PACS 03.67.Mn; 03.67.Hk

# Геометрическая мера перепутанности для трехчастичных *W*-состояний

**М.В.Волынец, В.Н.Горбачев, А.В.Жулис, А.Я.Казаков, Г.П.Сахарова**

*Введена геометрическая мера перепутанности для W-состояний и получены ее точные аналитические выражения. На основе численного расчета рассмотрена степень перепутанности для некоторых состояний этого класса, используемых в качестве квантового канала в задачах квантовой теории информации.*

***Ключевые слова**: перепутанные состояния, мера перепутанности, квантовый канал.*

## 1. Введение

Перепутанные состояния имеют особую корреляцию, которая представляет интерес для задач квантовой теории информации. Такие состояния используются как квантовый канал в процессах типа телепортации, плотного кодирования, распределения ключа и других. Качество квантового канала, а следовательно, и его потенциал, определяется прежде всего степенью корреляций, или перепутанности. Так, для задачи плотного кодирования пропускная способность квантового канала, образованного ЭПР-парой (Эйнштейн – Подольский – Розен), непосредственно определяется степенью ее перепутанности, которая в случае чистого двухчастичного состояния равна энтропии одной из частиц. Однако если квантовая система находится в смешанном состоянии или состоит более чем из двух частиц, единая мера перепутанности не известна. Это связано с тем, что корреляции в многочастичной системе с физической точки зрения могут быть весьма разнообразны.

Несмотря на отсутствие универсальной меры, имеется необходимость в критериях перепутанности. Прежде всего это относится к экспериментам, где генерируются перепутанные состояния, которые требуется идентифицировать в опыте. При теоретическом рассмотрении найденного состояния следует использовать все возможные критерии, чтобы полнее определить его свойства. В связи с этим разработка критериев и мер, характеризующих перепутанные состояния, представляется важной задачей.

Геометрическая мера перепутанности была введена в [1] и обсуждалась в [2]. Однако в этих работах не было получено удобных аналитических результатов, позволяющих охарактеризовать заданные состояния. В настоящей работе, следуя [3], введена геометрическая мера перепутанности для специального класса состояний – *W*-состояний; полученные результаты позволяют аналитически представить меру перепутанности для них. Данный набор состояний представляет интерес для квантовых информационных процессов, ряд из них реализован и исследован в эксперименте, а описание их свойств и применений, а также схему генерации можно найти в работе [4].

**М.В.Волынец, В.Н.Горбачев, А.В.Жулис, Г.П.Сахарова.** Северо-Западный институт печати Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна, Россия, 191180 С.-Петербург, пер. Джамбула, 13; e-mail: valery.gorbachev@gmail.com
**А.Я.Казаков.** Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Россия, 190000 С.-Петербург, Большая Морская ул., 67

Поступила в редакцию 5 июля 2007 г.

## 2. *W*-состояния

Рассмотрим *W*-состояния, для которых далее будет введена мера перепутанности. Они описывают многочастичные двухуровневые системы, в том числе системы с одной возбужденной частицей, и в частных случаях сводятся к состояниям Дике [5].

Трехчастичное *W*-состояние имеет вид

$$\Psi = p_{000}|000\rangle + p_{100}|100\rangle + p_{010}|010\rangle + p_{001}|001\rangle, \qquad (1)$$

где $|p_{000}|^2 + |p_{100}|^2 + |p_{010}|^2 + |p_{001}|^2 = 1$. Частный случай $W = (1/\sqrt{3})(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$ известен в квантовой теории информации как *W*-состояние [6]. Для $p_{000} = 0$ и при условии $p_{100} + p_{010} + p_{001} = 0$ возникают состояния Дике с $j = 3/2$, $m = 1/2$, где $j, m$ – собственные числа, которые отвечают собственным векторам двух коллективных операторов $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, а операторы $J_k$ ($k = 1, 2, 3$) удовлетворяют коммутационным соотношениям операторов углового момента [4]. В этом случае справедливо представление через антисимметричные волновые функции

$$\eta = \sqrt{2}\left[p_{010}|\Psi^-\rangle_{12}|0\rangle_3 + p_{001}|\Psi^-\rangle_{13}|0\rangle_2\right], \qquad (2)$$

где $\Psi^- = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$.

Поскольку мера перепутанности не изменяется при локальных унитарных преобразованиях, то наряду с состоянием (1) можно рассматривать и ряд других. Так, с помощью замены $0 \to 1$ найдем $\Psi_1 = p_{011}|011\rangle + p_{101}|101\rangle + p_{110}|110\rangle$. Эта волновая функция описывает состояние, которое получается, например, при распределении двух возбуждений между тремя двухуровневыми частицами, и может быть реализована при параметрическом взаимодействии света в прозрачной нелинейной среде. Для этого нужно, чтобы одновременно происходило три процесса деления частоты, в каждом из которых три классические волны накачки преобразуются в пары фотонов $a-b$, $a-c$, $b-c$. Такое взаимодействие можно описать эффективным гамильтонианом $H_{\text{eff}} = i\hbar(k_1 a^\dagger b^\dagger + k_2 a^\dagger c^\dagger + k_3 b^\dagger c^\dagger - k_1 ab - k_2 ac - k_3 bc)$, где $a, b, c$ – операторы уничтожения мод, а $k_x$ ($x = 1, 2, 3$) – константы взаимодействия. Такой процесс рассмотрен в [7], и известна его экспериментальная реализация, когда состояния $|0\rangle$, $|1\rangle$ отвечают фоковским состояниям света.

Состояния $W$ отличаются от хорошо известных GHZ-состояний (Grinberger – Horne – Zeilinger), характерный представитель которых $\text{GHZ} = (1/\sqrt{2})(|000\rangle + |111\rangle)$. Основное различие связано с тем, что они не могут быть связаны между собой локальными унитарными преобразованиями [6], а следовательно, характер перепутанности у них разный. В качестве иллюстрации укажем в явном виде связь между состояниями GHZ и $W^* = (1/\sqrt{2})|011\rangle + (1/2)(|010\rangle + |100\rangle)$, которая осуществляется нелокальным унитарным двухчастичным оператором:

$$(1 \otimes V)|\text{GHZ}\rangle_{ABC} = |W^*\rangle, \tag{3}$$

где $V = |\Psi^+\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 10| + |\Psi^-\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 00|$; $\Psi^\pm = (|10\rangle \pm |01\rangle)/\sqrt{2}$. Известно, что состояние GHZ может быть использовано в качестве квантового канала для телепортации как одной частицы [8], так и неизвестного перепутанного состояния [9]. Квантовый канал, образованный $W$-состояниями в этих же случаях, исследован в работах [10] и [11] соответственно.

## 3. Мера перепутанности

Под геометрической мерой перепутанности будем понимать расстояние между заданным $W$-состоянием, определенным согласно (1), и множеством всех трехчастичных факторизованных состояний. Тогда вычисление меры или указанного расстояния представляет собой решение вариационной задачи, поскольку требуется найти минимальное расстояние до множества факторизованных, или неперепутанных состояний.

Множество неперепутанных состояний

$$\phi = \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3, \tag{4}$$

где $\varphi_k = u_k|0\rangle + z_k|1\rangle$, а условие нормировки определяется соотношением $\bigotimes_k (|u_k|^2 + |z_k|^2) = 1$, $k = 1, 2, 3$. В качестве меры перепутанности заданного состояния $\Psi$ будем рассматривать расстояние $E(123)(\Psi)$:

$$E(123)(\Psi) = \min\nolimits_{\Phi \in \Omega(123)} \operatorname{dist}(\Phi, \Psi), \tag{5}$$

где $\operatorname{dist}(\Phi, \Psi) = (||\Phi - \Psi||^2)^{1/2}$; $\Omega(123) = \phi$. Это задача поиска минимума функции $\operatorname{dist}^2(\Phi, \Psi) = ||\Phi - \Psi||^2 = (\Psi - \Phi; \Psi - \Phi)$ на множестве $\phi$. Условие (5) имеет простой смысл: оно эквивалентно максимальному значению $(\Psi; \Phi)$, известному в квантовой теории информации как fidelity, которое показывает, с какой вероятностью состояние $\Phi$ содержит состояние $\Psi$, или наоборот.

С использованием неопределенных множителей Лагранжа задача (5) сводится к нахождению стационарной точки функции

$$Q = 2 - (\Psi; \varphi) - (\varphi; \Psi) + \lambda \bigotimes_k \left(|u_k|^2 + |z_k|^2\right) - 1 = 0. \tag{6}$$

Соответствующие вариационные уравнения приводят к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\lambda u_1^*(|u_2|^2 + |z_2|^2)(|u_3|^2 + |z_3|^2) = p_{000}^* + p_{010}^* z_2 u_3 + p_{001}^* u_2 z_3,$$

$$\lambda z_1^*(|u_2|^2 + |z_2|^2)(|u_3|^2 + |z_3|^2) = p_{100}^* u_2 u_3,$$

$$\lambda u_2^*(|u_1|^2 + |z_1|^2)(|u_3|^2 + |z_3|^2) = p_{000}^* + p_{010}^* z_1 u_3 + p_{001}^* u_1 z_3,$$

$$\lambda z_2^*(|u_1|^2 + |z_1|^2)(|u_3|^2 + |z_3|^2) = p_{010}^* u_1 u_3,$$

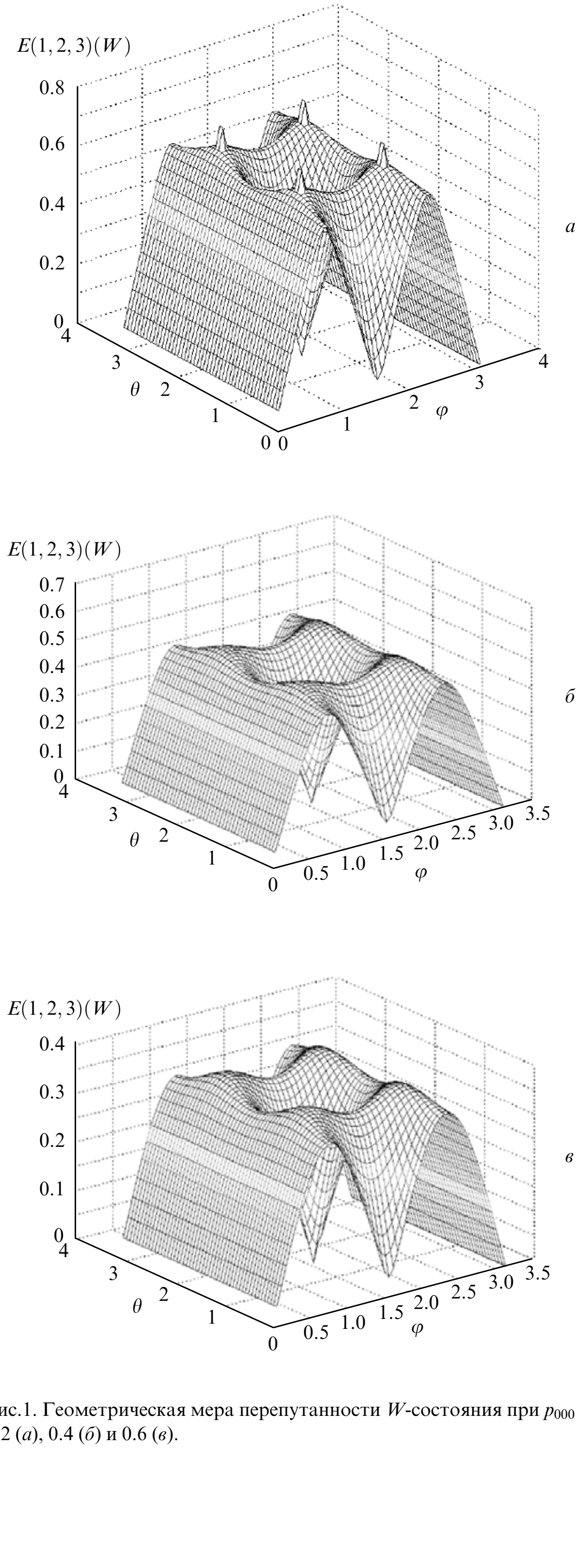


Рис.1. Геометрическая мера перепутанности $W$-состояния при $p_{000} = 0.2$ (*а*), 0.4 (*б*) и 0.6 (*в*).

$$\lambda u_3^*(|u_1|^2+|z_1|^2)(|u_2|^2+|z_2|^2)=p_{000}^*+p_{010}^*z_2u_1+p_{100}^*u_2z_1,$$

$$\lambda z_3^*(|u_1|^2+|z_1|^2)(|u_3|^2+|z_3|^2)=p_{001}^*u_2u_1.$$

Используя замену переменных $c_k=z_k/u_k$ ($k=1,2,3$), запишем эту систему уравнений в виде

$$c_1=\frac{p_{100}^*}{p_{000}+p_{010}c_2^*+p_{001}c_3^*},$$

$$c_2=\frac{p_{010}^*}{p_{000}+p_{010}c_1^*+p_{001}c_3^*},$$

$$c_3=\frac{p_{001}^*}{p_{000}+p_{010}c_2^*+p_{001}c_1^*}.$$

Решая эти уравнения, найдем интересующую нас величину $E(1,2,3)(W)=[2\,(1-F_{\max})]^{1/2}$, где $F_{\max}$ – максимальное значение fidelity:

$$|(\Psi,\varphi)|=\frac{p_{000}+|p_{100}|\rho_1+|p_{010}|\rho_2+|p_{001}|\rho_3}{\left[(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)(1+\rho_3^2)\right]^{1/2}}.$$

Здесь величины $\rho_{1,2,3}$ связаны уравнением

$$|p_{100}|Z(\rho_1)=|p_{010}|Z(\rho_2)=|p_{001}|Z(\rho_3), \qquad (8)$$

где $Z(x)=x+1/x$. Для одного из неизвестных можно записать замкнутое уравнение

$$p_{000}=\pm T(\rho_1), \qquad (9)$$

где

$$T(\rho)=\frac{|p_{100}|}{\rho}-|p_{010}|Z^{-1}\left[\frac{|p_{100}|}{|p_{010}|}Z(\rho)\right]-|p_{001}|Z^{-1}\left[\frac{|p_{100}|}{|p_{001}|}Z(\rho)\right].$$

Уравнение (9) получено в предположении, что $p_{000}$ вещественно и $p_{000}\geqslant 0$, $|p_{100}|\geqslant|p_{010}|, |p_{001}|$.

В качестве примера рассмотрим следующий случай. Положим все коэффициенты вещественными и введем параметризацию $p_{100}=q\cos\theta$, $p_{010}=q\sin\theta\cos\varphi$, $p_{001}=q\sin\theta\sin\varphi$, $q=(1-p_{000}^2)^{1/2}$, где $q$, $\theta$, $\varphi$ – сферические координаты. Мера перепутанности $W$-состояния в зависимости от различных значений $p_{000}$ показана на рис.1. Она имеет характерный четырехпичковый вид с провалом до нуля в центре поверхности. Видно, что с ростом коэффициента $p_{000}$ величина перепутанности $E(1,2,3)(W)$ уменьшается. Это связано с тем, что вес состояния $|000\rangle$ растет и всё состояние в целом оказывается близким к этому факторизованному состоянию. Образование пиков в $E(1,2,3)(W)$ связано с наличием в $W$-состоянии структуры типа ЭПР-пары $\Psi^{\pm}=(1/\sqrt{2})(|01\rangle\pm|10\rangle)$, которая сама по себе является максимально перепутанной. Так, переписывая (1) с учетом принятой параметризации, найдем, например, что $\Psi=(1-q^2)^{1/2}|000\rangle+q\sin\theta|0\rangle_1(\cos\varphi|01\rangle+q\sin\varphi|10\rangle)+q\cos\theta|100\rangle$. Отсюда видно, что при $\cos\varphi=\sin\varphi$ возникают ЭПР-пары. Наличие провала в центре обусловлено тем, что при $\theta=\varphi=\pi$ наше состояние будет не перепутанным: $[(1-q^2)^{1/2}|0\rangle+q|1\rangle]|00\rangle$.

1. Shimony A. Ann. N.Y. *Acad. Sci.*, **55**, 675 (1995); Barnum H., Linden N. *J. Phys. A: Math.Gen.*, **34**, 6787 (2001).
2. Wei T.-C., Golbart P.M. *Phys. Rev. A*, **68**, 042307 (2003).
3. Kazakov A.Ya. *Intern. J. Quant. Inform.*, **4**, 907 (2006).
4. Gorbachev V.N., Trubilko A.I. *Laser Phys. Lett.*, **3** (2), 59 (2006).
5. Dicke R. *Phys. Rev.*, **93**, 99 (1954).
6. Dur W., Vidal G., Cirac J.I. *Phys. Rev. A*, **62**, 062314 (2000).
7. Bradley A.S. , Olsen M.K., Pfister O., Pooser R.C. *Phys. Rev. A*, **72**, 053805 (2005).
8. Karlsson A., Bourennane M. *Phys. Rev. A*, **58**, 4394 (1998).
9. Горбачев В.Н., Трубилко А.И. *ЖЭТФ*, **118**, 1036 (2000); Marinatto L., Weber T. *Found. Phys. Lett.*, **13**, 119 (2000).
10. Agrawal P., Pati A. *Phys. Rev. A*, **74**, 0602320 (2006).
11. Gorbachev V.N., Trubilko A.I., Rodichkina A.A., Zhiliba A.I. *Quant. Inform. and Comput.*, **2**, 367 (2002); Gorbachev V.N.,Trubilko A.I., Rodichkina A.A. *Phys. Lett. A*, **314**, 267 (2003).