PACS 42.65.Ky; 42.50.Hz

Генерация гармоник поля лазерного импульса в газе в процессе ударной ионизации атомов

М.В.Кузелев, А.А.Рухадзе

Теоретически исследована генерация гармоник поля мощного лазерного импульса в газе в процессе ударной ионизации атомов осциллирующими электронами. Рассмотрены поля в условиях, когда энергия осцилляций электрона в поле излучения, оставаясь нерелятивистской, намного превышает потенциал ионизации атома. Кроме того, поле излучения считалось малым по сравнению с атомным полем ($E_a = 5.1 \times 10^9$ В/см), что позволило пренебречь полевой ионизацией атомов и учитывать лишь ударную ионизацию атомов газа осциллирующими электронами. В этих условиях в индуцированный в плазме нелинейный ток наряду с упругим рассеянием электронов существенный вклад может внести неупругое рассеяние осциллирующих электронов, сопровождающееся ионизацией атомов газа.

Ключевые слова: *генерация гармоник, сильное ВЧ поле, упругие столкновения, неупругие столкновения.*

1. Введение. Постановка задачи

Процесс генерации гармоник высокочастотного поля излучения в плазме, обусловленный упругим рассеянием осциллирующих электронов на ионах, впервые был рассмотрен В.П.Силиным [1]. При этом предполагалось, что плазма полностью ионизована, и учитывались лишь упругие столкновения электронов с ионами. В настоящей работе мы рассмотрим плазму с произвольной степенью ионизации и наряду с упругими столкновениями учтем также неупругие (ионизирующие) столкновения электронов с нейтральными атомами. Известно (см. гл. 17 и 18 в [2]), что при больших, но все еще нерелятивистских энергиях сечения ионизирующих столкновений электронов с атомами газа уменьшается с изменением энергии медленнее, чем сечения упругих столкновений. Уже при энергиях, превышающих энергию ионизации, ионизирующие столкновения электронов с атомами становятся доминирующими.

Для описания динамики электронов в слабо ионизированном газе, помещенном во внешнее сильное ВЧ электромагнитное поле с частотой ω_0,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega_0 t), \tag{1}$$

воспользуемся кинетическим уравнением для функции распределения электронов f:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = J_{\rm nel}(f) + J_{\rm el}(f). \tag{2}$$

Здесь e и m – заряд и масса электрона, а $J_{\rm nel}$ и $J_{\rm el}$ – интегралы неупругих (ионизирующих) и упругих столкновений электронов соответственно. При написании уравнения (2) мы пренебрегли магнитной составляющей силы Лоренца и градиентным слагаемым в левой части, что оправдано при условии нерелятивистских скоростей осцилляций электронов в поле (1), т. е.

$$v_{\rm e} \equiv eE_0/(m\omega_0) \ll c. \tag{3}$$

Вместе с тем, поле считается большим, так что энергия осцилляций электронов $\varepsilon_{\rm E}$ намного больше потенциала ионизации атома I, т. е.

$$\varepsilon_{\rm E} = \frac{1}{2} m v_{\rm e}^2 \gg I. \tag{4}$$

Запись поля в виде (1) не исключает его пространственной неоднородности. В частности, это может быть поле расходящейся или сходящейся волны, либо плоской волны с отличным от нуля волновым вектором. К зависимости поля от координат мы обратимся, когда возникнет необходимость пространственного дифференцирования.

Неравенство (4) позволяет пренебречь хаотическим движением электронов после ионизации и записать интеграл неупругих (ионизирующих) столкновений в (2) в следующем виде [3]:

$$J_{\rm nel} = \delta(\boldsymbol{v}) \int \nu_{\rm nel}(|\boldsymbol{v}'|) f(\boldsymbol{v}') {\rm d}\boldsymbol{v}'. \tag{5}$$

Здесь $\nu_{\rm nel}(|\boldsymbol{v}|) = n_0 v \sigma(v)$ – зависящая от скорости v частота ионизационных столкновений электрона; $\sigma(v)$ – сечение ионизации атома электроном; $v = |\boldsymbol{v}|$; n_0 – плотность атомов газа. Для $\sigma(v)$ с хорошей точностью можно воспользоваться формулой борновского приближения [2]:

$$\sigma(v) = \frac{\alpha}{v^2} \eta(v - v_{\rm i}) \ln \frac{v}{v_{\rm i}}, \tag{6}$$

где

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

– функция Хевисайда, а $v_{\rm i} = (2I/m)^{1/2}$ и $\alpha = 2\pi Z e^4/(mI)$ (Z – заряд ядра атома) зависят от вида газа (для водорода $I = 13.6$ эВ, $\alpha = 16.3$ см^4/с^2).

М.В.Кузелев, А.А.Рухадзе. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 7 июня 2007 г., после доработки – 5 июля 2007 г.

Кроме ограничений (3) и (4) следует учесть еще одно весьма важное ограничение, заложенное в рассматриваемой модели, а именно пренебрежение туннельной ионизацией атомов в сильном электромагнитном поле по сравнению с ударной ионизацией. Это возможно только в относительно слабых полях, меньших атомного поля: $E < E_{\rm a} = 1.5\times10^9$ В/см. При давлении газа (водорода) порядка атмосферного и частоте поля $\omega_0 = 2\times10^{15}$ с$^{-1}$ (длина волны $\lambda = 1$ мкм) такое пренебрежение законно при плотностях мощности электромагнитного поля $P < 10^{17}$ Вт/см^2, причем, согласно (3), должно выполняться неравенство $P > 10^{14}$ Вт/см^2. Отметим, что энергия осцилляций электронов в ВЧ поле может достигать несколько килоэлектронвольт.

Что касается интеграла упругих столкновений, то при условии (4) рассеяние электрона на атоме не отличается от кулоновского рассеяния электрона на ядре, поэтому $J_{\rm el}(f)$ можно записать в виде интеграла электрон-ионных столкновений Ландау [4]:

$$J_{\rm el}(f) = \frac{2\pi e^2 e_{\rm i}^2 n_{\rm i} L_0}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{v^2\delta_{kj} - v_k v_j}{v^3}\frac{\partial f}{\partial v_j}\right), \tag{7}$$

где $e_{\rm i}$ – заряд иона; $L_0 = 10 - 20$ – кулоновский логарифм; $n_{\rm i}$ – полная плотность ионов в газе, т. е. плотность ионов как ионизованных, так и не ионизованных атомов; δ_{kj} – символ Кронекера.

2. Частоты ионизационных и упругих столкновений электронов

Прежде чем перейти к задаче генерации гармоник поля (1) в газе в рассматриваемых условиях, исследуем, исходя из приведенных уравнений, ионизацию газа и получим выражение для закона нарастания плотности электронов $n_{\rm e}(t)$. Из уравнения (2) с учетом (5) и (7) следует, что плотность электронов нарастает во времени экспоненциально по закону

$$\frac{\partial n_{\rm e}}{\partial t} = \gamma(E_0)n_{\rm e} = n_0\int v_{\rm nel}(|\boldsymbol{v}'|)f(\boldsymbol{v}')\mathrm{d}\boldsymbol{v}'. \tag{8}$$

Для определения инкремента нарастания $\gamma(E_0)$ (частоты ионизационных столкновений электронов) необходимо вычислить $f(\boldsymbol{v})$. Предположим, что выполнены неравенства

$$\omega_0 \gg \gamma(E_0),\, v_{\rm eff}(E_0),\, \omega_{\rm p}\,, \tag{9}$$

где $v_{\rm eff}(E_0)$ – эффективная частота упругих столкновений, которая определяется ниже, а $\omega_{\rm p} = (4\pi e^2 n_{\rm e}/m)^{1/2}$ – ленгмюровская частота электронов. В этих предположениях правой частью уравнения (2) в первом приближении можно пренебречь и представить решение в виде функции характеристики $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\rm e}\sin\omega_0 t = \mathrm{const}$ [3],

$$f(t,\boldsymbol{v}) = n_{\rm e}f_0(t,\boldsymbol{v}),\, f_0 = \delta(\boldsymbol{v}_\perp)\delta\big(v_\parallel - v\sin\omega_0 t + v_{\rm e}\sin\varphi\big). \tag{10}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_\perp$ и $v_\parallel$ – поперечная и продольная по отношению к электрическому полю $\boldsymbol{E}$ составляющие скорости электрона; φ – фаза поля в момент рождения электрона в результате ионизации; функция f_0 нормирована на единицу. Учитывая неравенства (9), функцию (10) следует усреднить по фазам φ, что приводит к известной функции равнораспределения по фазам, полученной впервые в работе [5],

$$\langle f_0\rangle = \frac{\delta(\boldsymbol{v}_\perp)}{\big[v_{\rm e}^2 - (v_\parallel - v_{\rm e}\sin\omega_0 t)^2\big]^{1/2}}. \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в (8), получаем следующую формулу для постоянной развития лавины ионизации [6]:

$$\gamma(E_0) \approx \frac{2\alpha n_0}{\pi v_{\rm i}}\ln^2\frac{v_{\rm e}}{v_{\rm i}}. \tag{12}$$

В заключение настоящего раздела вычислим эффективную частоту упругих столкновений осциллирующих в сильном высокочастотном поле электронов с атомами газа. Для этого воспользуемся распределением (11) и кулоновским сечением рассеяния электронов на ионах. Такое приближение вполне оправдано при условии (4). В этом случае сечение кулоновского рассеяния следует писать в виде

$$\sigma_{\rm K} = \frac{2e^2 e_{\rm i}^2 L_0}{m^2 v^4}\eta(v - v_{\rm i}). \tag{13}$$

С учетом распределения (11) получаем

$$v_{\rm eff}(E_0) = n_{\rm i}\int_{v_{\rm i}}^{v_{\rm e}}\mathrm{d}v\,\frac{2e^2e_{\rm i}^2L_0}{\pi m^2 v^3}\,\frac{1}{\big(v_{\rm e}^2 - v^2\big)^{1/2}} \approx \frac{e^2e_{\rm i}^2L_0 n_{\rm i}}{\pi m^2 v_{\rm i}^2 v_{\rm e}}. \tag{14}$$

Из сравнения (14) и (12) как раз и следует, что при условиях $v_{\rm e} > v_{\rm i}$ и $n_{\rm e} > n_{\rm i}v_{\rm i}/v_{\rm e}$ частота ионизации превышает частоту упругих столкновений.

3. Генерация гармоник высокочастотного поля

Перейдем теперь к задаче генерации гармоник сильного высокочастотного поля при ионизации газа. Механизмом генерации является излучение осциллирующими электронами в процессе ионизации атомов. Здесь уже нельзя пользоваться усредненной по фазам функцией распределения электронов (11), а надо решать уравнение (2) методом последовательных приближений и найти поправку f_1 к неусредненному распределению (10). Согласно (2) имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{v}} = J_{\rm nel}(f_0) + J_{\rm el}(f_0), \tag{15}$$

где $J_{\rm nel}(f_0)$ и $J_{\rm el}(f_0)$ даются выражениями (5) и (7) с учетом (6). Уравнение (15) отличается от уравнения, исследованного в [1], наличием первого слагаемого, которое учитывает неупругие столкновения электронов*. Но поскольку решение уравнения (15) аддитивно по отношению к правой части, мы сначала найдем его решение с учетом только неупругих столкновений, а затем – с учетом только упругих столкновений. При учете только неупругих столкновений решение уравнения (15) имеет вид

$$f_1(\boldsymbol{v}) = n_0\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t' J_{\rm nel}\big[f_0(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\rm e}\sin\omega_0 t + \boldsymbol{v}_{\rm e}\sin\varphi)\big]. \tag{16}$$

*Кроме того, в слагаемом с упругим интегралом рассеяния за плотность ионов, как отмечалось выше, принимается плотность всех нейтральных и ионизованных атомов, что оправдано условием (4).

Поскольку плотность электронов меняется медленно, находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{v} f_1 \mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$= 2en_0n_e\alpha\boldsymbol{i}_{\parallel}\int_{v_i}^{\infty}\mathrm{d}v\ln\frac{v}{v_i}\delta[v - v_e(\sin\omega_0 t - \sin\varphi)], \quad (17)$$

где $\boldsymbol{i}_{\parallel}$ – единичный вектор вдоль направления ВЧ поля. При написании последнего соотношения мы воспользовались сечением (6), считая n_e медленно меняющейся функцией времени с инкрементом нарастания (12). Вследствие ионизации атомов медленно меняющейся оказывается и плотность нейтральных атомов в плазме, причем $n_e + n_0 = n_i = \mathrm{const}$.

Дальнейшие вычисления правой части подобны проведенным в [1] для интеграла столкновений Ландау. Представим δ-функцию в виде интеграла, разложим подынтегральные выражения по гармоникам основной частоты ω_0, усредним по φ, будем считать выполненным неравенство $v_e \gg v_i$ и вынесем $\ln(v/v_i)$ из-под интеграла в виде $\ln(v_e/v_i) = L$. После несложных вычислений получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t} = \frac{4}{\pi}en_0n_e\alpha L\boldsymbol{i}_{\parallel}\sum_{n\geqslant 1}\sin(n\omega_0 t)F(n), \quad (18)$$

где

$$F(n) \equiv \left[1 - (-1)^n\right]\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}J_0(x)J_n(x) = \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi}{2}n, \quad (19)$$

а J_0, J_n – функции Бесселя.

Из (18) видно, что в разложении тока $\boldsymbol{j}_1$ по гармоникам содержатся только нечетные гармоники лазерного поля, а поэтому только эти гармоники будут порождаться таким током. Тогда для отношения амплитуд гармоник электрического поля к амплитуде основной гармоники имеем

$$\frac{E_n^{\mathrm{nel}}}{E_0} \approx \frac{8n_0\alpha}{\pi^2\omega_0 v_e}\ln\frac{v_e}{v_i}\frac{1}{n^3(n+1)}\sin\frac{\pi}{2}n. \quad (20)$$

При выводе этого отношения мы воспользовались уравнениями Максвелла с током (18)

$$\mathrm{rotrot}\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t}, \quad (21)$$

причем поле лазерного импульса (1) считали плоской волной.

Соотношение (20), как и все приведенные выше формулы, получено при учете в уравнениях (2) и (15) только неупругих (ионизирующих) столкновений электронов, упругими столкновениями пренебрегалось.

Учет упругих столкновений не представляет труда. Так, при учете в уравнении (2) только упругих столкновений, поправка к плазменному току находится так же, как и (18), и дается соотношением (ср. с (18) и (19)):

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t} = \frac{8e^2e_i^2en_eL_0}{m^2v_ev_in(n+1)}\boldsymbol{i}_{\parallel}\sum_{n\geqslant 1}\sin(n\omega_0 t)\sin\frac{\pi}{2}n. \quad (22)$$

Отсюда видно, что и в этом случае индуцированный в плазме ток является чисто омическим и содержит только нечетные гармоники высокочастотного поля. Для отношения амплитуды n-й гармоники к амплитуде основной гармоники при учете только упругих столкновений находим:

$$\frac{E_n^{\mathrm{el}}}{E_0} \approx \frac{8e^2e_i^2n_iL_0}{m^2\omega_0 v_i v_e^2}\frac{1}{n(n+1)}\sin\frac{\pi}{2}n. \quad (23)$$

Из сравнения выражений (20) и (23) следует, что амплитуды гармоник при чисто упругих столкновениях электронов хотя и падают с ростом n медленнее, чем при неупругих столкновениях, но по напряженности высокочастотного поля в v_i/v_e раз меньше и поэтому при малых n^2 оказываются преобладающими.

4. Обсуждение результатов

Представляет интерес сравнение полученных выше результатов с результатами работы [1], в которой рассматривалась полностью ионизованная плазма во внешнем ВЧ поле с максвелловской функцией распределения с осциллирующими электронами. Приведем выражение для индуцированного в плазме тока

$$\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{E}_0\sum_{n\geqslant 0}\cos[(2n+1)\omega_0 t]\frac{e^2n_e}{m\omega_0^2}\frac{16n_ie_i^2\omega_0^3}{eE_0^3}L_0\ln\frac{eE_0}{m\omega_0 v_T} \quad (24)$$

и отношение амплитуды n-й гармоники ВЧ поля к амплитуде основной гармоники:

$$\frac{E_n}{E_0} \approx \frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{n_ie^2e_i^2L_0}{m^2\omega_0 v_e^3}\ln\frac{eE_0}{m\omega_0 v_T}, \quad (25)$$

полученные в [1] . Здесь v_T – тепловая скорость электронов плазмы. Из сравнения выражений (23) и (25) (мы вправе сравнивать результаты при учете только упругих столкновений электронов) следует, что при условии

$$\frac{v_i^2}{v_e^2}n^2 < 1 \quad (26)$$

доминирует излучение гармоник поля в процессе ионизации газа полем, а в обратном пределе более интенсивно могут генерироваться гармоники поля в заранее приготовленной полностью ионизованной плазме. Заметим, однако, что неравенство (26) определяет условие применимости результатов работы [1], а это означает, что всегда более интенсивные гармоники поля будут генерироваться в процессе ионизации газа самим полем.

В заключение авторы выражают благодарность В.П.Силину за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-02-12060-офи).

1. Силин В.П. *ЖЭТФ*, **47** (6), 2254 (1964).
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963).
3. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. *Физика плазмы*, **27** (2), 170 (2001).
4. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая Школа, 1978).
5. Арутюнян С.Г., Рухадзе А.А. *Физика плазмы*, **5** (3), 702 (1979).
6. Глазов Л.Г., Рухадзе А.А. *Физика плазмы*, **15** (12), 1487 (1989).