\pi)$ встречных волн от отстройки для кольцевого лазера с асимметричной диафрагмой [13].

веты с активной средой. При смещении диафрагмы от кюветы (вдоль оси пучка) $\Delta\omega$ монотонно убывало, обращаясь в нуль, когда диафрагма располагалась в плоскости, приблизительно равноудаленной от концов кюветы. Перемещение диафрагмы через эту плоскость сопровождалось изменением знака $\Delta\omega$, а величина $\Delta\omega$ возрастала и достигала максимума, если диафрагма приближалась к другому краю кюветы. Зависимость от геометрии резонатора проявлялась и в том, что расщепление частот возрастало с увеличением кривизны зеркал резонатора.

Много лет спустя французские исследователи [22] повторили эксперимент, проведенный в работе [13], изменив при этом лишь некоторые параметры установки. Была сохранена схема трехзеркального кольцевого резонатора, выбор отношения длины резонатора $L = 1.2$ м к радиусу кривизны единственного сферического зеркала $R = 2$ м обеспечил примерное равенство g -параметров этого резонатора и того, который использовался в [13]. Диаметры диафрагм D_1 и D_2 равнялись 2.6 мм. Лазер также работал в режиме одной продольной моды на $\lambda = 3.39$ мкм. Но в отличие от [13] авторы работы [22] использовали разрядные трубки с большим внутренним диаметром (6 мм), что, по их мнению, должно было уменьшить влияние линзового эффекта. Это привело к уменьшению максимально достижимого расщепления частот при разъюстировке диафрагмы примерно в 35 раз по сравнению с таковым в [13]. Зависимость расщепления частот $\Delta\omega$ от отстройки $\omega - \omega_{ab}$ и в этом случае осталась почти четной (несколько несимметричной) функцией, подобной той, которая изображена на рис.5. Обращает на себя внимание хорошо выраженная асимметрия контуров интенсивности, одинаковая для встречных волн в съюстированном резонаторе (при $\Delta\omega = 0$). При перемещении диафрагмы перпендикулярно пучку появлялось различие в частотах и интенсивностях волн. Профили интенсивности приобретали различную асимметрию, при этом волна с большей асимметрией имела большую частоту. Для объяснения полученных результатов авторы [22] использовали идею, высказанную в [12], о неодинаковости потерь встречных волн. Они предположили, что причиной различия потерь встречных волн является разъюстировка резонатора. При этом в [22] предпринята попытка обосновать невязимость потерь на языке уравнений модели плоских волн, что, однако, принципиально невозможно. Более того, полученные в [22] зависимости интенсивностей и разности частот от отстройки свидетельствуют о том, что доминирующим механизмом невязимости в их экспериментах является фазовая невязимость, а не разность потерь встречных волн.

Еще одним подтверждением того, что использование симметричной и асимметричной диафрагм приводит к качественно разным результатам, служат данные измерений [21], полученные в лазере, работающем на $\lambda = 0.6328$ мкм. Показано, что замена симметричной ирисовой диафрагмы диафрагмой в виде полуплоскости приводила не только к увеличению разности частот на два порядка, но и к изменению ее знака. Еще раньше было обнаружено, что перемещение диафрагмы перпендикулярно пучку сопровождалось осцилляциями $\Delta\omega$ [9, 20].

Обобщая данные экспериментальных исследований этого явления [8–22] и сопоставляя их с результатами приведенных выше расчетов, выполненных в рамках модели плоских волн, можно сформулировать следующие положения.

1. Диафрагмирование пучка излучения кольцевого лазера приводит к невязимости частот и интенсивностей встречных волн. В случае применения симметричных диафрагм разность интенсивностей волн описывается четной, а разность частот – нечетной функцией отстройки частоты от центра линии усиления. Это позволяет утверждать, что в съюстированном резонаторе доминирующим механизмом, определяющим поведение частот и интенсивностей, является разность потерь встречных волн (амплитудная невязимость).

2. В случае применения в кольцевых лазерах несимметричных диафрагм возникающая разность интенсивностей встречных волн описывается нечетной, а разность частот – четной функцией отстройки частоты от центра линии усиления, что говорит о доминирующей роли фазовой невязимости в лазере с разъюстированным резонатором.

3. Невязимость потерь приводит к возможности получения однонаправленной генерации в лазере с устойчивым резонатором без применения невязимых элементов. Устранение невязимости ведет к тому, что обе волны существуют во всей области генерации.

4. Существование резонансов интенсивностей волн и разности их частот вблизи области сильной связи свидетельствует об амплитудной и/или фазовой невязимости. Поведение интенсивностей и частот генерации встречных волн в пределах этой области определяется тем, какой вид невязимости доминирует в данной установке.

5. Разности частот и интенсивностей генерации существенным образом зависят как от тока накачки и параметров перехода, так и от геометрии резонатора: кривизны зеркал, взаимного расположения элементов резонатора и кюветы с активной средой, ее диаметра, параметров и положения диафрагмы.

Кроме того, установлено, что диафрагмирование резонатора приводит как к асимметрии провала в контуре суммарной интенсивности встречных волн, так и к искажению области генерации [11, 13, 22, 23] в целом.

Чтобы понять, какие причины вызывают тот или иной механизм невязимости в лазерах без невязимых элементов, и объяснить полученные зависимости, необходимо решить задачу о собственных колебаниях резонатора, содержащего нелинейную среду, с учетом дифракции на его апертурах. Развитая ранее теория дифракционной невязимости частот и интенсивностей генерации [24–30] не могла адекватно описать найденные экспериментальные зависимости.

Характерной чертой развиваемого нами подхода [38] является возможность использования методов и результатов хорошо разработанной в настоящее время теории открытых резонаторов [39–41] применительно к исследованию характеристик лазеров со слабонелинейной средой. Этот подход, основанный на стандартной процедуре асимптотического разложения [42], позволил построить простое решение системы интегродифференциальных уравнений, определяющих собственные колебания резонатора, содержащего модельную диафрагму и слабонелинейную радиально неоднородную активную среду. Привлечение результатов расчетов собственных колебаний пассивных резонаторов, образованных зеркалами конечных размеров [39, 41], дало возможность связать изменение потерь и частот резонаторной моды с изменением ее объема, в нашем случае обусловленного действием линзовых и диафрагирующих свойств среды.

4. Собственные колебания кольцевого резонатора со слабонелинейной средой

Поскольку задача генерации встречных волн является нелинейной и явного решения не имеет, то единственный способ ее решения – метод последовательных приближений. Успех зависит от удачного выбора начального приближения с тем, чтобы уже в нем содержалась наиболее существенная информация об искомом решении. В газовых лазерах обычно используются зеркала с достаточно большими апертурами, так что структура мод этих лазеров хорошо описывается аппроксимацией Эрмита–Гаусса. В поле гауссовых пучков индуцированная поперечная неоднородность среды (обусловленная нелинейной частью поляризуемости (П.4)) имеет квадратичный характер. По этой причине в качестве невозмущенной системы рассмотрим резонатор с линейной по полю квадратично неоднородной активной средой, т. е. положим, что зависимость поляризуемости $\kappa_j^{(1)}$ от поперечных координат описывается квадратичной функцией (см. Приложение 2):

$$\begin{aligned} \kappa_j^{(1)}(x, y) &= \kappa_{0j}(1 - x^2/d_x^2 - y^2/d_y^2), \\ 2\pi\kappa_{0j} &= -K_0Z_j/k_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь κ_{0j} – поляризуемость на оси резонатора; d_x, d_y – полуширины распределения в направлениях осей x, y . Полученные результаты легко обобщаются на случай отрицательной кривизны профиля усиления (П.2.2).

Рассмотрим кольцевой оптический резонатор, в котором находится газоразрядная трубка длиной H с брестеровскими окнами, а в сечении z_t помещена диафрагма с гауссовым профилем пропускания

$$T(x, y) = \exp(-x^2/a_x^2 - y^2/a_y^2),$$

где a_x и a_y – полуширины диафрагмы в направлении осей x и y . Выбор такой модели обусловлен возможностью простого аналитического описания собственных колебаний резонатора в одномодовом приближении, т. к. потери поперечных мод растут вместе с их номерами. Проведенные нами численные расчеты собственных колебаний резонатора с гауссовой диафрагмой показали их хорошее качественное согласие с расчетами, выполненными для резонаторов с зеркалами конечных размеров. Здесь мы не рассматриваем эффект захвата частоты и считаем, что обратное отражение от элементов резонатора отсутствует. Эффекты деполяризации в таких резонаторах малы, излучение оказывается плоскополяризованным, что позволяет использовать скалярную модель поля в резонаторе.

Задача о собственных колебаниях резонатора, содержащего гауссову диафрагму и линейную квадратично неоднородную среду, решается в явном виде. Уравнения для нее имеют вид

$$(\Delta + k_j^2)E_j(x, y, z) = -4\pi k_j^2 P_j(x, y, z), \quad (15)$$

где Δ – оператор Лапласа. Эти уравнения дополнены условиями трансформации полей волн при прохождении через соответствующие элементы резонатора и условиями их воспроизводимости после полного обхода резонатора

$$E_j(x, y, z + L) = E_j(x, y, z). \quad (16)$$

Решение уравнения (15) будем искать в квазиоптическом приближении в виде

$$E_j(x, y, z) = E_{0j}\psi_j(x, y, z) \exp[ik_j\vartheta_j(z)] + \text{компл. сопр.}, \quad (17)$$

где E_{0j} – постоянные амплитуды встречных волн; $\vartheta_j(z)$ и $\psi_j(x, y, z)$ – медленно меняющиеся функции координат. Подставим разложение (17) в уравнение (15) и проведем соответствующие преобразования. Затем в соответствии с методом параболического уравнения [42] перейдем к безразмерным переменным $x \rightarrow x(k/L)^{1/2}$, $y \rightarrow y(k/L)^{1/2}$, $z \rightarrow z/L$ и приравняем нулю коэффициенты при последовательных степенях k . В главном порядке получаем уравнение эйконала

$$\frac{\partial\vartheta_j}{\partial z} = \frac{\partial\vartheta_1}{\partial z} = 1 + 2\pi\kappa_0 = n_z^{(1)}. \quad (18)$$

Члены первого порядка по k дают уравнения для медленных амплитуд волн $\psi_j(x, y, z)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2in_z^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + n_x^{(1)}x^2 + n_y^{(1)}y^2 \right] \psi_j(r) = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$n_p^{(1)} = -\pi\kappa_0(2L/d_p)^2 = 2K_0LZM_p \quad (p = x, y) \quad (20)$$

– поперечные составляющие коэффициента преломления среды; $M_p = L/(kd_p^2)$ – безразмерный параметр поперечной неоднородности среды; $Z_t = Z_1 = Z$. Вещественная часть $n_p^{(1)'$ определяет фокусирующие свойства среды. Действие мнимой части $n_p^{(1)''}$ можно сопоставить с действием диафрагмы с квадратичным законом пропускания.

Решение дифференциального уравнения (19) с комплексными коэффициентами $n_z^{(1)}$ и $n_p^{(1)}$ представляет собой хорошо известные функции Эрмита – Гаусса. Основная ТЕМ_{00q̄}-мода резонатора описывается гауссовым пучком с двумя плоскостями симметрии:

$$\psi_j(x, y, z) = \psi_{xj}(x, z)\psi_{yj}(y, z). \quad (21)$$

Используя формализм волновых матриц, представим выражение для $\psi_{xj}(x, z)$ в виде

$$\psi_{xj}(x, z) = \frac{1}{[m_{xj}(z)]^{1/2}} \exp\left[\frac{ix^2}{2q_{xj}(z)}\right]. \quad (22)$$

Аналогичная формула может быть записана и для плоскости yz . Здесь введены безразмерные параметры $q_{pj}^{-1}(z) = S_{pj}(z) + iW_{pj}(z) = s_{pj}(z)L + 2iL/[kw_{pj}^2(z)]$, которые характеризуют кривизны волновых фронтов s_{pj} и полуширины w_{pj} встречных гауссовых пучков в сечении z . Эти параметры преобразуются при прохождении пучков через резонатор по следующим правилам:

$$q_{pj}(z) = \frac{a_{pj}(z) + b_{pj}(z)q_{pj}(0)}{c_{pj}(z) + d_{pj}(z)q_{pj}(0)}. \quad (23)$$

Параметры m_{pj} преобразуются следующим образом:

$$m_{pj}(z) = a_{pj}(z) + b_{pj}(z)q_{pj}^{-1}(0). \quad (24)$$

Здесь $q_{pj}(0)$ – значения параметров q_{pj} в опорном сечении z_0 ; $a_{pj}(z)$, $b_{pj}(z)$, $c_{pj}(z)$, $d_{pj}(z)$ – элементы матрицы преобразования параметров пучка оптической системой, заключенной между плоскостями z_0 и z . Волновые матрицы, описывающие эволюцию гауссова пучка при распространении его в резонаторе, приведены в Приложении 3.

Чтобы найти q_{pr} в сечении z , необходимо путем перемножения волновых матриц отдельных элементов в порядке прохождения через них светового пучка найти матрицу полного обхода резонатора $A_p B_p C_p D_p$. В силу того, что коэффициенты преломления среды (18) одинаковы для встречных волн, матрицу резонатора для встречной волны найдем, поменяв в полученной матрице местами элементы A_p и D_p . Затем с учетом условия (16) из соотношений (23) найдем выражения для параметров $q_{pr,pl}^{-1}$ в сечении резонатора z :

$$q_{pr,pl}^{-1}(z) = \pm \frac{D_p(z) - A_p(z)}{2B_p(z)} + i \left[\frac{1 - G_p^2}{B_p^2(z)} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Входящий в (25) G_p -параметр резонатора, определенный как $G_p = G_{pr} = G_{pl} = (A_p + D_p)/2$, в идеальном резонаторе, где элементы матрицы $A_{0p} B_{0p} C_{0p} D_{0p}$ резонатора вещественны, сводится к вещественному параметру конфигурации резонатора $G_p = g_p$. В нашем случае G_p -параметр – комплексная частотнозависимая величина (см. формулу (П3.7)). Частотнозависимыми становятся и распределения полей волн. Представив (25) в виде

$$q_{pr,pl}^{-1}(z) = \pm S_{0p}(1 + U_{p1}) + iW_{0p}(1 + U_{p2}),$$

где значения W_{0p} и S_{0p} отвечают идеальному резонатору, а величины $U_{p1,p2} = U_{p1,p2}^1 + iU_{p1,p2}''$ определяют возмущение распределений полей средой и диафрагмой, мы получим, что взаимная (одинаковая для встречных пучков) деформация распределений полей определяется величинами $\delta W_p = W_{0p}U_{p2}'$ и $\delta S_p = S_{0p}U_{p1}'$, а невязимые составляющие

$$\Delta W_p = (W_{pr} - W_{pl})/2 = S_{0p}U_{p1}'', \quad (26)$$

$$\Delta S_p = (S_{pr} + S_{pl})/2 = -W_{0p}U_{p2}'.$$

В реальных лазерных системах, где диафрагма используется для селекции мод, именно она вносит основной вклад в невязимость поперечных распределений полей. Выражения для этих составляющих невязимости мы можем представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta W_p(z) &= N_p \frac{B_{0p}^2(z_t) - (z - z_t)^2}{B_{0p}^2(z)} \\ &= N_p \left[\frac{w_{0p}^2(z_t)}{w_{0p}^2(z)} - \frac{(z - z_t)^2}{B_{0p}^2(z)} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

откуда следует, что величина деформации распределений полей в значительной мере определяется геометрией резонатора. При этом невязимость ΔW_p максимальна в непосредственной близости от диафрагмы, по мере удаления от диафрагмы ΔW_p убывает. Поперечная неоднородность активной среды вносит дополнительный вклад

в величину деформации распределений полей встречных волн, и хотя этот вклад в общем случае существенно меньше искажений, вносимых диафрагмой, пренебрегать влиянием среды нельзя.

Амплитуды волн (22) воспроизводятся после полного обхода резонатора с точностью до постоянных распространения, выражения для которых мы получим, подставив (25) в (24):

$$\begin{aligned} A_p &= A_{pr} = A_{pl} = [m_p(z+1)]^{-1/2} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[G_p + (G_p^2 + 1)^{1/2} \right] \right\} = \exp \left(-\frac{i}{2} \arccos G_p \right). \end{aligned}$$

С учетом этого соотношения условие периодичности поля (16) имеет вид

$$i\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=x,y} \arccos G_p + kL \int_0^1 n_z^{(1)}(z) dz = 0. \quad (28)$$

Поскольку замена одного из полностью отражающих зеркал на полупрозрачное не влечет за собой изменений поперечной структуры полей, мы ввели потери ε_0 . Выбор знака в разложении

$$\arccos(G_p' + iG_p'') = -[\arccos(G_p'/\sigma_p) + 2\pi\tilde{q} - i \operatorname{arccosh} \sigma_p]$$

диктуется выполнением условия ослабления поля при полном обходе резонатора, где $\operatorname{arccosh} \sigma_p > 0$, а

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{1}{2} \left\{ \left[(1 + G_p')^2 + (G_p'')^2 \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left[(1 - G_p')^2 + (G_p'')^2 \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Мнимая часть уравнения (28) дает пороговое усиление $K_{0th}H$:

$$K_{0th}HZ'' = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=x,y} \operatorname{arccosh} \sigma_p. \quad (29)$$

Вещественная часть (28) определяет частоту, при которой выполняется условие (29):

$$\omega_{th} = \frac{c}{L} \left[\frac{1}{2} \sum_{p=x,y} \arccos(G_p'/\sigma_p) + 2\pi\tilde{q} + K_{0th}HZ' \right]. \quad (30)$$

Проанализируем полученные зависимости в случае слабого возмущения резонатора, выбрав в качестве малых параметров асимптотического разложения параметры гауссовой диафрагмы N_p и поперечной неоднородности среды $M_p \sim n_p^{(1)}$, которые имеют смысл величин, обратных эффективным числам Френеля. При этом положим, что

$$|n_p^{(1)}| < N_p < 1. \quad (31)$$

Кроме того, мы ограничим наше рассмотрение резонаторами, в которых одновременно выполняются условия $(1 - G_p')^2 \gg (G_p'')^2$ и $(1 + G_p')^2 \gg (G_p'')^2$. Тогда, используя соотношение (П3.9), получим выражение для потерь волн:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{p=x,y} \operatorname{arccosh} \sigma_p = \varepsilon_N + K_0 H \times$$

$$\times \sum_{p=x,y} \frac{w_{0p}^2(z_0)}{4d_p^2} \left\{ Z'' \left[1 + \frac{w_{0p}^2(z_t)}{2a_p^2} \right] \mu_{1p} + Z' \frac{w_{0p}^2(z_t)}{2a_p^2} \mu_{2p} \right\}, \quad (32)$$

где μ_{1p} , μ_{2p} – параметры конфигурации резонатора, выражения для них даны в Приложении 3. Первое слагаемое отвечает за потери на гауссовой диафрагме:

$$\varepsilon_N = \frac{1}{4} \sum_{p=x,y} \frac{N_p}{W_{0p}(z_t)} \left[1 + \frac{N_p}{2W_{0p}(z_t)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=x,y} \left[\frac{w_{0p}(z_t)}{2a_p} \right]^2 \left\{ 1 + \left[\frac{w_{0p}(z_t)}{2a_p} \right]^2 \right\}. \quad (33)$$

Два других слагаемых в (32) определяют частотнозависимое изменение потерь основной моды резонатора, связанное с действием квадратичной неоднородности активной среды. Величина $K_0 H Z''$, пропорциональная усилению и повторяющая его симметричный контур, отвечает за уменьшение усиления по сравнению с усилением поля слоем среды с однородным распределением усиления $K_0 H$. Уменьшение усиления мы можем сопоставить с увеличением потерь моды. Слагаемое, пропорциональное Z' , отвечает за изменение потерь на диафрагме, вызванное деформацией поперечного распределения поля линзой среды, и его зависимость от частоты имеет дисперсионную форму. При $\omega < \omega_{ab}$ рассеивающая линза среды, увеличивая ширину распределения поля, вызывает увеличение потерь на диафрагме. В центре линии при $\omega = \omega_{ab}$ это слагаемое равно нулю, при $\omega > \omega_{ab}$ линза среды работает как собирающая, что приводит к уменьшению потерь.

С учетом (29) и (32) выражение для порогового усиления представим в виде

$$K_{0th} H = (\varepsilon_0 + \varepsilon_N) \left\{ Z'' - \sum_{p=x,y} \left[\frac{w_{0p}(z_0)}{2d_p} \right]^2 \right.$$

$$\left. \times \left[\mu_{1p} Z'' + \mu_{2p} Z' \frac{w_{0p}^2(z_t)}{2a_p^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (34)$$

Используя формулу (П3.10), из уравнения (30) получаем выражение для отстройки пороговой частоты ω_{th} от собственной частоты идеального резонатора $\Omega = (c/L) \times [(1/2) \sum_{p=x,y} \operatorname{arccos} g_p + 2\pi\tilde{q}]$:

$$\omega_{th} - \Omega = \Omega_N + \frac{c}{L} K_{0th} H$$

$$\times \left\{ Z' \left[1 - \sum_{p=x,y} \frac{w_{0p}^2(z_0)}{2d_p^2} \mu_{p1} \right] + Z'' \sum_{p=x,y} \frac{w_{0p}^2(z_0)}{2d_p^2} \frac{w_{0p}^2(z_t)}{2a_p^2} \mu_{p2} \right\}. \quad (35)$$

Величина

$$\Omega_N = \frac{c}{2L} \sum_{p=x,y} \left[\frac{w_{0p}(z_t)}{2a_p} \right]^4 \frac{g_p}{(1 - g_p^2)^{1/2}}$$

отвечает за сдвиг частоты резонатора, обусловленный уменьшением объема моды из-за дифракции на диафрагме.

Из уравнения (35) видно, что дисперсионная линза среды уменьшает эффект линейного затягивания частоты (его определяет слагаемое, пропорциональное Z'). Действительно, при $\omega < \omega_{ab}$ линза среды работает как рассеивающая, она увеличивает объем моды и тем самым уменьшает частоту резонатора, сдвигая ее от частоты ω_{ab} . При $\omega > \omega_{ab}$ линза среды – собирающая, ее действие, уменьшая объем моды, увеличивает частоту резонатора. В центре линии усиления при $\omega = \omega_{ab}$ оптическая сила линзы равна нулю. Асимметричный сдвиг частоты активной моды появляется в результате совместного действия двух диафрагм: гауссовой и частотнозависимой, сформированной средой. Этот сдвиг пропорционален Z'' , откуда следует, что он максимален в том случае, когда частота резонатора Ω настроена на центр линии.

Таким образом, решение задачи построено: найдены распределения полей встречных волн в произвольном сечении резонатора, а также значения потерь и частотных отстроек на пороге генерации. Установлено, что совместное действие поперечной неоднородности среды и диафрагмы является причиной искажения зоны генерации (асимметрии относительно ω_{ab} потерь $\varepsilon^{(1)}$ (32) и пороговых частот ω_{th} (35) резонаторной моды), которое наблюдалось в [11, 13, 22, 23]. Асимметрию зоны генерации (которая пропорциональна параметру μ_{2p} (П3.12)) можно минимизировать путем выбора оптимального взаимного расположения элементов резонатора и радиусов кривизны его зеркал. Кроме того, асимметрия зависит от полуширины диафрагмы a_p : при уменьшении ее от a_{1p} до a_{2p} она увеличивается примерно в $(a_{2p}/a_{1p})^2$ раз. Асимметрия зависит также от степени поперечной неоднородности среды, которая определяется как геометрией и током разряда, так и давлением в трубке с активной средой.

Наши результаты, полученные в рамках теории резонаторов, находятся в противоречии с тем, что было получено в [27, 29]. Приведем формулы (14) для пороговых частот и усилий из работы [27] (они следуют из уравнений (16) работы [25]):

$$\omega^{(1)} = \Omega + \frac{c}{L} \chi', \quad \varepsilon^{(1)} = \varepsilon_N + \chi'', \quad (36)$$

$$\chi = Z \frac{\int K(x, y) \psi_r(x, y, z) \psi_l(x, y, z) dV}{\int \psi_r(x, z) \psi_l(x, z) dV} = \chi' + i\chi'', \quad (37)$$

где V – объем резонатора. Зависимость коэффициента усиления K от поперечных координат определяется функцией (П2.1). Проведя соответствующие алгебраические преобразования выражения (37) с учетом свойства унитарности волновых матриц, получим

$$\chi = K_{0th} H Z \left[1 + \frac{1}{h} \sum_{p=x,y} M_p \int_{-h/2}^{h/2} (q_{pl}^{-1} + q_{pr}^{-1})^{-1} dz \right]. \quad (38)$$

Сравнивая выражения (36) – (38) с соответствующими формулами настоящей работы, нетрудно увидеть их несоответствие. Различными получатся и зависимости пороговых усилий и частот от поперечного номера моды. При решении нелинейной задачи идеология построения решения путем умножения параболического уравнения для медленной амплитуды одной из волн на амплитуду другой волны и последующего интегрирования по объ-

ему резонатора сохранена во всех работах [24–30]. Частоты и интенсивности генерации волн при этом определялись без учета условия периодичности поля, поперечные распределения полей в резонаторе находились без учета влияния активной среды, потери встречных волн полагались равными. Ниже будет показано, что именно дополнительная деформация поперечных распределений полей встречных волн, обусловленная нелинейной средой, приводит к различию в потерях для встречных волн.

5. Нелинейная теория

Задача о собственных колебаниях кольцевого оптического резонатора с активной газовой средой решается в приближении слабой нелинейности. Это позволяет считать, что нелинейность среды не изменит общего характера решения уравнения (15), полученного в первом приближении. Нелинейная поляризованность среды вычислена в приближении слабого насыщения:

$$2\pi P_r(x, y, z) = -\frac{1}{k_r} K(x, y) \times [Z_r - \beta_r I_r(x, y, z) + \theta_1 I_1(x, y, z)] E_r(x, y, z). \quad (39)$$

Это выражение показывает, что в поле гауссовых пучков пространственная неоднородность нелинейной среды обусловлена как поперечной неоднородностью ненасыщенного коэффициента усиления среды $K(x, y)$, так и пространственной неоднородностью внутрирезонаторных полей. Действительно, для гауссовых пучков имеем

$$I_j(x, y, z) = I_{zj}(z) \exp[-2x^2/w_{xj}^2(z) - 2y^2/w_{yj}^2(z)], \quad (40)$$

где $I_{zj} = I_j f_j(z)$ – интенсивность j -волны на оси резонатора; f_j определено формулой (П1.2); параметр

$$f_j = |m_{xj}(z)m_{yj}(z)|^{-1} \exp\left[-2k_j \int_0^z n_{zj}''(t) dt\right]$$

описывает эволюцию пучка вдоль оси резонатора. Следуя логике параболического приближения, представим интенсивности встречных гауссовых пучков как

$$I_j(x, y, z) = I_{zj}(z) [1 - 2x^2/w_{xj}^2(z) - 2y^2/w_{yj}^2(z)]$$

и запишем выражение для нелинейной поляризованности среды (39) следующим образом:

$$2\pi P_r(x, y, z) = -\frac{1}{k_r} K_0 \left\{ Z_r - \beta_r I_{zr}(z) - \theta_1 I_{z1}(z) + \sum_{p=x,y} [Z_r M_{pr} - \beta_r \Phi_{pr}(z) I_{zr}(z) - \theta_1 \Phi_{p1}(z) I_{z1}(z)] p^2 \right\}, \quad (41)$$

где $\Phi_{pj}(z) = M_p + W_{pj}(z)$ – безразмерные параметры поперечной неоднородности нелинейной среды.

Подставим выражение (41) в уравнение (15) и проведем соответствующие преобразования с учетом того, что подлежащие определению величины I_{zj} являются медленными функциями координаты z . Тогда из (15)–(17) получаем уравнения для показателей преломления нелинейной активной среды на оси резонатора

$$n_{zr}(z) = 1 - \frac{1}{k_r} K_0 [Z_r - \beta_r I_{zr}(z) - \theta_1 I_{z1}(z)] \quad (42)$$

и медленных амплитуд встречных волн

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \pm 2in_{zj}(z) \frac{\partial}{\partial z} + n_{xj}(z)x^2 + n_{yj}(z)y^2 \right] \psi_j(r) = 0, \quad (43)$$

где

$$n_{pr}(z) = 2K_0 H [M_p Z_r - \beta_r \Phi_{pr}(z) I_{zr}(z) - \theta_1 \Phi_{p1}(z) I_{z1}(z)]. \quad (44)$$

Уравнения для $n_{z1}(z)$ и $n_{p1}(z)$ получаются соответственно из уравнений (42) и (44) заменой индексов $r \leftrightarrow 1$. Уравнение (43) с переменными коэффициентами в общем случае решить невозможно. Однако, когда изменение коэффициентов преломления среды $n_j(x, y, z) = n_{zj}(z) + n_{xj}(z) \times x^2 + n_{yj}(z) y^2$ на длине волны оказывается малым, можно эффективно исследовать распространение оптических пучков в неоднородной среде, используя технику переменных $abcd$ -матриц с медленно меняющимися элементами [43] (см. Приложение 3).

Итак, решение уравнений (43) с медленно меняющимися в зависимости от координаты z коэффициентами по-прежнему ищется в виде гауссовых пучков (21) и (22). Мы повторяем ход решения задачи на собственные колебания резонатора с линейной средой. Чтобы определить собственные колебания кольцевого резонатора с нелинейной средой необходимо решить систему шести уравнений: двух уравнений (43) для определения поперечных распределений полей встречных волн и четырех вещественных уравнений для интенсивностей и частот генерации, вытекающих из уравнений баланса фаз и амплитуд для встречных волн

$$i\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=x,y} \arccos G_{pj} + k_j L \int_0^1 n_{zj}(z) dz = 0. \quad (45)$$

Получить аналитическое решение такой системы в общем виде не представляется возможным, поэтому мы прибегли к компьютерным расчетам. Однако, воспользовавшись некоторыми приближениями, мы смогли получить основные формулы в обозримом виде и объяснить основные закономерности поведения частот и интенсивностей генерации, полученные путем численных расчетов, и таким образом выяснить физический механизм появления невзаимности. Для этого мы использовали приближение «короткой трубки». Это приближение означает, что на длине трубки $h = H/L$ изменения $n_{zj}(z)$, $W_{pj}(z)$ и $n_{pj}(z)$ вдоль оси z пренебрежимо малы, и можно заменить эти функции их значениями в сечении z_0 и воспользоваться известной матрицей [44] для поперечно неоднородной среды. Кроме того, мы ограничились случаем, когда возмущающие резонатор параметры малы (31). В этих приближениях, используя соотношения (П3.9), получаем выражения для потерь встречных волн:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{(1)} - K_0 H \sum_{p=x,y} [(\beta_r'' I_{zr} \Phi_{pr} + \theta_1'' I_{z1} \Phi_{p1}) W_{0p}^{-1} \mu_{1p} + (\beta_r' I_{zr} \Phi_{pr} + \theta_1' I_{z1} \Phi_{p1}) W_{0p}^{-1} N_p \mu_{2p}], \quad (46)$$

где $\varepsilon_r^{(1)}$ – частотнозависимые потери резонатора, вычисленные в линейном приближении.

Из условий равенства насыщенного усиления каждой из волн ее потерям ε_r (46), которые следуют из уравнений (45), получим интенсивности встречных волн и представим их в виде $I_{zr} = I_z + \Delta I_z$, $I_{zl} = I_z - \Delta I_z$, где

$$I_z = \eta \frac{1}{(\beta'' + \theta'')v_1 - (\beta' + \theta')v_2}; \quad (47)$$

$$\Delta I_z = \eta v_1^{-2} \sum_{p=x,y} \frac{\Delta W_p}{W_{0p}} \times \frac{(\beta'' - \theta'')\mu_{1p} - (\beta' - \theta')\mu_{2p}N_p}{(\beta''v_1 - \beta'v_2)^2 - (\theta''v_1 - \theta'v_2)^2}; \quad (48)$$

$$v_1(z_0) = 1 - \sum_{p=x,y} \mu_{1p}\Phi_p(z_0)/W_{0p}(z_0);$$

$$v_2(z_0) = \sum_{p=x,y} \mu_{2p}N_p\Phi_p(z_0)/W_{0p}(z_0);$$

$$\eta = \frac{\eta_r + \eta_l}{2}; \quad \eta_j = \frac{\alpha_j - \varepsilon_j^{(1)}}{K_0H}$$

– относительное превышение ненасыщенным усилением $\alpha_j = K_0HZ_j''$ линейных потерь $\varepsilon_j^{(1)}$ (32); $\Phi_p = (\Phi_{pr} + \Phi_{pl})/2 = M_p + W_p$; $W_p = (W_{pr} + W_{pl})/2$.

Из уравнения (47) видно, что суммарная интенсивность встречных волн $2I_z$ имеет провал вблизи центра линии усиления. «Диафрагма насыщения», уменьшая потери, тем самым уменьшает глубину провала (через величину, пропорциональную v_{1p}). Член, пропорциональный v_{2p} , отвечает за асимметрию провала, связанную с асимметричным характером потерь.

Подставив выражения для интенсивностей волн в (46), получим, что в резонаторе с нелинейной средой и диафрагмой потери волн в общем случае различны: $\varepsilon_{r,1} = \varepsilon \pm \Delta\varepsilon$, где

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} - K_0HI_z \sum_{p=x,y} \frac{W_p}{W_{0p}} [(\beta'' + \theta'')\mu_{1p} + (\beta' + \theta')\mu_{2p}N_p]; \quad (49)$$

$$\Delta\varepsilon = -K_0HI_z \sum_{p=x,y} \frac{\Delta W_p}{W_{0p}} (1 + \rho_p) \times [(\beta'' - \theta'')\mu_{1p} + (\beta' - \theta')\mu_{2p}N_p]; \quad (50)$$

$$\rho_p = \frac{W_p}{W_{0p}} \frac{(\beta'' - \theta'')\mu_{1p} + (\beta' - \theta')\mu_{2p}N_p}{(\beta'' - \theta'')v_{1p} - (\beta' - \theta')v_{2p}}. \quad (51)$$

Вещественные части условий (45) дают нам уравнения для частот генерации, из которых с учетом (47), (48) получаем выражения для их разности $\Delta\omega = \Delta\omega^{(1)} + \Delta\omega^{(3)}$, где нелинейная составляющая

$$\Delta\omega^{(3)} = (\alpha - \varepsilon^{(1)}) \frac{c}{2L} \sum_{p=x,y} N_p \mu_{2p} v_1 \frac{\Delta W_p}{W_{0p}} \times \frac{(\beta' - \theta')^2 + (\beta'' - \theta'')^2}{(\beta''v_1 - \beta'v_2)^2 - (\theta''v_1 - \theta'v_2)^2}; \quad \alpha = (\alpha_r + \alpha_l)/2. \quad (52)$$

Нарушение симметрии в расположении элементов резонатора приводит к появлению как амплитудной, так и фазовой невязимости, при этом доминирующей в лазере со сдвинутой резонатором является амплитудная невязимость. Действительно, разность потерь встречных волн (50) является поправкой первого порядка малости по N_p к параметрам гауссовых пучков встречных волн, невозмущенных дифракцией: $\Delta\varepsilon = O(N_p)$, поскольку $\Delta W_p = O(N_p)$ (27). Разность частот волн (52) оказывается величиной более высокого порядка малости: $\Delta\omega^{(3)} = O(N_p^2)$. Отметим, что в пассивном резонаторе с гауссовой диафрагмой потери резонаторной моды, обусловленные диафрагмой, представлены величиной первого порядка, в то время как вызванные диафрагмой сдвиги частоты – величинами второго порядка малости по параметру N_p .

Правильность оценок, которые можно сделать на основании формул (47)–(50), подтверждена многочисленными компьютерными расчетами, которые были проведены для резонаторов различной конфигурации (как трех-, так и четырехзеркальных). Выбор значений радиусов зеркал при этом диктовался только соблюдением условия устойчивости резонатора.

Причину неравенства потерь легко понять, если рассмотреть действие системы, состоящей из диафрагмы и попеременно неоднородной нелинейной среды, в целом. Нелинейные составляющие оптической силы линзы и диафрагирующих свойств среды, которые вызывают дополнительную невязимую деформацию полей встречных волн, пропорциональны параметру поперечной неоднородности среды W_{pl} . Неравенство распределений полей встречных волн на длине трубки с нелинейной средой, обусловленное действием диафрагмы, является причиной различия и апертуры диафрагмы, и оптической силы линзы среды для встречных волн. Попадая после прохождения такой «анизотропной» среды на диафрагму, встречные пучки приобретают различные потери. На рис.6 прослеживается хорошая корреляция между невязимым изменением $\delta w_x = \Delta w_x(z_1 + 0) - \Delta w_x(z_1 - 0)$ поперечных распределений полей встречных волн на диафрагме (здесь $\Delta w_x = [w_{xr}(z_1 + 0) - w_{xl}(z_1 - 0)]/2$) и разностью x -составляющих их потерь $\Delta\varepsilon_x = (\varepsilon_{xr} - \varepsilon_{xl})/2$ при

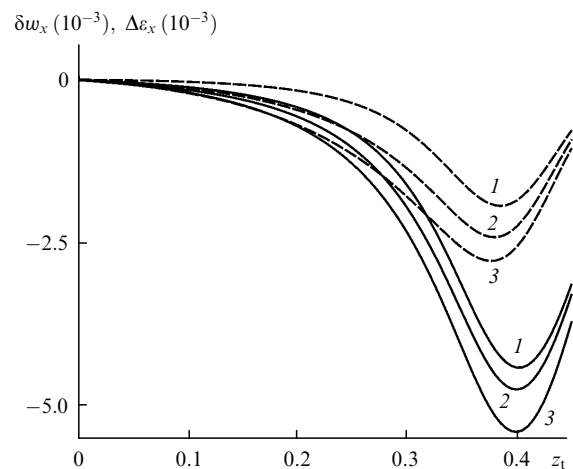


Рис.6. Зависимости невязимых изменений поперечных распределений полей δw_x встречных волн (штриховые кривые) и разности их потерь $\Delta\varepsilon_x$ (сплошные кривые) от положения z_1 диафрагмы в резонаторе при безразмерной отстройке $\xi = 0.1$ (1), 0 (2) и -0.1 (3), $g_x = -0.99$, $K_0H = 0.5$, $z_0 = 0.5$, $d_x = d_y = 1$ мм.

различных безразмерных отстройках $\xi = (\omega - \omega_{ab})/(ku)$ и положениях диафрагмы. При этом основной вклад в не-взаимность потерь вносит неодинаковость диафрагмирующих свойств нелинейной среды. Соответствующий член в (50), пропорциональный разности $\beta'' - \theta''$, имеет четную зависимость от отстройки частоты $\omega - \omega_{ab}$. Величина, пропорциональная $\beta' - \theta'$, определяет асимметричную зависимость от отстройки нелинейной составляющей потерь относительно центральной частоты перехода: «линза насыщения» изменяет поперечные распределения полей встречных волн согласно дисперсионному закону, благодаря чему потери на диафрагме приобретают дополнительную, нечетную по отстройке составляющую.

При этом потери сложным образом зависят от геометрии резонатора, параметров активной среды и отстройки частоты генерации от центральной частоты перехода. В том случае, когда роль дифракции пренебрежимо мала ($N_p = 0$), потери являются симметричной функцией отстройки. По мере роста влияния дифракции увеличивается и асимметрия нелинейных составляющих потерь. Знак и величина асимметрии потерь определяются соотношением линейной и нелинейной частей поперечных составляющих коэффициента преломления среды (44).

Доминирующая роль механизма не-взаимностей потерь определяет поведение не-взаимностей интенсивностей и частот встречных волн (рис.7): разность интенсивностей является четной функцией отстройки частоты генерации относительно частоты перехода и изменяет

свой знак только внутри зоны сильной связи (рис.7,а), сопровождающая ее разность частот, типичное поведение которой показано на рис.7,б, является нечетной функцией отстройки.

Не-взаимности интенсивностей ΔI и частот $\Delta\omega$ максимальны, если диафрагма располагается вблизи кюветы с активной средой. На рис.8 представлены зависимости потерь и интенсивностей встречных волн в случае, когда диафрагма установлена за кюветой, в непосредственной близости от нее. В этом случае увеличение не-взаимности потерь приводит к подавлению одной из волн в достаточно широком диапазоне отстроек, как это имело место в экспериментах [11]. При определенных значениях параметров резкое изменение насыщенных потерь на границе области генерации может привести к скачкообразному нарастанию интенсивности на этой границе. Такой асимметричный скачок определяется геометрией резонатора: он тем больше, чем больше отношение $W_{pi}/W_{op} = (w_{op}/w_{pi})^2$. Экспериментальные подтверждения существования данных эффектов в кольцевых системах содержатся в [13], исследованию искажения зоны генерации и образования стартового скачка интенсивности в лазерах с двухзеркальными резонаторами посвящены работы [45]. Изменяя параметры диафрагмы и геометрию резонатора мы можем как уменьшить, так и увеличить разность потерь встречных волн, а значит уменьшить или увеличить область однонаправленной генерации. По мере удаления диафрагмы от кюветы (вдоль пучка) не-взаимность потерь монотонно убывает и в некоторой точке обращается в нуль. Переход через эту точку сопро-

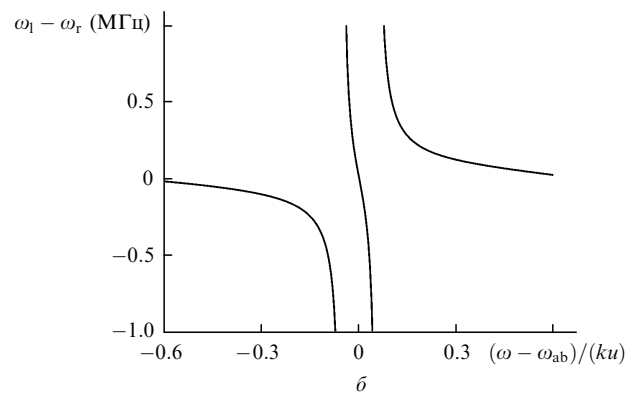
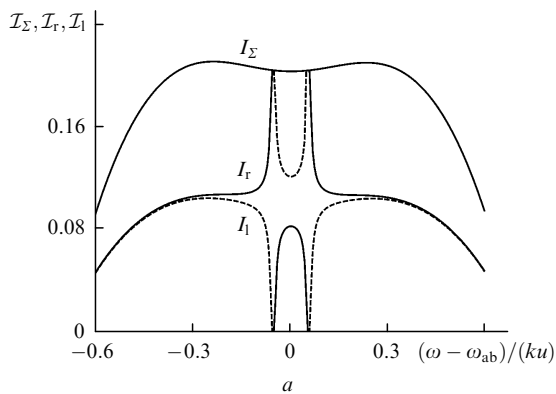


Рис.7. Зависимости безразмерных интенсивностей I_r, I_l , их суммы I_Σ (а) и разности частот $\omega_1 - \omega_r$ (б) встречных волн от отстройки при $g_x = 0.038, a_x = a_y = 1.2$ мм, $d_x = d_y = 1$ мм, $z_0 = 0.125, z_1 = 0.625, \epsilon_0 = 0.1, KH_0 = 0.3$.

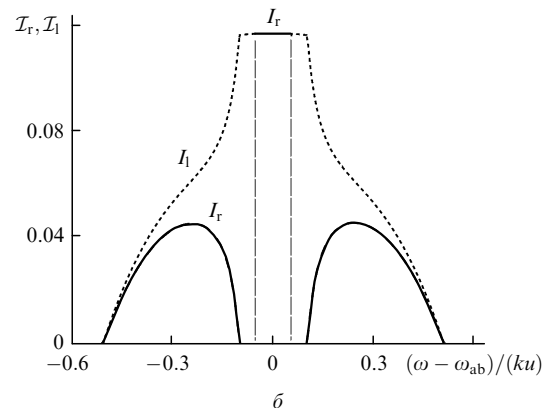
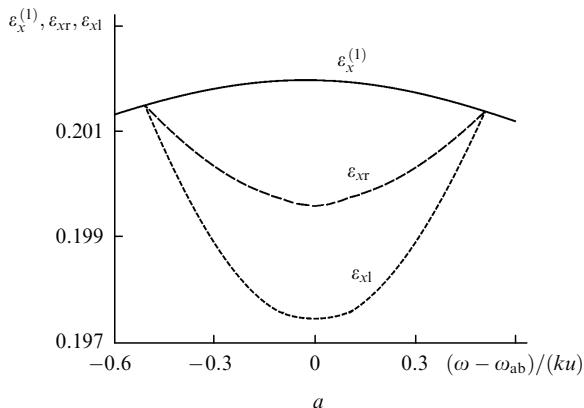


Рис.8. Зависимости x-составляющих потерь $\epsilon_x^{(1)}, \epsilon_{xr}, \epsilon_{xl}$ (а) и интенсивностей (б) встречных волн I_r, I_l от отстройки при $g_x = 0.038, a_x = a_y = 1$ мм, $z_0 = 0.125, z_1 = 0.15, \epsilon_0 = 0.3, KH_0 = 0.6$.

вождается изменением знаков $\Delta\mathcal{I}$ и $\Delta\omega$, а их величины вновь нарастают, если диафрагма приближается к другому концу кюветы. Устранение невязности приводит к тому, что двухволновый режим существует во всей области генерации, что и было экспериментально продемонстрировано в [11].

Проведенные вычисления показали, что при варьировании радиуса кривизны сферического зеркала R , а также размера диафрагмы a_p характер зависимостей интенсивностей и разности частот от отстройки сохраняется. Поскольку эффект невязности частот и интенсивностей волн нелинейный, то понятно, почему при малых апертурах диафрагмы он мал – в этом случае велики потери и соответственно мала нелинейность. При увеличении апертуры до некоторого значения невязность быстро растет, а затем, когда апертура диафрагмы становится больше ширины гауссова пучка, она начинает убывать.

Зависимости интенсивностей от отстройки существенно различаются для положительного и отрицательного профилей усиления $K(x, y)$ (см. формулы (П2.1), (П2.2)), особенно это проявляется при малых значениях d_p . Для этих профилей поправки к ненасыщенным потерям за счет поперечной неоднородности среды различаются знаком. Различаются и насыщенные потери. В случае положительного профиля $K(x, y)$ насыщение пропорционально сумме параметров поперечной неоднородности $W_{pj} + M_p$, а в случае отрицательного профиля – их разности $W_{pj} - M_p$. Это приводит к различной зависимости потерь, фазовых сдвигов и, следовательно, интенсивностей волн от отстройки. Как правило, за счет насыщения показателя преломления потери на границе зоны генерации скачкообразно уменьшаются. Исключения составляют резонаторы с очень узкими газоразрядными трубками, кривизна профиля усиления среды которых $K(x, y)$ по тем или иным причинам отрицательна. Здесь на границе области генерации может наблюдаться увеличение потерь резонаторной моды. Отметим, что, как следует из приведенных в Приложении 2 данных, зависимость $K(x, y)$ может изменяться в процессе генерации. Это может привести к изменению характера асимметрии контура интенсивности. Расчеты, проведенные для лазера, работающего на смеси изотопов $^{20}\text{Ne} - ^{22}\text{Ne}$, показали, что и в этом случае характер невязности сохраняется.

Подробно поведение интенсивностей встречных волн внутри области сильной связи будет исследовано в другой работе. Здесь мы обратим внимание на то, что форма пиков интенсивностей встречных волн внутри области сильной связи в значительной степени определяется разностью потерь этих волн. При малой разности потерь, как видно из рис.7,а и границы областей существования генерации обеих волн практически совпадают с границами области сильной связи. По мере увеличения разности потерь волна с большими потерями по-прежнему генерируется во всей области сильной связи; при этом частотный интервал, в котором генерируется волна с меньшими потерями внутри области сильной связи, может уменьшиться до нуля (рис.8,б).

6. Фазовая невязность встречных волн

Приведем данные численного расчета интенсивностей и частот встречных волн для резонатора, подобного тому, который применялся в экспериментах [13] и [22]. В

трехзеркальный резонатор с одним сферическим и двумя плоскими зеркалами симметрично относительно сферического зеркала помещалась трубка с активной средой. Две диафрагмы с координатами z_{11} и z_{12} были расположены симметрично относительно концов газоразрядной трубки, центр которой находится в сечении $z_0 = 0.5$. В том случае, когда размеры обеих диафрагм одинаковы, частоты и интенсивности встречных волн были равными. На рис.9 приведены зависимости суммы $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_j$ интенсивностей $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_1$ встречных волн кольцевого лазера. Верхняя кривая соответствует большой ширине радиального распределения ненасыщенного коэффициента усиления $d = d_x = d_y$ (П2.1). Отчетливо прослеживается асимметрия зависимости интенсивности от отстройки. При этом интенсивность волн в низкочастотной области отстроек ($\omega - \omega_{ab} < 0$) выше, чем в высокочастотной ($\omega - \omega_{ab} > 0$). В работе [22], где использовалась широкая газоразрядная трубка, и поэтому ширина поперечного распределения ненасыщенного усиления была достаточно большой, зависимость интенсивности от отстройки выглядела подобным образом. Здесь основной вклад в асимметрию потерь (49), а значит и в асимметрию интенсивности (47), вносит поперечная неоднородность нелинейной среды, индуцированная полем. С уменьшением d зависимость интенсивности от отстройки становится практически симметричной относительно частоты ω_{ab} (штриховая кривая). В этом случае действие поперечной неоднородности линейного коэффициента усиления $K(x, y)$ компенсируется влиянием неоднородности, наведенной полем. Такая ситуация была экспериментально реализована в работе [13] на установке с достаточно узкой трубкой. Дальнейшее уменьшение d приводит к доминирующей роли неоднородности $K(x, y)$. В этом случае интенсивность волн в низкочастотной области отстроек ($\omega - \omega_{ab} < 0$) меньше, чем в высокочастотной ($\omega - \omega_{ab} > 0$) (нижняя кривая). На рис.9 хорошо видна асимметрия зоны генерации относительно ω_{ab} , которая возрастает с увеличением параметра неоднородности среды (с уменьшением d).

При разьюстировке резонатора либо путем перемещения диафрагмы [13, 22], либо поворотом зеркал [13] проявлялась доминирующая роль фазовой невязности (см. рис.4 и 5). Поскольку такая разьюстировка не приводит к существенному изменению характера невязности поперечных распределений полей встречных

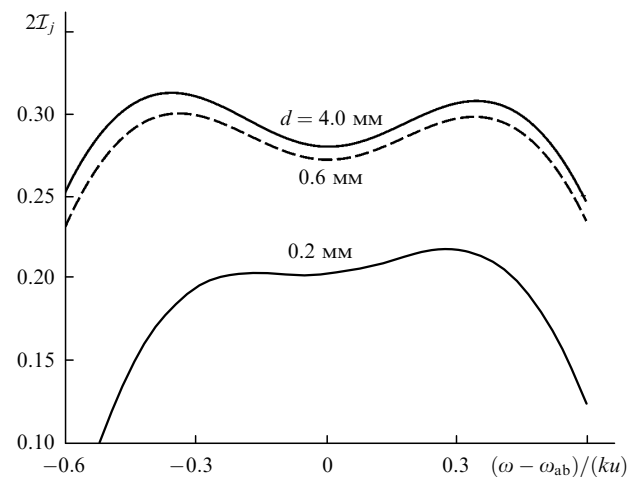


Рис.9. Зависимости суммы интенсивностей встречных волн $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_1$ от отстройки при положительном профиле усиления, $a_{1p} = a_{2p} = 1$ мм, $z_0 = 0.5$, $z_{11} = 0.2$, $z_{12} = 0.8$, $R = 1.2$ м, $\epsilon_0 = 0.1$, $K_0 H = 0.3$.

волн [46], нужно искать дополнительные источники фазовой невязимности, которые проявляются при разьюстировке.

Теоретические расчеты [47], подтвержденные экспериментально [47–50], показали, что основным источником фазовой невязимности является ленгмюровский дрейф нейтральных возбужденных атомов неона. Механизм дрейфа в разряде постоянного тока описан в [47], где проведен расчет скорости дрейфа атомов неона для случая малой концентрации их в активной среде. Установлено, что поток атомов по направлению к аноду локализован вблизи стенок трубки, а по направлению к катоду – вблизи оси газоразрядной трубки. Скорости дрейфа достигают 100 см/с [50]. Существуют и конкурирующие механизмы дрейфа, такие как катодорез, диссоциативная рекомбинация молекулярных ионов неона и др. В [49] получены значения разностной частоты встречных волн кольцевого лазера, обусловленные в отдельности дрейфом атомов в результате эффекта Ленгмюра и диссоциативной рекомбинации молекулярных ионов неона. Однако тот факт, что характер невязимности сохраняется и при высокочастотной накачке плазмы разряда [13], говорит о существовании дополнительных механизмов, вызывающих направленное движение возбужденных атомов. В этой связи представляет интерес рассмотреть вопрос о термодиффузионном разделении рабочих газов в газоразрядной трубке.

В смеси двух разнородных газов массоперенос осуществляется как за счет градиента концентрации газов (концентрационный поток), так и за счет градиента температуры (термодиффузионный поток) [51]. Радиальное распределение температуры смеси He–Ne в газоразрядной стеклянной трубке принято описывать функцией Бесселя первого рода нулевого порядка [52]. Экспериментальная проверка этого положения [53] обнаружила сравнительно более высокую температуру в центральной части газового разряда по сравнению с той, которую дает указанное распределение. Таким образом, в трубках малого радиуса имеет место контракция (сжатие) разряда, что существенно увеличивает градиент температуры. В неизотермической системе, содержащей бинарную газовую смесь, это приводит к разделению компонентов, так что более тяжелый газ смещается в направлении потока тепла, а более легкий – в направлении градиента температуры [54]. Это обуславливает возникновение градиента концентраций в смеси, имевшей первоначально однородный состав [51, 55], что вызывает появление направленных потоков компонентов смеси. Влияние поперечных потоков атомов можно скомпенсировать предварительной юстировкой [13, 20–22], но оно проявится при разьюстировке резонатора.

Перемещение диафрагмы перпендикулярно плоскости резонатора, равно как и перекося зеркал в резонаторе с плоскими зеркалами, приводит к смещению оси пучка, а в резонаторе со сферическими зеркалами – к повороту оси резонатора [41, 46]. При этом оптическая ось образует некоторый угол с осью трубки (по оценкам авторов [13], в их эксперименте этот угол составлял от 1 до 3 угловых минут), что обуславливает появление ненулевой составляющей проекции скорости v_z на оптическую ось резонатора, т. е. появление продольного потока. Его направление определяется знаком угла разьюстировки, а величина – значением этого угла и градиентом температуры в трубке. В пользу такого объяснения говорит раз-

личие экспериментальных данных, полученных в [13] и [22]. Увеличение диаметра разрядной трубки в два раза (от 3 мм в [13] до 6 мм в [22]) при идентичных параметрах резонаторов привело к уменьшению расщепления частот более чем в тридцать раз. Авторы [22] видят причину такого различия в том, что в узких трубках радиальная неоднородность ненасыщенного коэффициента усиления (эффект линейной газовой линзы) проявляется гораздо сильнее, чем в широких. Однако наш теоретический анализ показал, что этот эффект не может привести к доминирующей роли фазовой невязимности. Измерения, проведенные в [49], показывают, что разностная частота изменяется обратно пропорционально радиусу разрядной трубки, т. е. в нашем случае она может измениться только в четыре раза. Главную причину уменьшения фазовой невязимности мы видим в том, что уменьшение сечения газоразрядной трубки вызывает увеличение градиента температуры, а значит в узкой трубке сильнее проявится несовпадение оптической оси с осью трубки.

Чтобы учесть разьюстировку резонатора, вызванную перемещением диафрагмы перпендикулярно плоскости резонатора, мы поставили ей в соответствие определенные значения проекции v_z скорости атомов на оптическую ось резонатора z . Теперь при вычислении поляризованности среды (см. Приложение 1) мы должны в максвелловском распределении атомов по скоростям провести замену $v \rightarrow v - v_z$, приведя его к виду $W(v) = [1/(u\sqrt{\pi})] \times \exp[-(v - v_z)^2/u^2]$, а в выражениях, определяющих зависимость поляризованности среды в полях встречных волн от отстройки, следует выполнить преобразования $\omega_j - \omega_{ab} \rightarrow \omega_j \pm kv_z - \omega_{ab}$.

Степень разьюстировки, а значит и скорость v_z , зависит как от положения асимметричной диафрагмы в резонаторе, так и от степени асимметрии апертуры относительно оптической оси, а точнее, от отношения $[\delta a_p \times \omega_{op}^{-1}(z_t)]^2$, где δa_p – сдвиг центра диафрагмы от оптической оси. Поясним это на примере трехзеркального резонатора с одним сферическим зеркалом, трубка со средой в котором расположена так, что ее центр совпадает с шейкой каустики пучка в резонаторе. Если поместить в этот резонатор асимметричную диафрагму вблизи газоразрядной трубки, то угол наклона χ оптической оси к оси трубки будет максимальным. По мере удаления диафрагмы от трубки угол χ уменьшается, обращаясь в нуль, когда диафрагма находится на сферическом зеркале (симметрично относительно центра среды). При дальнейшем передвижении диафрагмы угол χ меняет знак, а его значение растет по мере приближения диафрагмы к другому концу трубки. При известных параметрах разряда и угле наклона χ (т. е. степени разьюстировки резонатора) можно вычислить значение v_z .

На рис.10 представлены данные численного расчета интенсивностей встречных волн и разностей их частот, выполненного при различных значениях $\bar{v} = v_z/u$. Хорошо видно, что при значениях \bar{v} , близких к нулю, преобладает амплитудный механизм невязимности, связанный с разностью потерь. Фазовая невязимность ничтожно мала, что обуславливает практическую симметрию относительно ω_{ab} зависимостей от отстройки как интенсивностей встречных волн, так и разности их частот. Увеличение \bar{v} приводит к возрастанию асимметрии кривых относительно центральной частоты перехода, а затем, когда роль фазовой невязимности становится доминирующей, – к изменению их характера. Разность

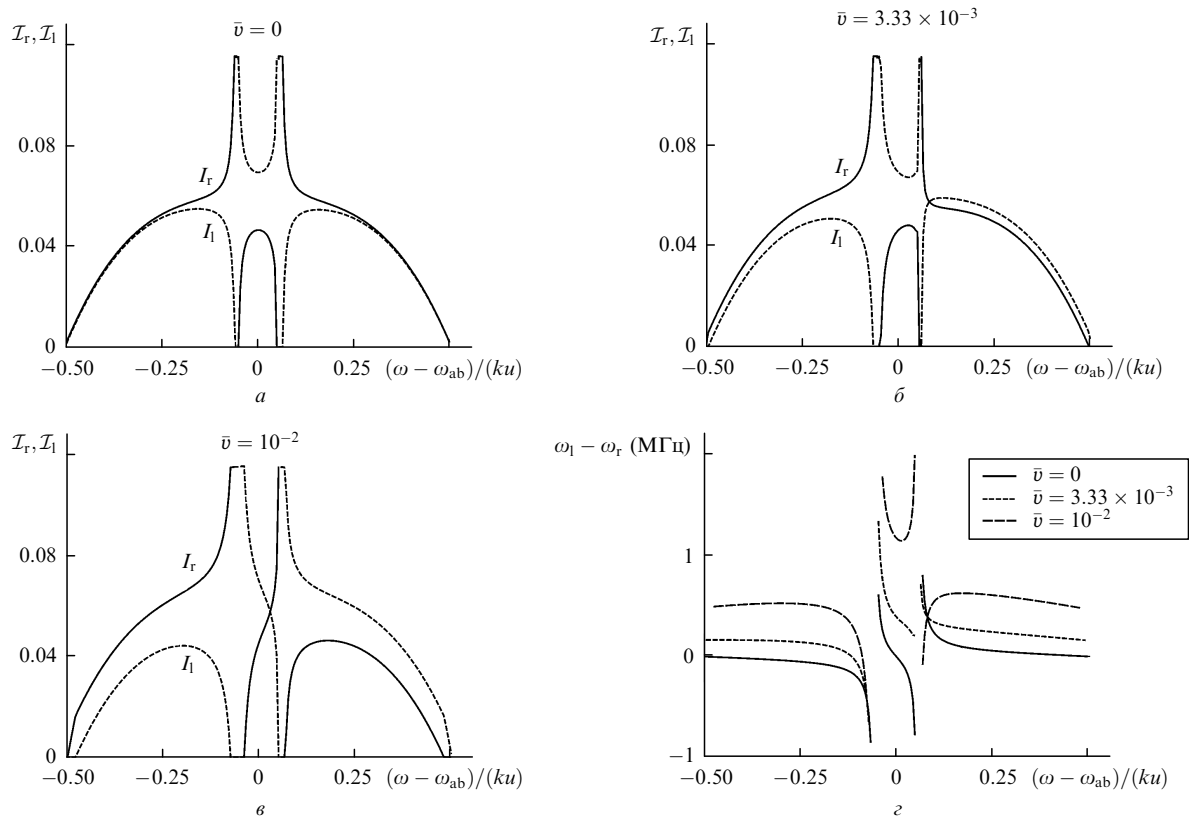


Рис.10. Зависимости безразмерных интенсивностей $\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_l$ (а-в) и разности частот $\omega_1 - \omega_r$ (г) встречных волн от отстройки при различных значениях $\bar{v} = v_z/u$, $a_{1p} = 2$ мм, $a_{2p} = 1.6$ мм. Значения других параметров те же, что и для рис.9.

частот теперь является четной функцией, в то время как разность интенсивностей генерации встречных волн – нечетной функцией отстройки.

Увеличение роли фазовой невязимости ведет к качественному изменению поведения интенсивностей и разности частот внутри области сильной связи. Это положение подтверждается исследованием, проведенным в работе [19], где при модуляции периметра резонатора была получена X-образная зависимость интенсивности выходного излучения от отстройки, подобная изображенной на рис.10,в.

Следует отметить, что в четырехзеркальных резонаторах механизм фазовой невязимости проявляется сильнее, чем в трехзеркальных, поскольку резонатор с нечетным числом зеркал является слаборазъюстируемым по сравнению с резонатором, образованным четным числом зеркал [41].

7. Выводы

Проведенный анализ опубликованных экспериментальных данных по влиянию дифракционных явлений на частоты и интенсивности генерации встречных волн и их сравнение с теоретическими результатами позволили провести классификацию невязимых эффектов, связанных с дифракцией, и сделать следующие основные выводы.

1. Совместным действием поперечной неоднородности активной среды и дифракции объясняется асимметрия зоны генерации и контуров интенсивностей встречных волн относительно центральной частоты перехода. Этот эффект может проявляться даже при симметричном расположении элементов в резонаторе.

2. Система диафрагма + нелинейная среда, помещенная в кольцевой резонатор несимметричным образом, образует невязимое устройство, приводящее к неравенству потерь и частот генерации встречных волн.

3. Доминирование механизма неравенства потерь над механизмом фазовой невязимости в лазере со съюстированным резонатором определяет характер полученных зависимостей: разность интенсивностей встречных волн является четной функцией отстройки средней частоты $\omega - \omega_{ab}$, в то время как сопровождающая ее разность частот – нечетной.

4. Неравенство потерь создает возможность существования однонаправленной генерации в кольцевом лазере без невязимых устройств. Область частот однонаправленной генерации может намного превышать область сильной связи. При устранении причин, приводящих к неодинаковым условиям распространения встречных волн, обе волны существуют во всей области генерации и их интенсивности равны.

5. Разъюстировка резонатора может привести к доминированию роли фазовой невязимости, когда разность интенсивностей встречных волн описывается нечетной функцией отстройки, а разность частот – четной.

6. В реальной ситуации указанные механизмы возникновения невязимости могут проявляться одновременно, что приводит к асимметричному поведению разности частот и интенсивностей встречных волн относительно ω_{ab} .

7. Частотная и/или фазовая невязимости, существующая в резонаторе газового лазера, работающего на чистом изотопе, вызывает появление вблизи центра линии резонансов интенсивностей и разности частот встречных волн. Их происхождение не связано с существованием резонансов насыщенных коэффициентов усиления

среды n_j'' (значения которых определяются величиной потерь), они возникают в результате нелинейного взаимодействия волн в среде. При этом резонансы интенсивностей сопровождаются резонансами показателей преломления среды n_j' для встречных волн.

8. Для повышения точности измерений, проводимых с помощью кольцевых газовых лазеров, необходимо всестороннее исследование плазмы газового разряда в узких трубках. Проведенные до сих пор зондовые и резонаторные измерения параметров плазмы в процессе генерации, а также теоретическое рассмотрение вопроса позволяют делать лишь качественные оценки их вклада в изучаемые явления.

Приложение 1

Предполагается, что зависимость поляризованности активной среды $P(x, y, z)$ от поля $E(x, y, z)$ отличается от линейной не слишком сильно. Поэтому связь этих величин можно описать в рамках низших порядков теории возмущений [34] по малому параметру насыщения (имеющему смысл безразмерной интенсивности)

$$\mathcal{I}_j(x, y, z) = \frac{|d_{ab}E_j(x, y, z)|^2 \gamma_a + \gamma_b}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b \gamma_{ab}}, \quad (П1.1)$$

и представить поляризуемость в виде суммы линейной ($\chi_j^{(1)}$) и нелинейной ($\chi_j^{(3)}$) составляющих: $P_j = \chi_j E_j = (\chi_j^{(1)} + \chi_j^{(3)})E_j$. В случае плоских волн формула (П1.1) принимает вид

$$\mathcal{I}_j(z) = \frac{|d_{ab}E_j(z)|^2 \gamma_a + \gamma_b}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b \gamma_{ab}}. \quad (П1.2)$$

Для разреженных газов, контур спектральных линий которых обусловлен эффектом Доплера из-за теплового движения атомов, $\chi_j^{(1)}$ дается выражением

$$2\pi\chi_j^{(1)} = -KZ_j/k_j, \quad (П1.3)$$

где

$$Z_j = Z(\zeta_j) = 2i \int_0^\infty \exp(-\rho^2 + 2i\rho\zeta_j) d\rho$$

– плазменная функция комплексного аргумента $\zeta_j = (\omega - \omega_{ab} + i\gamma_{ab})/(ku)$; $K = 2\pi d_{ab}^2 N/(\hbar u)$ – коэффициент усиления на единицу длины; d_{ab} – дипольный момент перехода; N – стационарный ненасыщенный избыток плотности активных атомов (плотность возбуждения); u – среднеквадратичная скорость атомов. Нелинейная часть поляризуемости г-волны, вычисленная в третьем порядке теории возмущений, находится из выражения

$$2\pi\chi_r^{(3)} = \frac{1}{k_r} K(\beta_r \mathcal{I}_r + \theta_1 \mathcal{I}_1). \quad (П1.4)$$

Здесь

$$\beta_r = iZ_r'' + 2i \frac{\gamma_{ab}}{ku} (1 + \zeta_r Z_r); \quad \theta_1 = \sum_{l=1}^4 \theta_{1l}; \quad (П1.5)$$

$$\theta_{11} = \frac{1 + i\Delta}{2(1 + \Delta^2)} (Z_r + Z_1); \quad \theta_{12} = -\frac{i}{2\Delta} (Z_r + Z_1^*); \quad (П1.6)$$

$$\theta_{13} = \frac{f\gamma}{\gamma_{ab}} \sum_{n=a,b} |v_n|^{-2} \left[Z(\zeta_{r1}^{(n)}) - \frac{Z_r - Z_1^*}{2} - \alpha_n \theta_{12} \right]; \quad (П1.7)$$

$$\theta_{14} = \frac{f\gamma}{\gamma_{ab}} \sum_{n=a,b} v_n^{-2} \left\{ Z_r \left[1 + 2 \left(\frac{\gamma_{ab}}{ku} \right)^2 v_n v \right] - Z(\zeta_{r1}^{(n)}) + \frac{2v_n \gamma_{ab}}{ku} \right\}; \quad (П1.8)$$

$$\Delta = \frac{\omega - \omega_{ab}}{\gamma_{ab}}; \quad \omega = \frac{\omega_r + \omega_l}{2}; \quad \zeta_{r1}^{(n)} = \frac{\omega_r - \omega_l + i\gamma_n}{2ku};$$

$$v = \Delta + i; \quad v_n = \Delta + i\alpha_n; \quad \alpha_n = 1 - \frac{\gamma_n}{2\gamma_{ab}};$$

$$f = \frac{\gamma_a \gamma_b}{4\gamma^2}; \quad \gamma = \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}.$$

Приложение 2

Систематическое изучение зависимости $K(x, y)$ от совокупности физических параметров в узких газоразрядных трубках пока не проведено. Радиальная неоднородность поляризуемости обусловлена неоднородностью коэффициента усиления $K(x, y)$, которая определяется многими факторами: геометрией разряда, составом газовой смеси, параметрами накачки [56–60], выбором рабочего перехода и др. На рис.1П2,а и б приведены радиальные зависимости усиления в достаточно широкой газоразрядной трубке, помещенной в резонатор He–Ne-лазера, ($\lambda = 1.15$ мкм) [56], которые иллюстрируют тот факт, что вид зависимости усиления от тока разряда определяется давлением в трубке. При небольшом давлении (1 Тор) с ростом тока разряда усиление растет (рис.1П2,а), ширина распределения при этом уменьшается. При давлении 3 Тор с ростом тока накачки усиление уменьшается, сменяясь поглощением (рис.1П2,б).

Результаты измерений, проведенных в узкой газоразрядной трубке при оптимальном давлении на двух переходах с $\lambda = 0.6328$ и 3.39 мкм [57] показали, что при одном и том же давлении зависимости коэффициента усиления $K(x, y)$ от тока накачки различны для разных переходов. Если при больших токах накачки в центре распределения $K(x, y)$ для $\lambda = 0.6328$ мкм наблюдался провал (см. рис.1П2,в), то для излучения с $\lambda = 3.39$ мкм (см. рис.1П2,г) зависимость $K(x, y)$ от тока оказалась весьма слабой и провал обнаружен не был.

В работах [56, 57] возбуждение разряда осуществлялось постоянным током. В [58] исследовалось распределение $K(x, y)$ в газоразрядной трубке (внутренний диаметр ~ 3 мм) He–Ne-лазера ($\lambda = 0.6328$ мкм) при высокочастотном возбуждении. Оказалось, что при удалении от стенок кюветы усиление при возбуждении переменным током нарастает значительно быстрее, чем при возбуждении постоянным током. Однако вид зависимостей сохраняется: с ростом тока накачки усиление в центре кюветы начинает уменьшаться и в конце концов сменяется поглощением.

Обобщая данные экспериментальных работ, можно сказать, что в достаточно широких диапазонах изменения тока разряда и давления рабочей смеси He–Ne-лазеров радиальная зависимость коэффициента усиления K довольно хорошо описывается одной из зависимостей

$$K(x, y) = K_0(1 - x^2/d_x^2 - y^2/d_y^2), \quad (П2.1)$$

$$K(x, y) = K_0(1 + x^2/d_x^2 + y^2/d_y^2). \quad (П2.2)$$

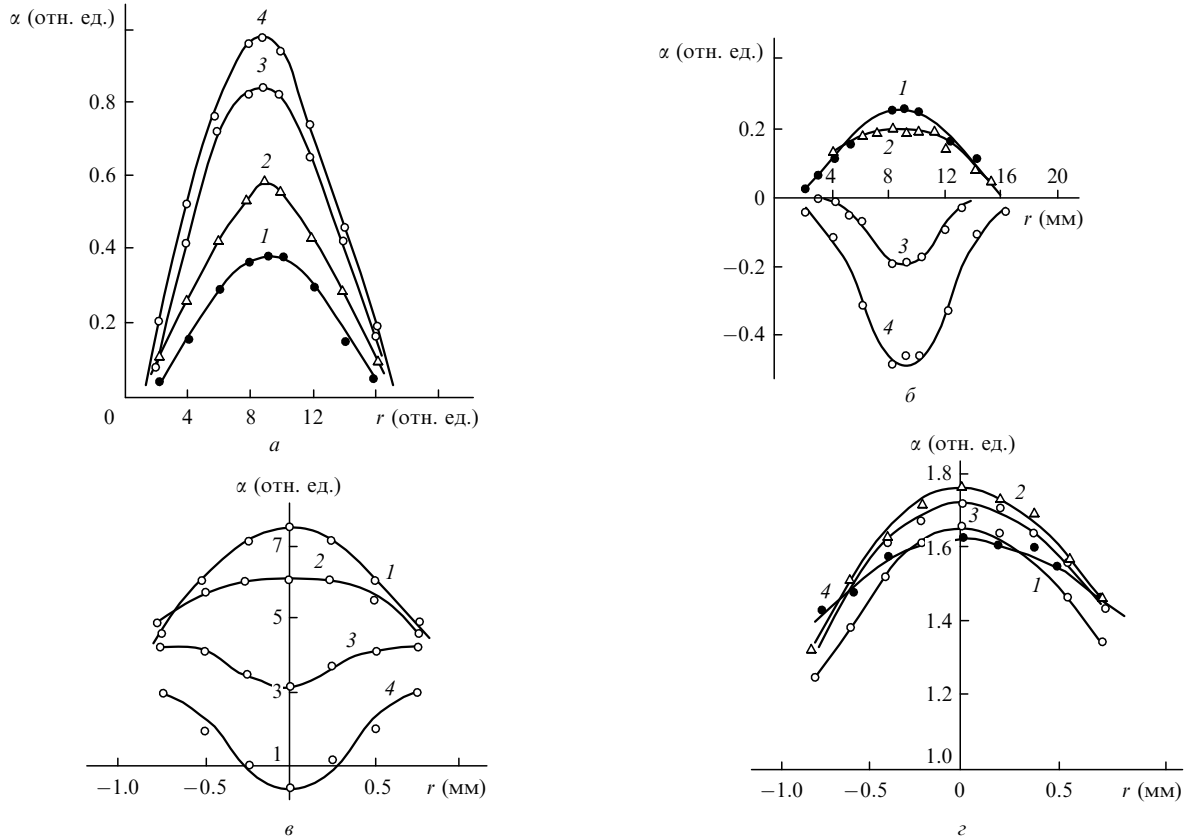


Рис. 1П2. Радиальные зависимости коэффициента усиления α для $\lambda = 1.15$ (а, б), 0.6328 (б) и 3.39 мкм (з) при давлении в трубке 1 (а) и 3 мм рт. ст. (б), токе накачки 5 (1), 10 (2), 20 (3) и 45 мА (4) [56] (а, б), а также 10 (1), 15 (2), 20 (3) и 40 мА (4) [57] (в, з).

Здесь K_0 – коэффициент усиления на оси резонатора; d_x, d_y – полуширины распределения в направлениях поперечных осей x, y . Кривизну профиля распределения (П2.1) принято называть положительной, а распределение (П2.2) – отрицательной.

Приложение 3

Для определения комплексных параметров $q_{xj}(z)$ и $p_{xj}(z)$ подставим (22) в уравнение (43) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x . В результате получаем, что $q_{xj}(z)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$n_{zj}(z) \frac{dq_{xj}}{dz} = 1 - n_{xj}(z)q_{xj}^2, \quad (П3.1)$$

а параметр $p_{xj}(z)$ выражается через $q_{xj}(z)$ квадратурой

$$p_{xj}(z) = -\frac{1}{2} \int_0^z \frac{dt}{n_{zj}(t)q_{xj}(t)}. \quad (П3.2)$$

Уравнение Риккати с переменными коэффициентами в общем случае решить невозможно. В [43] показано, что если коэффициенты в уравнении Риккати представлены медленными функциями координат, то плоскопараллельному слою квадратично неоднородной активной среды может быть поставлена в соответствие матрица

$$a_{pj}(z) = \left[\frac{n_{pj}(0)}{n_{pj}(z)} \right]^{1/4} \cosh U_{pj}(z) + \frac{n'_{pj}(0)}{4n_{pj}(0)}$$

$$\times \frac{1}{[n_{pj}(0)n_{pj}(z)]^{1/4}} \sinh U_{pj}(z),$$

$$b_{pj}(z) = \frac{1}{[n_{pj}(0)n_{pj}(z)]^{1/4}} \sinh U_{pj}(z),$$

$$c_{pj} = [n_{pj}(0)n_{pj}(z)]^{1/4} \sinh U_{pj}(z) - \frac{n'_{pj}(z)}{4n_{pj}(z)} \left[\frac{n_{pj}(0)}{n_{pj}(z)} \right]^{1/4}$$

$$\times \cosh U_{pj}(z) + \frac{n'_{pj}(0)}{4n_{pj}(0)} \left[\frac{n'_{pj}(z)}{n_{pj}(0)} \right]^{1/4} \cosh U_{pj}(z) \quad (П3.3)$$

$$- \frac{n'_{pj}(0)}{16n_{pj}(0)} \frac{n'_{pj}(z)}{n_{pj}(z)} \frac{1}{[n_{pj}(0)n_{pj}(z)]^{1/4}} \sinh U_{pj}(z),$$

$$d_{pj} = \left[\frac{n_{pj}(z)}{n_{pj}(0)} \right]^{1/4} \cosh U_{pj}(z) - \frac{n'_{pj}(z)}{4n_{pj}(z)}$$

$$\times \frac{1}{[n_{pj}(0)n_{pj}(z)]^{1/4}} \sinh U_{pj}(z),$$

$$U_{pj}(z) = \int_0^z n_{pj}^{1/2}(t) dt.$$

В формулах (П3.3) штрих означает производную по z . В том случае, когда комплексный показатель преломления среды $n_{pj}(z)$ не зависит от продольной координаты z , эта матрица приобретает известный вид [44]:

$$T_{pj}^m(z) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{n_{pj}} z & (1/\sqrt{n_{pj}}) \sinh \sqrt{n_{pj}} z \\ \sqrt{n_{pj}} \sinh \sqrt{n_{pj}} z & \cosh \sqrt{n_{pj}} z \end{pmatrix}. \quad (\text{П3.4})$$

В качестве начального сечения z_0 выберем середину слоя активной среды и поместим диафрагму в том же плече резонатора на расстоянии $-z_t$ от конца слоя. Это позволяет в простой форме выделить в явном виде матрицу идеального резонатора $T_{0pr} = A_{0p}B_{0p}C_{0p}D_{0p}$, не привязываясь изначально к его конфигурации. Для g -волны матрица резонатора имеет вид

$$T_{pj} = T_{pj}^m(h/2)T^{fs}(z_t)T_p^{(N)}T^{fs}(-z_t)T_{0pj}T^{fs}(-h/2)T_{pj}^m(h/2) \quad (\text{П3.5})$$

$$(h = H/L).$$

Свободному промежутку длиной Δz и гауссовой диафрагме соответствуют матрицы

$$T^{fs}(\Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_p^{(N)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2iN_p & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{П3.6})$$

$$\left(N_p = \frac{L}{ka^2} \right).$$

Слою квадратично неоднородной активной среды поставлена в соответствие матрица (П3.4).

Вычислим элементы матрицы $A_pB_pC_pD_p$ (П3.5) в случае, когда возмущающие резонатор параметры малы ($|n_{pj}| < N_p < 1$), затем найдем G_{pj} -параметр резонатора и приведем его к виду $G_{pj} = (A_{pj} + D_{pj})/2 = g_p + \delta G_{pj}$, где $g_p = (A_{0p} + D_{0p})/2$;

$$\delta G_{pj} = iN_p B_{0p}(z_t) + \frac{1}{2}n_{pj}h[B_{0p}(z_0) - (h/2)^2 C_{0p}] + iN_p n_{pj}h[B_{0p}(z_t)z_t - (h/2)^2 A_{0p}(z_t)]. \quad (\text{П3.7})$$

Значения элементов $A_{0p}(z_t)$ и $B_{0p}(z_t)$ матрицы невозмущенного резонатора в сечении диафрагмы z_t связаны с элементами матрицы в опорном (начальном) сечении соотношениями

$$A_{0p}(z_t) = A_{0p}(z_0) - z_t C_{0p}, \quad B_{0p}(z_t) = B_{0p}(z_0) - z_t D_{0p}.$$

Представим постоянные распространения волн как

$$A_{pj} = A_{0p} \exp(i\delta\Gamma_{pj}), \quad \Gamma_{pj} = \delta\Gamma'_{pj} + i\Gamma''_{pj}. \quad (\text{П3.8})$$

Это позволяет записать величины Γ''_{pj} и $\delta\Gamma'_{pj}$ в виде

$$\Gamma''_{pj} = n''_{pj}h[2W_{0p}(z_0)]^{-1}\mu_{1p} + n'_{pj}hN_p[2W_{0p}(z_t)]^{-1}\mu_{2p} + N_p[2W_{0p}(z_t)]^{-1}\mu_{3p}, \quad (\text{П3.9})$$

$$\delta\Gamma'_{pj} = n'_{pj}h[2W_{0p}(z_0)]^{-1}\mu_{1p} - n''_{pj}hN_p[2W_{0p}(z_t)]^{-1}\mu_{2p} - N_p^2[2W_{0p}(z_t)]^{-2}\mu_{4p}, \quad (\text{П3.10})$$

где

$$\mu_{1p} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \frac{C_{0p}}{B_{0p}(z_0)} \right] [1 + N_p W_{0p}^{-1}(z_t)]; \quad (\text{П3.11})$$

$$\mu_{2p} = \frac{g_p}{2(1-g_p^2)^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \frac{C_{0p}}{B_{0p}(z_0)} \right] + W_{0p}(z_0) \left[z_t - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \frac{A_{0p}(z_t)}{B_{0p}(z_t)} \right]; \quad (\text{П3.12})$$

$$\mu_{3p} = 1 + N_p(2W_{0p}^{-1})(z_t); \quad \mu_{4p} = \frac{g_p}{(1-g_p^2)^{1/2}}; \quad (\text{П3.13})$$

$$W_{0p}(z) = \left[\frac{1-g_p^2}{B_{0p}^2(z)} \right]^{1/2} = \frac{2L}{kw_{0p}^2(z)}. \quad (\text{П3.14})$$

Поскольку, как правило, $h < 1$, в выражениях (П3.7), (П3.11), (П3.12) можно пренебречь членами, пропорциональными $(h/2)^2$.

1. Macek W.M. *Appl. Phys. Lett.*, **2**, 67 (1963).
2. Stedman G.E., Johnsson M.T., Li Z., Rowe C.H. *Opt. Lett.*, **20**, 324 (1995); Scully M.O., Zubairy M.S., Haugan M.P. *Phys. Rev. A*, **24**, 2009 (1981).
3. Stedman G.E., Bilger H.R., Li Z., Poulton M.P., Rowe C.H., Vetharaniam I., Wells P.V. *Austr. J. Phys.*, **46**, 87 (1993).
4. Lahor D.G., Grahan G.M. *Can. J. Phys.*, **57**, 667 (1979).
5. Stedman G.E., Li Z., Rowe C.H., McGregor A.D., Bilger H.R. *Phys. Rev. A*, **51**, 4944 (1995); Stedman G.E., Bilger H.R. *Phys. Lett. A*, **122**, 289 (1987).
6. Алексеев В.А., Зельдович Б.Я., Собельман И.И. *УФН*, **118**, 385 (1976).
7. Москалев А.Н., Рындин Р.М., Хриплович И.Б. *УФН*, **118**, 409 (1976); Vetharaniam I., Stedman G.E. *Class. Quantum Gravity*, **11**, 1069 (1994); Stedman G.E., Li Z., Bilger H.R. *Opt. Lett.*, **34**, 5375 (1995).
8. Moss T.S., Killick D.E., de la Perrell E.T. *Infrared Phys.*, **4**, 209 (1964).
9. Cheo P.K., Heer C.V. *Appl. Phys. Lett.*, **6**, 177 (1965).
10. Hutching T.J., Winocur J., Durrett R.H., Jacobs E.D., Zingery W.L. *Phys. Rev. A*, **152**, 467 (1966).
11. Lee P.H., Atwood J.D. *IEEE. J. Quantum Electron.*, **2**, 235 (1966).
12. Garside V.K. *IEEE. J. Quantum Electron.*, **4**, 940 (1968).
13. Андропова И.А., Берштейн И.Л. *ЖЭТФ*, **57**, 100 (1969).
14. Привалов В.Е., Фридрихов С.А. *УФН*, **97**, 377 (1969).
15. Рыбаков Б.В., Демиденков Ю.В., Скроцкий С.Г., Хромых А.М. *ЖЭТФ*, **57**, 1184 (1969).
16. Aronowitz F., Collins R.J. *J. Appl. Phys.*, **41**, 130 (1970).
17. Андропова И.А., Берштейн И.Л. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **14** (5), 698 (1971).
18. Андропова И.А., Берштейн И.Л., Маркелов Н.А. *Квантовая электроника*, **1**, 645 (1974).
19. Андропова И.А., Мамаев Ю.А., Маркелов Н.А. *Квантовая электроника*, **6**, 917 (1979).
20. Валуев А.Д., Савранский С.А., Савушкин А.Ф., Шокин Б.А. *Оптика и спектроскопия*, **29**, 410 (1970).
21. Бурнашев М.Н., Филатов Ю.В. *Оптика и спектроскопия*, **35**, 992 (1973).
22. Bretenaker F., Lepine V., Le Calvez A., Adam O., Tache J.-P. *Phys. Rev. A*, **47**, 543 (1993).
23. Строковский Г.А., Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **47**, 151 (1979).
24. Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **31**, 952 (1971); **32**, 132 (1971); Ради́на Т.В., Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **49**, 754 (1980); Глушенко Ю.В., Ради́на Т.В., Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **51**, 493 (1981); **57**, 328 (1984).
25. Бойцов В.Ф., Мурина Т.А., Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **36**, 539 (1974).
26. Бирман А.Я., Савушкин А.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **38**, 615 (1975); **39**, 135 (1975); **47**, 375 (1979).
27. Бойцов В.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **41**, 864 (1976).
28. Бирман А.Я., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н., Цигуро Н.Г. *Оптика и спектроскопия*, **47**, 739; 948; 1166 (1979); Бирман А.Я., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н. *Оптика и спектроскопия*, **53**, 718

- (1982); Бирман А.Я., Савушкин А.Ф., Соломатин В.А., Тропкин Е.Н. *Квантовая электроника*, **9**, 1238; 2256 (1982); *Оптика и спектроскопия*, **53**, 718 (1982).
29. Бирман А.Я., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н. *Оптика и спектроскопия*, **50**, 750 (1981); **51**, 501 (1981).
30. Ищенко Е.Ф., Решетин Е.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **50**, 1062 (1981).
31. Кравцов Н.В., Кравцов Н.Н. *Квантовая электроника*, **27**, 98 (1999).
32. Басов Н.Г., Беленов Э.М., Данилейко М.В., Никитин В.В. *ЖЭТФ*, **57**, 1991 (1969); **60**, 117 (1971); Басов Н.Г., Беленов Э.М., Данилейко М.В., Никитин В.В., Ораевский А.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **12**, 145 (1970); Басов Н.Г., Губин М.А., Никитин В.В., Проценко Е.Д., Степанов В.А. *Письма в ЖЭТФ*, **15**, 525 (1972); Басов Н.Г., Беленов Э.М., Вольнов М.И., Губин М.А., Данилейко М.В., Никитин В.В. *ДАН СССР*, **210**, 306 (1973).
33. Алексеев В.А., Басов Н.Г., Беленов Э.М., Данилейко М.В., Вольнов М.И., Губин М.А., Никитин В.В., Трошагин В.Н. *ДАН СССР*, **207**, 1306 (1972).
34. Lamb W.E. *Phys. Rev. A*, **134**, 1429 (1964).
35. Aronowith F. *Phys. Rev. A*, **139**, 635 (1965).
36. Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларинцев Е.Г. *ЖЭТФ*, **52**, 1616 (1967).
37. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах*. Под ред. Ю.Л.Климонтовича (М.: Наука, 1974).
38. Радина Т.В. *Оптика и спектроскопия*, **80**, 862 (1996); **87**, 836 (1999); **88**, 142 (2000); Радина Т.В., Станкевич А.Ф. *Квантовая электроника*, **30**, 128 (2000); Радина Т.В., Станкевич А.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **95**, 1023 (2003).
39. Вайнштейн Л.А. *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (М.: Сов. радио, 1966).
40. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972).
41. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990).
42. Леонтович М.А., Фок В.А. *ЖЭТФ*, **16** (7), 557 (1946).
43. Радина Т.В., Станкевич А.Ф. *Нелинейно связанные волны и образование суперузких резонансов их интенсивностей и дисперсий*. *Препринт Российского центра лазерной физики при СПбГУ* (С.-Петербург, 2000).
44. Коваленко Е.С. *Квантовая электроника*, **3**, 433 (1976).
45. Акчурин Г.Г., Мельников Л.А., Рабинович Э.М., Тучин В.В. *ЖТФ*, **49**, 1022 (1979); *Радиотехника и электроника*, **26**, 1453 (1971).
46. Глушенко Ю.В. *Канд. дис.* (Л., ЛГУ, 1986); Бойцов В.Ф., Гусева Т.В. *Оптика и спектроскопия*, **38**, 141; 1038 (1975); Ищенко Е.Ф. *Открытые оптические резонаторы* (М.: Сов. радио, 1980); Бергер Н.К., Дерюгин И.А., Лукьянов Ю.Н., Студеникин Ю.Е. *Оптика и спектроскопия*, **43**, 306 (1977).
47. Podgorski T.J., Aronowith F. *IEEE J. Quantum Electron.*, **4**, 11 (1968).
48. Виноградов В.И. *Оптика и спектроскопия*, **35**, 614 (1973).
49. Виноградов В.И., Елецкий А.В. *Оптика и спектроскопия*, **30**, 830 (1971); **37**, 850 (1974).
50. Виноградов В.И., Жиленкова Н.В. *Оптика и спектроскопия*, **62**, 51 (1987).
51. Грю К.Э., Иббс Т.Л. *Термическая диффузия в газах* (М.: Гостеоиздат, 1956).
52. Райзер Ю.И. *Основы современной физики газоразрядных процессов* (М.: Наука, 1980).
53. Голубенцев А.Ф., Гольдман С.Ю., Рабинович Э.М. *Изв. вузов. Сер. Физика*, № 3, 117 (1984); № 9, 113 (1984).
54. Кикоин А.К., Кикоин И.К. *Молекулярная физика* (М.: Наука, 1976).
55. Лившиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979).
56. Троицкий Ю.В., Чеботаев В.П. *Оптика и спектроскопия*, **20**, 362 (1966).
57. Мазанько И.П., Молчанов М.И., Огурок Д.Д., Свиридов М.В. *Оптика и спектроскопия*, **30**, 927 (1971).
58. Царьков В.А., Молчанов М.И. *Оптика и спектроскопия*, **35**, 328 (1973).
59. Логвинов В.И., Царьков В.А. *Квантовая электроника*, **3**, 55 (1976).
60. Привалов В.Е., Чуляева Е.Г. *Оптика и спектроскопия*, **57**, 1056 (1984).