

# Две схемы логических ячеек для односторонних квантовых вычислений

А.М.Башаров, В.Н.Горбачев

*Рассмотрены две схемы ячеек на основе квантового измерения. В первой схеме используются атомные кластерные состояния, генерируемые с помощью предложенного кооперативного процесса с участием классических полей. Вторая схема основана на квантовой корреляции бифотонов и позволяет кодировать классическую информацию с помощью состояний квантовой системы.*

**Ключевые слова:** квантовые вычисления, перепутанные состояния, логические ячейки на основе квантового измерения, бифотоны.

## 1. Введение

С точки зрения последовательного выполнения операций процесс вычисления является упорядоченным во времени, поскольку, например, мы различаем начальное и конечное состояния. Упорядоченность во времени играет важную роль в моделях квантовых компьютеров, основанных на процедуре измерения, где квантовое измерение используется как базисный механизм. Действительно, благодаря случайности результата квантового измерения его исходы должны определять измерительную платформу последующей ячейки для детерминированной работы.

Одночастичные измерения и кластерные состояния, а также перепутанные многочастичные состояния являются основными элементами односторонних квантовых компьютеров (ОКК), предложенных в [1, 2]. На основе ОКК с помощью кластерных состояний, приготовленных из поляризованных фотонов, экспериментально реализованы квантовый поисковый алгоритм и алгоритм Deutsch–Josza [3, 4]. Кластерные состояния, будучи универсальным ресурсом для односторонних вычислений [5], благодаря своим свойствам представляют интерес для исследования как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения и могут быть получены в различных физических системах. Свойства кластерных состояний из поляризованных фотонов экспериментально изучались в [6]. Эти состояния могут быть получены в спиновых системах, в частности в модели Изинга, в оптических решетках, джозефсоновских переходах и др. [7–10]. Для обсуждавшихся в [1] оптических реализаций односторонних компьютеров кластерные состояния могут быть приготовлены из ЭПР-пар (Эйнштейн–Подольский–Розен) с помощью некой «склеивающей» операции, основанной на проекционном измерении [12, 13].

**А.М.Башаров.** РИЦ «Курчатовский институт», Россия, 123182 Москва, пл. акад. Курчатова, 1

**В.Н.Горбачев.** Северо-Западный институт печати Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна, Россия, 191180 С.-Петербург, пер. Джамбула, 13; e-mail: valery.gorbachev@gmail.com

Поступила в редакцию 5 июля 2007 г.

Используя сжатый свет, можно получить кластерные состояния непрерывных переменных [14], которые делают возможными универсальные вычисления [15].

Основой ОКК является образованная кластерным состоянием ячейка, использующая квантовое измерение. Чтобы ячейка выполняла свою операцию, вначале необходимо записать исходные данные на ее вход, а затем перепутать все кубиты и произвести измерение. Это означает, что операция перепутывания должна осуществляться контролируемым физическим взаимодействием. Вариант контролируемой генерации граф-состояний, частным случаем которых являются кластерные состояния, рассматривался в [16] для спиновой XY-ячейки, образованной из оптической решетки нейтральных атомов.

Логические ячейки для односторонних квантовых компьютеров могут быть рассмотрены с точки зрения телепортации. Действительно, стандартный протокол телепортации позволяет перенести неизвестное состояние из точки А в точку В, что с позиции процедуры вычисления можно рассматривать как действие ячейки, выполняющей единичную операцию. Ячейки на основе телепортации предложены в [17] для построения универсальных помехоустойчивых ячеек; возможность их использования для целей вычисления обсуждалась в [18–20]. Таким образом, существуют две близкие модели квантового компьютера на основе измерения: односторонний квантовый компьютер и модель на основе телепортации. Соотношение между ними рассматривалось в [21].

В настоящей работе мы обсуждаем два вопроса, которые являются важными с точки зрения реализации моделей на основе измерения. Первый – это контролируемое взаимодействие для приготовления кластерных состояний и выполнения времяупорядоченных вычислений. С этой целью мы рассматриваем два кооперативных процесса – кооперативное поглощение и обмен когерентностью. Они включают в себя классические поля, которые являются удобным контролирующим параметром.

Оптическое поглощение фотона парой атомов экспериментально наблюдалось в кристалле на ионах  $\text{Pr}^{3+}$  [22]. Такое поглощение возникает в результате интерференции между диполь-дипольным взаимодействием и взаимодействием между светом и атомами [23]. Для двух указанных кооперативных процессов мы нашли эф-

фективные гамильтонианы взаимодействия, включающие в себя классические поля, и схемы логических ячеек на основе атомных кластерных состояний.

Второй вопрос, который мы обсуждаем, связан с задачей кодирования классической информации с помощью состояний квантовой системы. Это представляется важным, поскольку, например, любой квантовый алгоритм имеет классический вход.

В качестве одного из решений этой задачи приводится схема ячейки на основе измерения, реализованная с помощью ЭПР-пары. Ячейка имеет классический вход и квантовый выход и преобразует классическую информацию в состояние квантовой системы. По сравнению с ячейками ОКК наша ячейка может использовать более сложные совместные измерения и позволяет выполнять уже некоторые вычислительные задачи. Мы рассматриваем реализацию такой ячейки с использованием бифотонов, которые являются основой квантовых информационных процессов и могут быть приготовлены экспериментально [26–29]. Так, на бифотонах экспериментально была продемонстрирована операция C-NOT [30].

## 2. Общая схема ячейки на основе проекционного измерения

В модели одностороннего квантового компьютера и в модели на основе телепортации логические ячейки имеют одинаковую структуру, которая определяется фундаментальными физическими принципами. Таковыми являются изменение квантового состояния с помощью проекционного измерения и детерминистическая операция, осуществляемая восстанавливающими операторами.

Пусть измеряется наблюдаемая  $A$  некоторой системы, находящейся в состоянии  $|\Psi_{in}\rangle$ . Пусть  $|a_k\rangle$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – собственные векторы  $A$ . Если получен исход  $j$ , то входное состояние проецируется в  $|a_j\rangle$ . Допустим, что есть унитарный оператор  $U_G: U_G|\Psi_{in}\rangle = |a_j\rangle$ , тогда возникает ячейка, которая совершила операцию  $U_G$ . Но эта ячейка не детерминистическая, поскольку есть нежелательный исход  $m \neq j$ , который возникает с вероятностью  $|\langle\Psi_{in}|a_m\rangle|^2$ . Введем унитарный оператор  $R(m)$ , корректирующий все нежелательные исходы  $R(m)|a_m\rangle = |a_j\rangle$ ; тогда ячейка будет всегда совершать операцию  $U_G$ . Для этого нужен набор восстанавливающих операторов  $R$  (в литературе по односторонним квантовым компьютерам – byproduct operators).

Операции, которые выполняет ячейка, могут быть осуществлены с помощью одночастичных измерений (как в модели одностороннего компьютера) либо с помощью совместных измерений в перепутанном базисе (как в модели, основанной на телепортации). Однако существенного различия между этими двумя способами нет, поскольку оба используют перепутанность. Действительно, измерение состояния  $\Psi$  в перепутанном базисе означает, что перед измерением мы перепутываем частицы, находящиеся в состоянии  $\Psi$ , с помощью подходящей унитарной операции, а затем проводим одночастичные измерения. В качестве примера далее мы рассмотрим оба типа измерений.

## 3. Кластерные состояния

Кластерные состояния (CS) могут генерироваться гамильтонианом взаимодействия  $V = \frac{1}{4} \sum_{a,b} g_{ab}(t)(1 - Z_a) \times$

$(1 - Z_b)$ , где  $Z_a = \sigma_{za}$  – оператор Паули отдельной частицы. Пусть исходное состояние  $n$  является суперпозиционным,  $|+\rangle_n = (1/\sqrt{2})^n \otimes_a (|0\rangle + |1\rangle)_a$ , и тогда

$$\begin{aligned} CS &= T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V(t') \right\} |+\rangle_n \\ &= \otimes_{a,b} (C - Z)_{ab} |+\rangle_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $T$  – оператор времяупорядочения; здесь мы положили

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' g_{ab}(t') \right\} - 1 = -2$$

и ввели условный оператор фазового сдвига  $C - Z$ , который определяется соотношением  $|xy\rangle \rightarrow (-1)^{xy}|xy\rangle$  ( $x, y = 0, 1$ ). Оператор  $C - Z$  преобразует суперпозицию  $|+\rangle_2$  в перепутанное состояние  $\phi_{ab} = (C - Z)|+\rangle_2$ , с точностью до локального унитарного преобразования эквивалентное белловскому состоянию. Для  $g_{a,b} = g\delta_{a,a+1}$  и  $n = 2, 3, 4$  кластерные состояния имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, -\rangle + |1, +\rangle), \\ \Phi_3 &= \sqrt{2} (|+, 0, -\rangle - |-, 1, +\rangle), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} (|0, -, 0, -\rangle + |1, +, 0, -\rangle - |0, +, 1, +\rangle - |1, -, 1, +\rangle),$$

где  $|\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle)$ . Особенность кластерных состояний проявляется только при  $n = 4$ , поскольку двух- и трехчастичные CS являются унитарно-эквивалентными белловскому и GHZ-состояниям (Grinberger–Horne–Zeilinger).

Для наших целей важно следующее наблюдение. Используя соотношение  $HaZ_aHa = X_a$  ( $H_a$  – преобразование Адамара,  $X_a = \sigma_{xa}$  – оператор Паули), найдем, что CS можно представить как

$$CS = TG \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_1(t') \right) |0\rangle, \quad (3)$$

где

$$G = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \frac{1}{4} \sum_{ab} g_{ab}(t') (1 - Z_a - Z_b) \right] \otimes_a H_a,$$

а гамильтониан  $V_1$  определен соотношением

$$V_1 = \frac{1}{4} \sum_{ab} g_{ab}(t) (X_a \otimes X_b). \quad (4)$$

Это уравнение означает, что с точностью до локального унитарного преобразования  $G$  необходимые CS могут быть сгенерированы новым гамильтонианом  $V_1$  из исходных состояний  $|0\rangle = \otimes_a |0\rangle_a$ . Найденный гамильтониан  $V_1$  описывает парное взаимодействие между частицами и может возникать помимо модели Изинга в различных трех- и четырехчастичных процессах, включающих в себя классические поля.

## 4. Кооперативные процессы

Рассмотрим взаимодействие между атомами  $a, b$  и двумя модами электромагнитного поля, частоты которых удовлетворяют соотношению

$$\omega_a + \omega_b = \Omega_1, \quad (5)$$

$$\omega_a - \omega_b = \Omega_2, \quad (6)$$

где  $\omega_r$  – частота перехода атома  $r = a, b$ ;  $\Omega_p$  – частота моды  $p = 1, 2$ . Эти уравнения можно рассмотреть с точки зрения закона сохранения энергии, и тогда они имеют простой физический смысл. Так, уравнение (5) означает, что энергия поглощенного фотона идет на переход первого и второго атомов с нижнего уровня на верхний. Это случай кооперативного поглощения или излучения, когда два атома, кооперируясь, поглощают или излучают один фотон. В задачах атомных столкновений в газах взаимодействие (6) известно как радиационное рассеяние, или обмен когерентностью [24, 25].

Отметим, что эти кооперативные процессы имеют близкий аналог, а именно хорошо известные трехфотонные параметрические процессы в прозрачной среде с квадратичной нелинейностью, где частоты фотонов связаны соотношением  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ . Так, в процессах типа деления частоты фотон накачки распадается на два фотона – сигнальный и холостой,  $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ , вместо которых в кооперативном процессе (5) возникает пара возбужденных атомов. Параметрический процесс преобразования частоты  $\omega_1 - \omega_3 = \omega_2$  аналогичен кооперативному процессу обмена когерентностью (6). Наряду с параметрическими трехфотонными процессами кооперативные процессы могут представлять интерес для задач квантовой теории информации.

В кооперативных процессах (5) и (6) моды на частотах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  могут рассматриваться классически – как волны с заданной амплитудой. Для этого случая эффективный гамильтониан взаимодействия, найденный в Приложении, имеет вид  $v = i\hbar k(f^\dagger - f)$ . Этот гамильтониан описывает кооперативное поглощение атомами  $a$  и  $b$ , если  $f = s_{10}(a)s_{10}(b)$ , и процесс обмена когерентностью, если  $f = s_{10}(a)s_{01}(b)$ , где  $s_{xy}(r) = |x\rangle_r \langle y|$  – одноатомный оператор, относящийся к атому  $r = a, b$ ;  $x, y = 0, 1$ . Константа взаимодействия  $k$  зависит от амплитуды классического поля, которое мы полагаем заданным параметром.

Используя алгебру  $f, f^\dagger$ , которая выглядит как алгебра одноатомных операторов,  $f^2 = f^{\dagger 2} = 0, f^\dagger f f^\dagger = f^\dagger$  (за исключением соотношения  $f^\dagger f + f f^\dagger \neq 1$ ), можно найти оператор эволюции

$$U = \exp(-i\hbar^{-1}vt) = 1 + (f^\dagger f + f f^\dagger) \times (\cos tk - 1) + (f^\dagger - f) \sin tk. \quad (7)$$

Анализ эволюции двух атомов, определяемой выражением (7), показывает, что

- в процессах кооперативного поглощения и обмена когерентностью могут генерироваться перепутанные состояния  $(\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$  и  $(\sqrt{2})(|01\rangle + |10\rangle)$  из исходных состояний атомов  $|00\rangle$  и  $|01\rangle$ ;

- на основе обмена когерентностью может быть реализована операция  $\text{swapping } a \otimes b \rightarrow b \otimes a$ .

Пусть условия (5) и (6) удовлетворяются одновременно и моды на частотах  $\Omega_1, \Omega_2$  считаются классическими. Тогда возникает эффективный гамильтониан взаимодействия между атомами  $a$  и  $b$  вида  $\vartheta_{ab} = h_{ab}(X_a \otimes X_b)$ , где константа связи  $h_{ab}$  определяется амплитудами классических полей. Классические моды являются удобным параметром контроля. Используя  $\vartheta_{ab}$  как операцию, спаривающую два атома, можно в соответствии с (1) получить различные кластерные состояния.

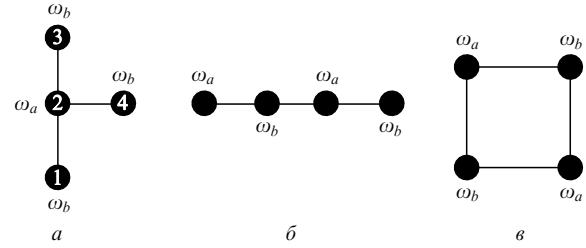


Рис.1. Четырехатомные кластерные состояния: 2D-состояние, которое может быть приготовлено, если один атом имеет частоту перехода  $\omega_a$ , а три других –  $\omega_b$ ; это состояние используется для реализации операции C-NOT на кубитах 3 и 4, где 4 – управляемый бит, а входное состояние управляющего кубита телепортируется с кубита 1 на кубит 3 (а), линейное кластерное состояние (б) и «бокс»-состояние (в).

Рассмотрим, например, генерацию  $\Phi_4$ . Возьмем четыре атома ( $a, b, c, d$ ) с частотами переходов  $\omega_s$  ( $s = a, b, c, d$ ) и две классические моды на частотах  $\Omega_1, \Omega_2$ . Пусть атомы расположены в разных точках пространства. Тогда, если три атома имеют одинаковые частоты переходов,  $\omega_b = \omega_c = \omega_d \neq \omega_a$ , и выполнены условия резонанса (5) и (6), можно приготовить, например, кластерное 2D-состояние (рис.1,а). Для этого используются спаривающие операторы вида  $\vartheta_{ab} + \vartheta_{ac} + \vartheta_{ad}$ . Если же пары атомов имеют одинаковые частоты,  $\omega_a = \omega_c$  и  $\omega_b = \omega_d$ , то, взяв спаривающие операторы  $\vartheta_{ab} + \vartheta_{bc} + \vartheta_{cd}$ , можно приготовить линейное кластерное состояние (рис.1,б). «Бокс»-состояние (рис.1,в) можно получить с помощью операторов вида  $\vartheta_{ab} + \vartheta_{bc} + \vartheta_{cd} + \vartheta_{da}$ .

Представленные четырехчастичные состояния эквивалентны (1) с точностью до локального унитарного преобразования  $G$  и могут быть использованы для построения различных логических ячеек, которые будут унитарно-эквивалентны оригинальным ячейкам, предложенным для односторонних компьютеров. В качестве примера рассмотрим ячейку C-NOT, которая может быть реализована на основе 2D-состояния, показанного на рис.1,а.

Напомним, как работает оригинальная ячейка C-NOT [1]. В ней кубит 4 является управляющим, кубит 1 – это вход мишени, а кубит 3 – выход. Вначале кубиты 2 и 3 приготавливаются в суперпозиционном состоянии  $|+\rangle$ . Входное состояние записывается на кубиты 1 и 4 и затем приготавливается кластерное состояние  $S[|a\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |b\rangle_4]$ , где в соответствии с (1) и (3)

$$S = \exp \left[ \left( \frac{i\pi}{4} \right) (3 - Z_1 - 3Z_2 + Z_3 + Z_4) \right] \otimes_{a=1}^4 H_a \times \exp \left[ \left( \frac{i\pi}{4} \right) (X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_2 X_4) \right] \otimes_{a=1}^4 H_a. \quad (8)$$

Далее проводится измерение наблюдаемой  $X$  кубитов 1 и 2, приводящее к операции C-NOT между кубитами 3 и 4. Этот процесс можно описать следующим образом:

$$S[|a\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |b\rangle_4] = \sum_{x_1, x_2} |x_1\rangle_1 \otimes |x_2\rangle_2 R_{34}(C - X)_{43} |ab\rangle_{34}, \quad (9)$$

где  $|x_k\rangle$  – собственный вектор оператора  $X_k$  ( $k = 1, 2$ );  $R_{34}$  – восстанавливающий оператор, зависящий от операторов Паули наблюдаемых  $X, Z$  кубитов 3, 4 [1].

Используя уравнение (9), рассмотрим, что будет в нашем случае, когда кластерное состояние, необходимое для реализации C-NOT, генерируется гамильтонианом  $V_1$  вместо  $V$ . С точностью до несущественного фазового множителя  $\exp(i3\pi/4)$  имеем

$$\exp\left[\left(\frac{i\pi}{4}\right)(X_1X_2 + X_2X_3 + X_2X_4)\right] \left[|a'\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes |b'\rangle_4\right] = \sum_{u_1, u_2} |u_1\rangle_1 \otimes |u_2\rangle_2 R'_{34}(C - X)_{34}|a'b'\rangle_{34}, \quad (10)$$

где  $|u_k\rangle = H_k \exp(i\theta_k Z_k) |x_k\rangle$  ( $k = 1, 2$ );  $\theta_1 = \pi/4$  и  $\theta_2 = 3\pi/4$  – собственные векторы новых наблюдаемых  $U_1 = U_2 = Y$ ;  $R' = H_3 H_4 \exp[(i\pi/4)(Z_3 + Z_4)] R_{34} H_3 H_4$  – новый восстанавливающий оператор. Уравнение (10) означает, что между кубитами 3 и 4 возникает операция C-NOT. Чтобы ее осуществить, нужна следующая процедура. Вначале кубиты 2 и 3 приготавливаются в состоянии  $|0\rangle$ , которое является собственным вектором наблюдаемой  $Z$ . Входные данные записываются на кубиты 1 и 4, после чего все кубиты перепутываются операцией  $\exp[(i\pi/4) \times (X_1X_2 + X_2X_3 + X_2X_4)]$ , которая генерируется гамильтонианом  $V_1$ . Затем наблюдаемые  $Y$  кубитов 1 и 2 измеряются, и с точностью до унитарного преобразования  $R'_{34}$  возникает операция C-NOT между кубитами 3 и 4, где кубит 4 является мишенью, а состояние управляющего кубита телепортируется с кубита 1 на кубит 3. Заметим, что благодаря классическим модам в гамильтониане взаимодействия, генерирующем кластерное состояние, мы имеем контролируемое приготовление перепутанного состояния и времяпорядоченную работу ячейки.

Чтобы ячейка выполняла свою операцию, нужно записать исходные данные на ее вход. Если эти данные кодируются состояниями квантовой системы, то записать их можно с использованием, например, операции *swapping*. Физическая реализация этой операции может быть получена с помощью рассмотренного кооперативного процесса обмена когерентностью и описывается гамильтонианом  $v = i\hbar k(f^\dagger - f)$ , где  $f = s_{10}(a)s_{01}(b)$ , который приводит к операции *swapping*:  $a \otimes b \rightarrow b \otimes a$ . Таким образом, любое выходное состояние квантового регистра может быть записано на вход другого квантового регистра. Однако входные данные могут быть классическими, как это имеет место, например, для любого квантового алгоритма. Одно из возможных решений этой задачи может быть получено, если использовать ячейки на основе ЭПР-пар.

### 5. Ячейки на основе бифотонов

ЭПР-пару можно приготовить различным образом, в частности с помощью рассматриваемых кооперативных процессов (5) или (6), однако сейчас мы рассмотрим ее оптическую реализацию на основе бифотона. Для наших целей необходим бифотон в максимально перепутанном состоянии вида  $|b\rangle = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ , где векторы  $|0\rangle, |1\rangle$  являются собственными векторами оператора Паули  $\sigma_z = Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ . Логические состояния  $|0\rangle, |1\rangle$  могут быть ассоциированы с физическими состояниями, например с горизонтально и вертикально поляризованными фотонами или с фоковскими состояниями света  $|n\rangle$ , где  $n = 0, 1$ . Если бифотон находится в состоянии  $|b\rangle$ , то имеет место строгая корреляция между исходом из-

мерения одного из фотонов, например холостого, и состоянием оставшегося сигнального фотона. Этот факт оказывается важным для нашей схемы. Рассматривая измерение наблюдаемой  $Z$ , находим, что в результате исхода  $n = 0, 1$  сигнальный фотон проецируется в состояние  $|n\rangle$ . Иными словами, измерение наблюдаемой  $Z \otimes 1$  проецирует сигнальный фотон в одно из собственных состояний оператора  $1 \otimes Z$ . Введем вместо  $Z$  другую наблюдаемую,  $A = SZS^\dagger$ , собственные векторы которой имеют вид  $|A_n\rangle = S|n\rangle$ , где  $S$  – унитарный оператор. Тогда справедливо следующее наблюдение. Измерение наблюдаемой  $A \otimes 1$ , проводимое над бифотоном, проецирует оставшийся фотон в состоянии  $|B_n\rangle$ , которое является одним из собственных векторов наблюдаемой  $1 \otimes B$ , где  $B = KZK^\dagger$  и  $K = (S^\dagger)^T$ .

Доказательство этого простое. Введя новый базис  $|A_n\rangle$ , найдем

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m'} |A_{m'}\rangle \langle A_{m'}|n\rangle |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n'} |A_{n'}\rangle |B_{n'}\rangle = (S \otimes K)|b\rangle, \quad (11)$$

где  $|B_{n'}\rangle = \sum_n \langle A_{n'}|n\rangle |n\rangle = K|n'\rangle$ . Перепишем уравнение (11) в виде  $(S \otimes 1)|b\rangle = (1 \otimes K^\dagger)|b\rangle$ , означая, что любое вращение  $S$  холостого фотона приводит к вращению  $K$  сигнального фотона, и наоборот. Из корреляции  $K$  определяется  $S$ .

Рассмотрим ячейку, которая состоит из бифотона, схемы измерения наблюдаемой  $Z$  и восстанавливающего оператора  $R$ . Введем восстанавливающий оператор  $R(n, s)|n\rangle = |s\rangle$ , где  $n, s = 0, 1$ , который возьмем в виде  $R(n, s) = X^{n+s}$ , где  $X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ . Тогда состояние бифотона примет вид

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0,1} |n\rangle \otimes R(n, s)|s\rangle. \quad (12)$$

Ячейка работает следующим образом. Холостой фотон измеряется в базисе наблюдаемой  $Z$ . Если получен исход  $n = 0, 1$ , то сигнальный фотон, как следует из (12), проецируется в состояние  $R(n, s)|s\rangle$ . Тогда в соответствии с этим исходом над сигнальным фотоном совершается унитарная операция  $R^\dagger(n, s)$ , и его состояние будет  $|s\rangle$ . Введенная бинарная переменная  $s$  может быть рассмотрена как внешний классический сигнал. Следовательно, наша ячейка преобразует классическую информацию в квантовое состояние:

$$U_G : s \rightarrow |s\rangle.$$

Такое преобразование может представлять интерес, поскольку, например, любой квантовый алгоритм имеет классический вход и, следовательно, начинается с преобразования классической информации в состояния квантовой системы.

Уравнение (11) позволяет ввести ячейку с более сложной платформой измерения, чем  $Z$ . Так, проводя измерение наблюдаемой  $A = SZS^\dagger$ , найдем, что

$$|b\rangle = (S \otimes K) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |A_n\rangle R'(n, s) K|s\rangle, \quad (13)$$

где  $R'(n, s) = KR(n, s)K^\dagger$ . Это уравнение означает, что ячейка, включающая в себя измерение наблюдаемой  $A$  и

восстанавливающий оператор  $R'(n, s)$ , производит операцию  $s \rightarrow K|s\rangle$ . Таким образом можно осуществить различные операции и получить различные состояния на выходе. В качестве примера покажем, что наши ячейки могут работать с суперпозиционными и перепутанными состояниями, которые являются главным ресурсом любого квантового вычисления. Чтобы сгенерировать суперпозицию, положим  $S = K = H$ , где  $H$  – преобразование Адамара. Тогда необходимая схема будет включать бифотон, измерение  $X = HZH$  и восстанавливающий оператор  $R' = HX^{n+s}H = Z^{n+s}$ . Такая ячейка осуществляет преобразование  $s \rightarrow (1/\sqrt{2})(|0\rangle + (-1)^s|1\rangle)$ .

Для генерации перепутанного состояния можно взять два бифотона и белловское измерение двух холостых фотонов в базисе наблюдаемой  $A = SZ \otimes ZS^\dagger$ , где  $S = C_{12}(H \otimes 1)$ , а  $C_{12}$  – C-NOT-операция между холостыми фотонами. Для этого случая восстанавливающий оператор  $R = (Z^{m+s} \otimes 1)(1 \otimes X^{n+p})$ , где биты  $m, n$  и  $s, p$  кодируют исход измерения и классический внешний сигнал. В результате ячейка осуществляет операцию  $s, p \rightarrow (1/\sqrt{2}) \times (|0, p\rangle + (-1)^s|1, 1 \oplus p\rangle)$ . Рассмотренные примеры представляют собой схемы для кодирования классической информации с помощью суперпозиционных и перепутанных состояний фотонов.

Следующий пример связан с вычислением функции

$$f \rightarrow U_f : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \otimes f(x)\rangle, \quad (14)$$

где  $x, y = 0, 1$ . Эта задача может быть выполнена с помощью двух бифотонов, измерения наблюдаемой  $A = U_f(Z \otimes Z)U_f^\dagger$  и восстанавливающего оператора  $R = X^a \otimes X^b$ , где  $a = n + x$ ,  $b = m + f(n) + y + f(x)$ , а две пары битов,  $n, m$  и  $x, y$ , кодируют исходы измерения наблюдаемой  $A$  и классический входной сигнал. В этом случае ячейка выполняет операцию  $x, y \rightarrow |x, y \otimes f(y)\rangle$ .

В эксперименте можно приготовить следующее состояние бифотона  $|b_{HV}\rangle = (1/\sqrt{2})(|HH\rangle + |VV\rangle)$ . Несмотря на то что такое чистое состояние возникает только после постселекции, скорость генерации таких бифотонов может быть высокой. Так, для импульсного лазера с длительностью импульса  $\sim 100$  фс, частотой следования 100 МГц и средней мощностью 200 мВт вероятность генерации одного бифотона составляет  $10^{-4}$ , а скорость генерации бифотонов – порядка  $10^4$  в секунду. Такая скорость представляет интерес для реальных квантовых коммуникаций.

Поляризацию сигнального и холостого фотонов можно сравнительно легко трансформировать с помощью линейных оптических элементов типа четверть- и полуволновых пластинок, поляризационных делителей, ячейки Поккельса и других. Такие преобразования описываются унитарным оператором

$$D = \begin{bmatrix} t^* & -r \\ r^* & t \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ . В общем случае преобразование оператора  $D$  оставляет инвариантным только бифотон в антисимметричном белловском состоянии:  $(D \otimes D)(1/\sqrt{2}) \times (|HV\rangle - |VH\rangle) = (1/\sqrt{2})(|HV\rangle - |VH\rangle)$ . Однако в частном случае вращения поляризации, который описывается оператором  $D$  с коэффициентами  $r = \sin \alpha$  и  $t = \cos \alpha$ , мы получаем уравнение (11):  $(D \otimes D)|b_{HV}\rangle = |b_{HV}\rangle$ .

Это означает, что бифотон  $|b_{HV}\rangle$  можно использовать для наших ячеек. Тогда схема ячейки будет содержать поляризационный делитель, два детектора и ячейку Поккельса. Схема работает следующим образом. Поляризационный делитель разделяет холостые фотоны с  $H$ - и  $V$ -поляризациями, которые попадают на детекторы  $D_H$  и  $D_V$ . Один бит классической информации  $n$  получается в результате измерения, поскольку есть только два исхода, когда один и только один из детекторов ( $D_H$  или  $D_V$ ) регистрирует фотон. Существует также внешний классический сигнал, значения которого  $s = H, V$  вместе с  $n$  поступают на вход ячейки Поккельса. Она играет роль восстанавливающего оператора  $R$ , который в данном случае вращает плоскость поляризации сигнального фотона и приготавливает его в состоянии  $|s\rangle$ . Если использовать неколлинеарный режим генерации, можно получить квантовый регистр, где набор бифотонов получается путем селекции пространственно-сопряженных пар.

С физической точки зрения схема, определенная согласно (12), представляет собой однофотонный источник, который генерирует фотон, используя бифотон в чистом состоянии  $|b\rangle$ . Основную роль в этом случае играет корреляция между фотонами, а не перепутанность состояния. Это означает, что такой источник может использовать смешанное состояние бифотона  $B = (1/2)(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$  и измерение наблюдаемой  $Z$ . В эксперименте смешанное состояние приготовить проще, однако оно имеет классическую корреляцию. Это приводит к особенностям, если смешанное состояние бифотона используется для логических ячеек. Так, например, ячейки не смогут преобразовать классический сигнал в квантовую суперпозицию. Однако эта задача может быть решена другим способом: вначале приготавливается однофотонное поляризованное состояние, а затем с помощью ячейки Поккельса поляризация вращается:  $|H\rangle, s \rightarrow (1/\sqrt{2}) \times (|H\rangle + (-1)^s|V\rangle)$ .

Авторы благодарят С.П.Кулика за обсуждение результатов. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 06-02-16769).

## Приложение

Эффективные гамильтонианы для кооперативных процессов могут быть получены при рассмотрении второго порядка теории возмущений по взаимодействию. Возьмем оператор взаимодействия в виде  $H = V_d + W$ , где  $V_d = -\sum_{a \neq c} d_a E(r_a)$  – гамильтониан взаимодействия атомов и поля в дипольном приближении;

$$W = \sum_{a \neq c} \frac{(d_a, d_c)R^2 - 3(d_a, R)(d_c, R)}{R^5}$$

– гамильтониан диполь-дипольного взаимодействия атомов. Во втором порядке по  $H$  оператор эволюции

$$T \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right]$$

имеет два слагаемых вида

$$P = \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 (V_d(t_2)W(t_1) + W(t_2)V_d(t_1)),$$

(П1)

которые содержат многочастичные процессы, определенные в (5) и (6). Введем картину взаимодействия  $d_q(t) = a_{mn}^a \exp(i\omega_{mn}^a t)$ , где  $a_{mn}^a = d_{mna} |m\rangle_a \langle n|$ ;  $d_{mna}$  – матричный элемент перехода  $m \leftrightarrow n$  атома  $a$ ;  $\omega_{mn}^a = (E_m - E_n)/\hbar$  – частота перехода;  $E(r_a, t) = \sum_q u_q(r_a) e_q^a \times \exp(-i\Omega_q t)$ ,  $q = \pm k$ ;  $e_q^a = u_k(r_a)$ ,  $u_{-k}(r) = u_k^*(r)$  – набор ортогональных функций;  $\Omega_{-k} = -\Omega_k$ ;  $c_k, c_{-k} = c_k^\dagger$  – операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором  $k$ ;  $[c_k, c_m^\dagger] = \delta_{km}$ ; суммирование по  $k$  есть суммирование по поляризации. Тогда гамильтониан дипольного взаимодействия принимает вид

$$W(t) = \sum_{a \neq c} \sum_{mnp} a_{mn}^a a_{pr}^c \exp(i\omega_{mn}^a t + i\omega_{pr}^b t) \mu_{ac},$$

где  $\mu_{ac}$  – константа взаимодействия.

Пусть частоты удовлетворяют условиям

$$\omega_{ps}^a + \omega_{rz}^c = \Omega_q. \quad (\text{П2})$$

Тогда, используя значение интеграла

$$\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \exp(iy t_2 + ix t_1) \approx \frac{t}{ix}$$

при  $x + y \approx 0$ , получаем  $P = (-i/\hbar)t\vartheta_1$ , где найденный эффективный гамильтониан  $\vartheta_1$  имеет следующий вид:

$$\vartheta_1 = -\frac{i}{\hbar} \sum_{b, a \neq c, q} \sum_{mnp, r, z} (a_{mn}^b \otimes a_{ps}^a \otimes a_{rz}^c \otimes e_q^b) \mu_{ac} \times \left( \frac{1}{\omega_{ps}^a + \omega_{rz}^c} + \frac{1}{\omega_{mn}^b + \Omega_q} \right) \delta(\omega_{mn}^b + \omega_{ps}^a + \omega_{rz}^c + \Omega_q). \quad (\text{П3})$$

Этот гамильтониан описывает взаимодействие трех атомов ( $a, b, c$ ) и одной моды ( $e_q$ ). Он может быть редуцирован, если положить  $a = b$ . Тогда мы получим эффективный гамильтониан  $\vartheta_2$ , который описывает взаимодействие уже двух атомов и моды электромагнитного поля:

$$\vartheta_2 = \sum_{a \neq c, q} \sum_{m, s, r, z} f_{msrz}^{acq} (|m\rangle_a \langle s| \otimes |r\rangle_c \langle z| \otimes e_q^a) \times \delta(\omega_{ms}^a + \omega_{rz}^c - \Omega_q), \quad (\text{П4})$$

где константа связи

$$f_{msrz}^{acq} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n d_{mna} d_{nsa} d_{rzc} \mu_{ac} \times \left( \frac{1}{\omega_{ns}^a + \omega_{rz}^c} + \frac{1}{\omega_{mn}^a + \Omega_q} \right). \quad (\text{П5})$$

В условиях резонанса (5) и (6) мы можем рассматривать

атомы как двухуровневые системы с верхним уровнем 1 и нижним уровнем 0. Пусть  $\omega_{10}^r = \omega_r$  будет частотой перехода атома ( $r = a, b$ ). Тогда мы получим эффективный гамильтониан, который описывает кооперативный процесс поглощения и обмена когерентностью атомов  $a$  и  $b$ :

$$V_{ab1} = i\hbar^{-1} k_1 (s_{10}(a) s_{10}(b) c_1 - s_{01}(a) s_{01}(b) c_1^\dagger), \quad (\text{П6})$$

$$V_{ab2} = i\hbar^{-1} k_2 (s_{10}(a) s_{01}(b) c_2 - s_{01}(a) s_{10}(b) c_2^\dagger),$$

где  $s_{xy}(r) = |x\rangle_r \langle y|$ ;  $x, y = 0, 1$ ;  $r = a, b$ ;  $c_m, c_1^\dagger$  – операторы уничтожения и рождения фотона на частоте  $\Omega_m$  ( $m = 1, 2$ ).

1. Raussendorf R., Briegel H.J. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5188 (2001).
2. Raussendorf R., Browne D.E., Briegel H.J. *Phys. Rev. A*, **68**, 022312 (2003).
3. Walther P., Resch K.J., Rudolph T., Schenck E., Weinfurter H., Vedral V., Aspelmeyer M., Zeilinger A. *Nature*, **434**, 169 (2005).
4. Tame M.S., Prevedel R., Paternostro M., Bohi P., Kim M.S., Zeilinger A. arXiv:quant-ph/0611186 (2006).
5. Den Nest M.V., Miyake A., Dur W., Briegel H. arXiv:quant-ph/0604010 (2006); *Phys. Rev. A*, **74**, 052316 (2006).
6. Kiesel N., Schmid C., Weber U., Guehne O., Toth G., Ursin R., Weinfurter H. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 210502 (2005).
7. Borhani M., Loss D. *Phys. Rev. A*, **71**, 034308 (2005).
8. Clark S.R., Moura Alves C., Jaksch D. *New J. Phys.*, **7**, 124 (2005).
9. Kay A., Pachos J.K., Adams C.S. *Phys. Rev. A*, **73**, 022310 (2006).
10. Xiao-Hu Zheng, Ping Dong, Zheng-Yuan Xue, Zhuo-Liang Cao. arXiv:quant-ph/0605240 (2006).
11. Nielsen M.A. quant-ph/05040 (2005).
12. Verstraete F., Cirac J.I. *Phys. Rev. A*, **70**, 060302(R) (2004).
13. Browne D.E., Rudolph T. *Phys. Rev. Lett.*, **95** 10501 (2005).
14. Jing Zhang. arXiv:quant-ph/0501112 (2005); *Phys. Rev. A*, **73**, 032318 (2006).
15. Menicucci N.C., van Loock P., Gu M., Weedbrook C., Ralph T.C., Nielsen M.A. arXiv:quant-ph/0605198 (2006); *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 110501 (2006).
16. Clark S.R., Moura Alves C., Jaksch D. *New J. Phys.*, **7**, 124 (2005).
17. Gottesman D., Chuang I. *Nature*, **402**, 390 (1999); arXiv:quant-ph/9908010 (1999).
18. Nielsen M.A. *Phys. Lett. A*, **308**, 96 (2003); arXiv:quant-ph/0108020.
19. Leung D.W. *Int. J. Quantum. Inf.*, **2**, 33 (2004); arXiv:quant-ph/0310189 (2003).
20. Leung D.W. arXiv:quant-ph/0111122 (2001).
21. Jozsa R. arXiv:quant-ph/0508124 (2005).
22. Varsanyi F., Dieke G.H. *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 442 (1961).
23. Dexter D.L. *Phys. Rev.*, **126**, 1962 (1962).
24. Башаров А.М. *ЖИЦ*, **51**, 106 (1989).
25. Berman P.R. *Phys. Rev. A*, **29**, 3234 (1984).
26. Kwiat P.G., Waks E., White A.G., Appelbaum I., Eberhard P.H. *Phys. Rev. A*, **60**, R773 (1999).
27. Kim Y.H., Chekhova M.V., Kulik S.P., Rubin M., Shih Y.H. *Phys. Rev. A*, **63**, 062301 (2001).
28. Brida G., Chekhova M.V., Genovese M., Gramegna M., Krivitsky L.A., Kulik S.P. *Phys. Rev. A*, **70**, 032332 (2004).
29. Bogdanov Yu.I., Chekhova M.V., Kulik S.P., Maslennikov G.A., Zhukov A.A., Oh C.H., Tey M.K. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 230503 (2004).
30. Genovese M., Brida G., Gramegna M., Rastello M.L., Chekhova M., Krivitsky L., Kulik S. arXiv:quant-ph/0409055 (2004).