

Фазовая неустойчивость в четырехчастотном кольцевом газовом лазере с анизотропным резонатором

Л.П.Свирина

На основе разработанной и экспериментально апробированной модели, учитывающей в явном виде зависимость коэффициента обратного рассеяния встречных волн от поляризационных характеристик, проведено теоретическое исследование явлений нелинейной динамики в четырехчастотном кольцевом газовом лазере класса А с эллиптическими неортогональными состояниями поляризации встречных волн. Показано, что неустойчивость фазовых характеристик генерируемого поля вызывает переключение интенсивностей, состояний поляризации и разностей фаз встречных волн в режиме автоколебаний, смещение переключения интенсивностей по отстройке, обусловленное сдвигом фазы волны из-за отличной от нуля эллиптичности, спонтанное нарушение фазовой симметрии, сопровождающееся возникновением как детерминированного, так и индуцированного шумом хаоса, мультистабильность аттракторов с различной топологией, симметричные и асимметричные хаотические, а также стохастические колебания.

Ключевые слова: поляризация излучения, линейная связь, кольцевой лазер, многомодовая генерация, спонтанное нарушение фазовой симметрии, симметричный и асимметричный хаос, индуцированные шумом сложные колебания.

1. Введение

Применение четырехчастотных кольцевых газовых лазеров (ЧКГЛ) класса А в гироскопии (см., напр., [1–3]) вызывает не ослабевающий со временем интерес к изучению роли различных физических механизмов в процессе формирования генерируемого поля и к разработке новых способов управления характеристиками излучения этих лазеров. Созданная на основе матричного метода и используемая в настоящей работе модель ЧКГЛ позволяет исследовать влияние поляризационных эффектов на рабочие характеристики лазерных гироскопов. Помимо традиционных технических приложений, ЧКГЛ с анизотропным резонатором является прекрасной физической моделью для изучения общих закономерностей, присущих многопараметрическим нелинейным системам с высокой размерностью.

До настоящего времени исследования ЧКГЛ ограничивались, в основном, стационарными режимами генерации (см., напр., [4–6]), а обратное рассеяние учитывалось только для встречных волн с совпадающими линейными состояниями поляризации [5]. Особенности нелинейной динамики в таких системах экспериментально были обнаружены относительно недавно [7, 8]. В настоящей работе получены уравнения, описывающие генерацию ЧКГЛ с учетом обратного рассеяния для произвольных состояний поляризации встречных волн и определены условия формирования регулярных, хаотических и стохастических режимов генерации в случае эллиптических неортогональных состояний поляризации этих волн.

Л.П.Свирина. Институт физики им. Б.И.Степанова НАНБ, Белоруссия, 220072 Минск, просп. Независимости, 68; e-mail: lsvirina@dragon.bas-net.by

Поступила в редакцию 30 января 2006 г., после доработки – 6 июня 2006 г.

В лазерах с анизотропными резонаторами при адиабатическом исключении населенностей и поляризуемости среды (лазеры класса А) известны два физических механизма, приводящих в отсутствие какого-либо внешнего, зависящего от времени воздействия на систему к возникновению автоколебательных режимов генерации: это линейная связь встречных волн, вызывающая фазовую неустойчивость, а также конкуренция анизотропии нелинейной активной среды и анизотропии резонатора, приводящая к поляризационной неустойчивости.

Линейная связь генерируемых волн, возникающая вследствие обратного рассеяния на неоднородностях среды и резонатора, вовлекает в процесс формирования лазерного поля фазовые характеристики излучения и создает предпосылки для появления обусловленных фазовой неустойчивостью эффектов, которые могут иметь место и в лазерах со скалярным полем (см., напр., [9–12]). Незатухающие во времени периодические колебания поляризации излучения возникают при сопоставимых по величине анизотропиях среды и резонатора и сильно различающихся собственных состояниях поляризации среды и резонатора (при этом уравнения для интенсивностей, азимутов и эллиптичностей не зависят от фаз волн генерации [13]). Поляризационная неустойчивость обнаружена экспериментально на различных переходах в линейных He–Ne [14–17], а также в He–Xe-лазерах [16] и описана теоретически в [17, 18].

В настоящее время, несмотря на появление ряда работ, в которых учитывается линейная связь в анизотропных лазерах класса В (см., напр., [19, 20]), закономерности формирования векторного поля в лазерных системах, обусловленные неустойчивостью фазовых характеристик генерируемых волн, изучены недостаточно полно.

К числу важных и практически не разработанных проблем современной динамики лазерных систем следует отнести создание теоретических подходов, используемых для описания анизотропных лазеров с линейной

связью в условиях многомодовой генерации. Недостаточно развиты также представления о механизмах возникновения сложных (хаотических и стохастических) режимов генерации в нелинейных системах с симметрией, перспективных для использования в оптических системах обработки информации и связи. Проведенные в настоящей работе исследования нелинейной динамики в ЧКГЛ с линейной связью эллиптически поляризованных встречных волн могут быть полезны при решении перечисленных проблем лазерной физики, а также могут послужить основой для понимания особенностей нелинейной динамики высокоразмерных связанных систем различного физического происхождения.

2. Математическая модель

Линейная связь встречных волн в кольцевых лазерах, обусловленная обратным рассеянием на неоднородностях активной среды и элементах резонатора, вследствие которой электромагнитное поле в каждом из направлений распространения представляет собой некую суперпозицию этих волн, является одним из основных механизмов формирования генерируемого поля в лазерах с различными активными средами. В лазерных гироскопах обратное рассеяние света при малых скоростях вращения приводит к равенству частот встречных волн и отсутствию сигнала биений, т. е. к эффекту синхронизации, или захвату частот (см., напр., [21, 22]).

Многообразие факторов, приводящих к обратному рассеянию (см., напр. [23–27]), не позволяет учесть вклад каждого из них в формирование лазерного поля. В настоящее время известны два подхода, используемых для описания этого эффекта. Первый из них базируется на обоснованном в [28, 29] предположении, что всю совокупность упорядоченных неоднородностей можно свести к одному, в общем случае анизотропному отражателю, расположенному внутри резонатора с эффективными коэффициентами связи между встречными волнами. При этом необходимо учитывать граничные условия на отражателе. В рамках второго подхода влияние обратного рассеяния описывается с помощью внешнего анизотропного зеркала (см., напр., [30]).

Применение формализма векторов и матриц Джонса [31–33] в теории газовых лазеров [34–38] позволяет в рамках первого подхода учесть обратное рассеяние для волн с произвольными состояниями поляризации. Заметим, что использование матричного метода позволило также решить одну из принципиальных задач физики анизотропных лазерных систем – учесть равноправное влияние анизотропии среды и анизотропии резонатора на формирование поляризации генерируемого излучения и описать экспериментально наблюдавшиеся режимы с периодически изменяющимися во времени азимутом и эллиптичностью [17].

На рис.1 изображена схема ЧКГЛ с анизотропным резонатором и представлена конфигурация электромагнитного поля на отражателе. Резонатор содержит отражательный элемент l – оптическую неоднородность, описываемую в общем случае различными для встречных направлений комплексными коэффициентами отражения (r^\pm) и пропускания (t^\pm), которые из-за возможного присутствия диффузной компоненты рассеянного излучения и дифракционных эффектов могут зависеть от состояний поляризации генерируемых волн.

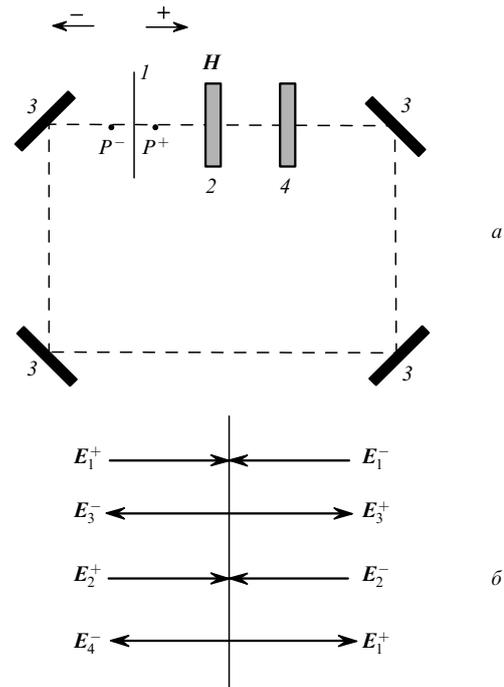


Рис.1. Схема кольцевого газового лазера с анизотропным резонатором и линейной связью (а) и конфигурация электромагнитного поля на отражательном элементе (б):

l – отражательный элемент; 2 – активная среда; 3 – зеркала; 4 – анизотропные элементы; H – напряженность продольного магнитного поля на среде.

Электромагнитное поле в одномодовом ЧКГЛ* описывается суперпозицией четырех бегущих волн, векторы Джонса которых имеют следующий вид [39, 34]:

$$\mathbf{E}_j^i = \left[\frac{I_j^i(t)}{\cosh 2\beta_j^i(t)} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} \cos z_j^i(t) \\ \sin z_j^i(t) \end{pmatrix} \times \exp[i(\Psi_j^i(t) - \omega_j^i t)], \quad j = 1, 2, i = \pm, \quad (1)$$

где $I = |E|^2$ – интенсивность; Ψ – фаза; $\omega/2\pi$ – частота генерации (в герцах); $z = \gamma + i\beta$; γ – азимут; $\xi = \tanh \beta$ – эллиптичность электромагнитной волны; индексы 1, 2 соответствуют однонаправленным волнам, а \pm – встречным.

Запишем уравнения стационарной генерации ЧКГЛ, представляющие собой условия воспроизводимости вектора поля за один обход светом контура резонатора (из начальной точки в начальную), в векторной форме. Стартуя из точки P^\pm в направлении \pm , при условии непрерывности тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля на границе эффективного отражателя получим

$$\hat{M}^+ \hat{S}_1^+ \mathbf{E}_3^+ = \lambda_1^+ \mathbf{E}_1^+, \quad \mathbf{E}_3^+ = t_1^+ \mathbf{E}_1^+ + r_1^- \mathbf{E}_1^- + \alpha(t_2^+ \mathbf{E}_2^+ + r_2^- \mathbf{E}_2^-), \quad (2)$$

$$\hat{M}^+ \hat{S}_2^+ \mathbf{E}_4^+ = \lambda_2^+ \mathbf{E}_2^+, \quad \mathbf{E}_4^+ = \alpha(t_1^+ \mathbf{E}_1^+ + r_1^- \mathbf{E}_1^-)$$

*В рассматриваемом ЧКГЛ формируется электромагнитное поле с одним продольным и одним поперечным индексами моды. Появление фазовой анизотропии в резонаторе снимает вырождение этой моды, создавая условия для существования над порогом четырех бегущих волн с различными интенсивностями, частотами и состояниями поляризации.

$$+ t_2^+ E_2^+ + r_2^- E_2^-, \quad (3)$$

$$\hat{S}_1^- \hat{M}^- E_3^- = \lambda_1^+ E_1^-, \quad E_3^- = t_1^- E_1^- + r_1^+ E_1^+ \\ + \alpha(t_2^- E_2^- + r_2^+ E_2^+), \quad (4)$$

$$\hat{S}_2^- \hat{M}^- E_4^- = \lambda_2^- E_2^-, \quad E_4^- = t_2^- E_2^- + r_2^+ E_2^+ \\ + \alpha(t_1^- E_1^- + r_1^+ E_1^+), \quad (5)$$

где \hat{S}_1^\pm и \hat{S}_2^\pm – матрицы Джонса активной среды для волн 1^\pm и 2^\pm соответственно; λ_j^\pm – собственные значения матриц Джонса лазера $\hat{Q}_{1,2}^\pm = \hat{M}^+ \hat{S}_{1,2}^\pm$ и $\hat{Q}_{1,2}^- = \hat{S}_{1,2}^- \hat{M}^-$; \hat{M}^\pm – матрицы резонатора для направлений \pm ; r_1^\pm, t_1^\pm (r_2^\pm, t_2^\pm) – комплексные коэффициенты отражения (пропускания) встречных волн, принадлежащих одной и той же собственной частоте резонатора ω_{1c} (ω_{2c}); α – параметр, описывающий линейную связь встречных волн, принадлежащих различным собственным частотам резонатора.

Абсолютные значения параметров $r_{1,2}^\pm, t_{1,2}^\pm$ удовлетворяют условиям $|r_{1,2}^\pm|^2 + |t_{1,2}^\pm|^2 \leq 1$, а фазы эквивалентных коэффициентов отражения $\phi_{1,2}^\pm = \arg r_{1,2}^\pm$ при рассеянии на неоднородностях диэлектрической проницаемости и проводимости связаны между собой соотношениями $(\phi_{1,2}^+ + \phi_{1,2}^-)/2 = m\pi$ (m – целое число) в случае консервативной связи или $(\phi_{1,2}^+ + \phi_{1,2}^-)/2 = (1/2 + m)\pi$ в случае неконсервативной (диссипативной) связи, который, как правило, реализуется в эксперименте. В частных случаях при $r = 1, t = 0$ и $r = 0, t = 1$ уравнения генерации (5) описывают идеальный линейный и идеальный кольцевой лазеры соответственно. В промежуточных случаях система обладает свойствами как линейного, так и кольцевого лазера.

Уравнения нестационарной генерации ЧКГЛ в векторном представлении на основании [40] записываются в следующем виде:

$$\frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \\ E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{M}^+ \hat{S}_1^+ t t_1^+ & \hat{M}^+ \hat{S}_1^+ r_1^- & \hat{M}^+ \hat{S}_1^+ \alpha t_2^+ & \hat{M}^+ \hat{S}_1^+ \alpha r_2^- \\ \hat{S}_1^- \hat{M}^- r_1^+ & \hat{S}_1^- \hat{M}^- t_1^- & \hat{S}_1^- \hat{M}^- \alpha r_2^+ & \hat{S}_1^- \hat{M}^- \alpha t_2^- \\ \hat{M}^+ \hat{S}_2^+ \alpha t_1^+ & \hat{M}^+ \hat{S}_2^+ \alpha r_1^- & \hat{M}^+ \hat{S}_2^+ t_2^+ & \hat{M}^+ \hat{S}_2^+ r_2^- \\ \hat{S}_2^- \hat{M}^- \alpha r_1^+ & \hat{S}_2^- \hat{M}^- \alpha t_1^- & \hat{S}_2^- \hat{M}^- r_2^+ & \hat{S}_2^- \hat{M}^- t_2^- \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \\ E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \\ E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $t' = tc/L$ – число обходов светом резонатора за время t ; c – скорость света; L – длина резонатора.

Матрица Джонса нелинейной активной среды лазера при условии ее однородности* определяется [32, 33] как

*Нелинейная среда может лишь приближенно полагаться однородной, если характеристики распространяющегося в ней излучения остаются неизменными и равными характеристикам излучения, падающего на среду, что справедливо в приближении третьего порядка по полю теории возмущений.

$$\hat{S}_j = \exp\left(-i \frac{\omega l}{c} \sqrt{\hat{\epsilon}_j}\right) = \exp\left[-i \frac{\omega l}{c} (1 + 2\pi\chi_j)\right], \quad (7)$$

где l – длина среды; ω/c – волновое число; $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\chi}$ – двумерные проекции тензоров диэлектрической проницаемости и восприимчивости на направление распространения света.

Для волны 1^+ матрица Джонса активной среды ЧКГЛ в присутствии продольного магнитного поля на основании [34, 38] записывается в виде

$$\hat{S}_1^+ = \exp\left[-i \frac{\omega l}{c} (1 + 2\pi\hat{\chi}_1^+)\right] = \exp h_1^+ \exp \hat{H}_1^+, \quad (8)$$

где

$$-2\pi i \hat{\chi}_1^+ \frac{\omega l}{c} = k_0 l \left\{ \bar{W}_1^+ \hat{I} + \begin{pmatrix} 0 & -i\Delta W_1^+ \\ i\Delta W_1^+ & 0 \end{pmatrix} \right. \\ - \hat{I} c_1^+ I_1^+ - i c_1^{+n} I_1^+ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \sum_{\substack{j=1, i=- \\ j=2, i=\pm}} a_{1j}^{+i} I_j^i - a_{1k}^+ I_{1k}^+ \\ \left. - \sum_{\substack{j=1, i=- \\ j=2, i=\pm}} \left(\begin{array}{cc} b_{1j}^{+i} / \cosh 2\beta_j^i & \tilde{b}_{1j}^{+i} / \cosh 2\beta_j^i - i d_{1j}^{+i} \\ \tilde{b}_{1j}^{+i} / \cosh 2\beta_j^i + i d_{1j}^{+i} & -b_{1j}^{+i} / \cosh 2\beta_j^i \end{array} \right) I_j^i \right. \\ \left. - \left(\begin{array}{cc} b_{1k}^+ / \cosh 2\beta_k & \tilde{b}_{1k}^+ / \cosh 2\beta_k - i d_{1k}^+ \\ \tilde{b}_{1k}^+ / \cosh 2\beta_k + i d_{1k}^+ & -b_{1k}^+ / \cosh 2\beta_k \end{array} \right) I_{1k}^+ \right\}; \quad (9)$$

$I_{1,2}^{\pm} = I_{1,2}^\pm |d_{ab}|^2 / 3\hbar^2 \gamma_a \gamma_b$ – безразмерные интенсивности волн $1^\pm, 2^\pm$; $I_{1,2}^\pm = |E_{1,2}^\pm|^2$; $k_0 = 2\pi^{3/2} N |d_{ab}|^2 \omega / 3\hbar c K u$ – коэффициент линейного усиления на центре линии; $|d_{ab}|$ – приведенный матричный элемент дипольного момента перехода; $\gamma_{a,b}$ – константы релаксации нижнего и верхнего уровней; N – плотность разности населенностей; $I_{1k}^+ = (I_1^- I_2^+ I_1'^- / I_1'^+)^{1/2}$; $W(x \pm \Delta, y) = U(x \pm \Delta, y) + iV(x \pm \Delta, y)$ – комплексная функция ошибок; $\bar{W}_1^\pm = \bar{U}_{1,2}^\pm + i\bar{V}_{1,2}^\pm = [W(x_{1,2}^\pm - \Delta, y) + W(x_{1,2}^\pm + \Delta, y)]/2$; $\Delta W_{1,2}^\pm = [W(x_{1,2}^\pm - \Delta, y) - W(x_{1,2}^\pm + \Delta, y)]/2$; $x_{1,2}^\pm \pm \Delta = (\omega_{1,2}^\pm - \omega_0 \pm g\mu_B H) / K u$ – отстройка частоты генерации $\omega_{1,2}^\pm$ относительно центра контура ω_0 ; $x' = x K u / 2\pi$ (в герцах); $\Delta = g\mu_B H / K u$; g – фактор Ланде; μ_B – магнетон Бора; H – напряженность продольного магнитного поля на среде; $K u = \Delta\omega_D / 2 \times \sqrt{\ln 2}$; $\Delta\omega_D$ – ширина доплеровского контура; $y = \gamma_{ab} / K u$; γ_{ab} – однородная ширина линии. Нелинейные коэффициенты самовоздействия $c_1^+, c_1'^+$, коэффициенты взаимодействия волны 1^+ с однонаправленными и встречными бегущими волнами $a_{11}^+, a_{12}^{\pm\mp}$ (b, \tilde{b}, d), а также коэффициенты комбинационного взаимодействия $a_{1k}^+, b_{1k}^+, \tilde{b}_{1k}^+, d_{1k}^+$, дающие вклад в поляризуемость среды на частоте ω_1^+ , для одноизотопного газа в доплеровском пределе и приближении релаксационных констант $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{ab}$ приведены в Приложении. Для произвольного уширения, равноизотопного состава и при учете констант ориентации и выстраивания они могут быть получены на основании результатов работ [34, 37, 38]. Выражение для тензора $\hat{\chi}_1^\pm$ получается из (9) при замене индексов $+ \leftrightarrow -$, для $\hat{\chi}_2^\pm$ – из $\hat{\chi}_1^\pm$ при замене $1 \leftrightarrow 2$.

При выводе уравнений генерации для волны 1^+ в скалярном виде воспользуемся уравнением для определения поляризационно-частотных характеристик мод резонатора без учета обратного рассеяния,

$$\hat{M}^+ \mathbf{E}_{jM}^+ = \lambda_{jM}^+ \mathbf{E}_{jM}^+, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

протранспонируем его, умножим справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а затем полученное равенство умножим слева на нестационарное уравнение для волны 1^+ , следующее из системы векторных уравнений (6). Здесь и далее индекс M отнесен к собственным значениям и собственным векторам матрицы резонатора. После этого, учтя соотношения

$$\tilde{M} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \det \hat{M},$$

$$\exp(h_1^+ + \hat{H}_1^+ + \ln \lambda_{1M}^+) \approx 1 + h_1^+ + \ln \lambda_{1M}^+ + \hat{H}_1^+, \quad (11)$$

$$\det \hat{M}^+ = \lambda_{1M}^+ \lambda_{2M}^+,$$

представим уравнения генерации для волны 1^+ в следующем виде:

$$\cot(z_1^+ - z_{2M}^+) \frac{dz_1^+}{dt'} + \frac{d}{dt'} \left(\ln \sqrt{\frac{I_1^+}{\cosh \beta_1^+}} + i\Psi_1^+ \right)$$

$$= h_1^+ + \ln \lambda_{1M}^+ + r_1^- \frac{\sin(z_{2M}^+ - z_1^-) \sqrt{I_1^- / \cosh 2\beta_1^-} e^{i\Psi_1^-}}{\sin(z_{2M}^+ - z_1^+) \sqrt{I_1^+ / \cosh 2\beta_1^+} e^{i\Psi_1^+}}$$

$$+ \alpha t_2^+ \frac{\sin(z_{2M}^+ - z_2^+) \sqrt{I_2^+ / \cosh 2\beta_2^+} e^{i\Psi_2^+}}{\sin(z_{2M}^+ - z_1^+) \sqrt{I_1^+ / \cosh 2\beta_1^+} e^{i\Psi_1^+}}$$

$$+ (\cos z_{2M}^+, \sin z_{2M}^+) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{H}_1^+ \begin{pmatrix} \cos z_1^+ \\ \sin z_1^+ \end{pmatrix}$$

$$\times \left[\sin(z_{2M}^+ - z_1^+) \sqrt{I_1^+ / \cosh 2\beta_1^+} e^{i\Psi_1^+} \right]^{-1}. \quad (12)$$

Уравнения (12) записаны в предположении, что коэффициенты отражения и пропускания встречных волн, принадлежащих одной собственной частоте резонатора, удовлетворяют условиям $|t| \approx 1$, $|r| \ll 1$, а величина обратного рассеяния из одной резонаторной моды в другую мала ($|z| \ll 1$), так что в (12) учтены только члены первого порядка малости по r, α . Уравнения генерации для волны 1^- получаются из (12) при замене индексов $+ \leftrightarrow -$, а уравнения для волн 2^+ (2^-) следуют из уравнений для волн 1^+ (1^-) при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$.

В газовом лазере с сильноанизотропным резонатором, где времена релаксации поляризационных характеристик много меньше времен релаксации интенсивностей и фаз генерируемых волн, можно пренебречь изменением во времени состояний поляризации ($dz/dt' = 0$) и считать, что они постоянны и равны параметрам поляризации, задаваемым резонатором: $z_{1,2} = z_{1M,2M}$. Как следует из (12), такая замена позволяет пренебречь влиянием обратного рассеяния из одной резонаторной моды в другую. Кроме того, для газового лазера с сильноанизотропным резонатором в (12) входит разность фаз встречных волн, принадлежащих одной резонаторной моде, что позволяет записать уравнения для этих переменных и тем самым уменьшить размерность системы.

Принимая во внимание явный вид выражений для h_1^+ и \hat{H}_1^+ , определяемый формулами (8), (9), полагая $t = 1$ и вводя обозначения для экспериментально измеряемых величин, запишем уравнения генерации ЧКГЛ в окончательном виде [41]:

$$\frac{dI_1^\pm}{d\tau} = \left\{ \frac{P_1^\pm}{P} - \operatorname{Re} \left(\theta_{11}^{\pm\pm} I_1^\pm + \theta_{11}^{\pm\mp} I_1^\mp + \theta_{12}^{\pm\pm} I_2^\pm \right. \right.$$

$$\left. + \theta_{12}^{\pm\mp} I_2^\mp + \theta_{1k}^{\pm\pm} I_{1k} - R_1^\mp \sqrt{\frac{I_1^\mp}{I_1^\pm}} e^{\mp i\Psi_1} \right)$$

$$\left. - \operatorname{Im} \left[\frac{\Delta W_1^\pm}{P} \cot(z_1^\pm - z_{2M}^\pm) \right] \right\} 2I_1^\pm, \quad (13)$$

$$\frac{d\Psi_1}{d\tau} = \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta W_1^+}{P} \cot(z_1^+ - z_{2M}^+) - \frac{\Delta W_1^-}{P} \cot(z_1^- - z_{2M}^-) \right]$$

$$+ \Delta\Omega_1 - \Delta\Omega_{10} + \frac{V_1^+ - V_1^-}{P} - \operatorname{Im} \left[\theta_{11}^{++} I_1^+ + \theta_{11}^{+-} I_1^- \right.$$

$$+ \theta_{12}^{++} I_2^+ + \theta_{12}^{+-} I_2^- + \theta_{1k}^{++} I_{1k}^+ - \theta_{11}^{--} I_1^- - \theta_{11}^{+-} I_1^+ - \theta_{12}^{--} I_2^-$$

$$\left. - \theta_{12}^{+-} I_2^+ - \theta_{1k}^{--} I_{1k}^- + R_1^- \sqrt{\frac{I_1^-}{I_1^+}} e^{-i\Psi_1} - R_1^+ \sqrt{\frac{I_1^+}{I_1^-}} e^{+i\Psi_1} \right]. \quad (14)$$

Уравнения для I_2^\pm, Ψ_2 получаются из (13), (14) при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$. Здесь $I_{1,2}^\pm = I_{1,2}^\pm / P$ – безразмерные интенсивности генерируемых волн; $\Psi_{1,2}$ – разности фаз встречных волн, принадлежащих одному собственному значению матрицы резонатора ($\Psi_1 = \Psi_1^+ - \Psi_1^-$, $\Psi_2 = \Psi_2^+ - \Psi_2^-$); $\Delta\Omega_{1,2}$ – разность частот генерации встречных волн ($\Delta\Omega_1 = \Omega_1^+ - \Omega_1^-$, $\Delta\Omega_2 = \Omega_2^+ - \Omega_2^-$); $\Omega = \omega L / (c\tau_0)$; $\Delta\Omega_{10,20}$ – разность частот, задаваемая резонатором ($\Delta\Omega_{10} = \Omega_{1c}^+ - \Omega_{1c}^-$, $\Delta\Omega_{20} = \Omega_{2c}^+ - \Omega_{2c}^-$); $\tau = t' \tau_0$; $\tau_0 = k_0 L P$; $P_{1,2}^\pm = \bar{U}_{1,2}^\pm - 1/\eta_{1,2}^\pm$; $P = \bar{U}|_{x=0} - (1/\eta_1^+ + 1/\eta_1^- + 1/\eta_2^+ + 1/\eta_2^-)/4$; $\eta_{1,2}^\pm$ – превышение накачки над порогом на центре линии.

Коэффициенты само- и кросснасыщения определяются следующим образом:

$$\theta_{11}^{\pm\pm} = c_1^{\pm\pm} + ic_1^{\prime\prime\pm} \cot(z_1^\pm - z_{2M}^\pm), \quad (15)$$

$$\theta_{11}^{\pm\mp} = a_{11}^{\pm\mp} - \frac{b_{11}^{\pm\mp} \sin(z_1^\pm + z_{2M}^\pm) - \tilde{b}_{11}^{\pm\mp} \sin(z_1^\pm + z_{2M}^\pm)}{\cosh 2\beta_1^\mp \sin(z_1^\pm - z_{2M}^\pm)}$$

$$+ id_{11}^{\pm\mp} \cot(z_1^\pm - z_{2M}^\pm). \quad (16)$$

Выражения для $\theta_{12}^{\pm\pm}$ могут быть получены из формул для $\theta_{11}^{\pm\mp}$ при формальной замене индексов $1^\mp \rightarrow 2^\pm$ у параметров a, b, d и $\cosh \beta$, для $\theta_{12}^{\pm\mp}$ – при замене $1^\mp \rightarrow 2^\mp$; величины $\theta_{1k}^{\pm\pm}$, описывающие комбинационное взаимодействие, получаются из выражения для $\theta_{11}^{\pm\mp}$ при замене $1^\mp \rightarrow k$, $\cosh \beta_k = \cosh \beta_2^\pm$. Формулы для $\theta_{22}^{\pm\pm}$, $\theta_{22}^{\pm\mp}$, $\theta_{21}^{\pm\pm}$, $\theta_{21}^{\pm\mp}$, $\theta_{2k}^{\pm\pm}$ следуют из выражений для $\theta_{11}^{\pm\pm}$, $\theta_{11}^{\pm\mp}$, $\theta_{12}^{\pm\pm}$, $\theta_{12}^{\pm\mp}$, $\theta_{1k}^{\pm\pm}$ при замене $1 \leftrightarrow 2$.

Коэффициенты обратного рассеяния зависят от поляризации генерируемых волн:

$$R_1^\mp = \frac{r_1^\mp}{\tau_0} \sqrt{\frac{\cosh 2\beta_1^\pm}{\cosh 2\beta_1^\mp}} \frac{\sin(z_{2M}^\pm - z_1^\mp)}{\sin(z_{2M}^\pm - z_1^\pm)},$$

$$R_2^\mp = \frac{r_2^\mp}{\tau_0} \sqrt{\frac{\cosh 2\beta_2^\pm}{\cosh 2\beta_2^\mp}} \frac{\sin(z_{1M}^\pm - z_2^\mp)}{\sin(z_{1M}^\pm - z_2^\pm)}. \quad (17)$$

Уравнения (13), (14) справедливы в третьем порядке по поллю теории возмущений при адиабатическом исключении динамики переменных среды, при наложении продольного магнитного поля на среду и для анизотропии резонатора произвольного типа, намного превышающей анизотропию среды (лазер с сильноанизотропным резонатором). До настоящего времени обратное рассеяние учитывалось только для встречных волн с совпадающими линейными состояниями поляризации (см., напр., [5]). В отличие от предыдущих моделей ЧКГЛ (см., напр., [4–6]), данная модель позволяет также учитывать деформацию состояний поляризации генерируемых волн [42, 36] при распространении их в активной среде. В случае линейной фазовой анизотропии резонатора на основе уравнений (13), (14) в [41] были получены все режимы генерации, наблюдавшиеся в эксперименте [7].

Основным преимуществом предложенной модели является явный характер зависимости коэффициентов обратного рассеяния от состояний поляризации генерируемых волн, что позволяет исследовать влияние поляризации на ширину зоны синхронизации частот лазерного гироскопа. Как следует из (17), коэффициенты $R_{1,2}^{\mp}$ достигают максимальных значений при линейной поляризации встречных волн и обращаются в нуль при их циркулярной поляризации. Ненулевая ширина зоны синхронизации в случае циркулярной поляризации может быть обусловлена деполаризацией излучения при обратном рассеянии.

Рассмотрим частный случай генерации волн с эллиптическими состояниями поляризации, которые создаются при помещении в резонатор ЧКГЛ линейной фазовой пластинки и оптического вращателя. Матрицы Джона такого резонатора для встречных (\pm) направлений имеют следующий вид:

$$\hat{M}^+ = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \hat{M}^- = \tilde{\hat{M}}^+, \quad (18)$$

где ψ и ϕ – величины линейной и циркулярной фазовой анизотропии; тильда означает транспонирование. Собственные значения матриц \hat{M}^{\pm} и разность частот однонаправленных и встречных волн определяются как

$$\lambda_{1M,2M}^{\pm} = \cos 2\psi \cos 2\phi \pm (\cos^2 2\psi \cos^2 2\phi - 1)^{1/2}, \quad (19)$$

$$\omega_{c1}^{\pm} - \omega_{c2}^{\pm} = 2 \arccos(\cos 2\psi \cos 2\phi) c/L,$$

а состояния поляризации мод резонатора на основании [36] задаются соотношениями

$$\gamma_{1M}^+ = 1/2 \arctan\{-\tan \phi\}, \quad \sinh 2\beta_{1M}^+ = -\sin \phi \cot \psi, \\ \gamma_{1M}^+ - \gamma_{2M}^+ = \pi/2, \quad \xi_{2M}^+ = -\xi_{1M}^+, \quad (20)$$

$$\gamma_{1M,2M}^- = \gamma_{1M,2M}^+, \quad \xi_{1M,2M}^- = -\xi_{1M,2M}^+.$$

Как следует из (20), однонаправленные волны поляризованы ортогонально, а встречные волны, принадлежащие одинаковым собственным значениям матрицы резонатора, – неортогонально: их азимуты одинаковы, а эллиптичности противоположны по знаку.

3. Автоколебательные режимы генерации

Для рассматриваемого ЧКГЛ характерно наличие множества экспериментально регулируемых параметров, поэтому вначале на основе численного интегрирования уравнений (13), (14) определим область значений линейной и циркулярной фазовой анизотропии резонатора, в которой возможны автоколебательные режимы генерации эллиптически поляризованных волн. Эта область выделена на рис.2. Как видно из диаграммы, в данной системе автоколебания возможны для не слишком больших значений эллиптичности: $0 \leq \xi < 0.2$. Диаграмма рассчитана при параметрах активной среды и резонатора He – Ne-лазера ($\lambda = 1.15$ мкм) $c/L = 417$ МГц, $Ku/2\pi = 480$ МГц, $\eta_1^{\pm} = \eta_2^{\pm} = 1.3$, $y = 0.178$, $y_1 = \gamma_a/2Ku = 0.014$, $y_2 = \gamma_b/2Ku = 0.0215$, для нулевых начальных условий $I_{1,2}^{\pm}|_{\tau=0} = 0$, $\Psi_{1,2}|_{\tau=0} = 0$, для случая диссипативной связи $(\phi_{1,2}^+ + \phi_{1,2}^-)/2 = \pi/2$, а также при $x = 0$, $r_1^{\mp}/(\cosh 2\beta_1 \tau_0) = r_2^{\mp}/(\cosh 2\beta_1 \tau_0) = r = 0.001$. В расчетах использовались коэффициенты нелинейного взаимодействия c, a, b, d для одноизотопного газа в доплеровском пределе в приближении трех релаксационных констант; влиянием комбинационного взаимодействия пренебрегалось.

Далее для различных значений линейной и циркулярной фазовой анизотропии из области автоколебаний изучим влияние амплитуды коэффициента обратного рассеяния и отстройки частоты генерации от центра линии усиления на динамику генерации данного ЧКГЛ. Для $\psi = 0.005$ рад, $\phi = 0.0015$ рад, которые на основании (20) задают поляризационно-частотные характеристики мод резонатора $\gamma_{1M}^+ = -7.5 \times 10^{-4}$ рад, $\xi_{1M}^+ = -0.146$ и $(\omega_{c1} - \omega_{c2})/2\pi = 1.38$ МГц, на рис.3 приведена диаграмма аттракторов (устойчивых решений уравнений генерации) на плоскости (r, x) , рассчитанная при нулевых начальных условиях: $I_{1,2}^{\pm}|_{\tau=0} = 0$, $\Psi_{1,2}|_{\tau=0} = 0$.

Отметим, что поскольку состояния поляризации встречных волн, формирующих стоячую волну, различны, режимы генерации 2, 3 на рис.3 лишь условно можно назвать режимами стоячей волны, т. к. в стоячей волне встречные бегущие компоненты поляризованы одинаково.

На рис. 4 показаны периодические колебания интенсивностей I_1^{\pm} , I_2^{\pm} и разностей фаз $\Psi_{1,2}$ для $r = 0.001$ при $I_{1,2}^{\pm}|_{\tau=0} = 0$, $\Psi_{1,2}|_{\tau=0} = 0$ и различных отстройках от центра линии.

Для выбранных параметров резонатора динамика генерации ЧКГЛ с эллиптическими состояниями поляризации волн демонстрирует закономерности, во многом

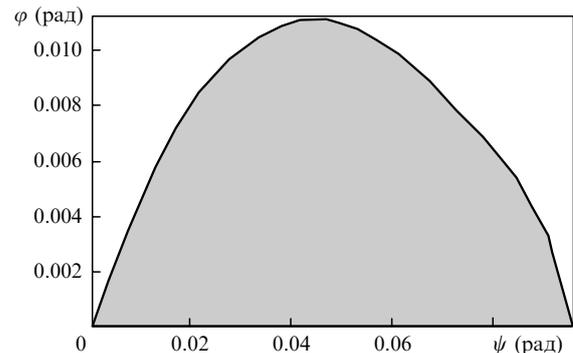


Рис.2. Область автоколебаний (выделена) при $x = 0$, $r_{1,2}^{\pm} = 0.001$.

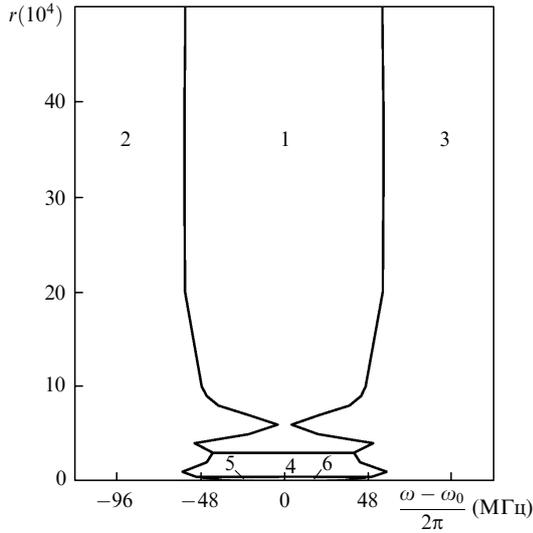


Рис.3. Диаграмма аттракторов (устойчивых решений уравнений генерации ЧКГЛ) при $\psi = 0.005$ рад, $\phi = 0.0015$ рад, $\gamma_{1M}^+ = -7.5 \times 10^{-4}$ рад, $-\xi_{1M}^+ = 0.146$ и $(\omega_{c1} - \omega_{c2})/2\pi = 1.38$ МГц. Обозначены следующие режимы генерации:

1 – режим автоколебаний интенсивностей четырех бегущих волн $I_{1,2}^\pm$ и разностей фаз встречных волн $\Psi_{1,2}$; 2 – стационарный режим генерации двух встречных волн (1^+ и 1^-) с одинаковыми интенсивностями, частотами и разностью фаз $\Psi_1 = -\pi/2$; 3 – стационарный одночастотный режим генерации стоячей волны, образованной двумя встречными бегущими волнами (2^+ и 2^-) с разностью фаз $\Psi_2 = \pi/2$; 4 – стационарный режим генерации четырех бегущих волн с различными интенсивностями; 5, 6 – стационарные двухчастотные режимы генерации двух ортогональных эллиптически поляризованных встречных волн (1^+ , 2^- и 2^+ , 1^- соответственно) с различными частотами.

аналогичные обнаруженным в эксперименте [7] и описанным теоретически в [41] для линейно поляризованных волн. В обеих системах существуют одинаковые режимы

генерации: в режиме автоколебаний интенсивности I_1^\pm (I_2^\pm) встречных волн, принадлежащих одному и тому же собственному значению матрицы резонатора, а также интенсивности однонаправленных волн I_1^+ , I_2^+ (I_1^- , I_2^-) совершают антифазные колебания, а интенсивности I_1^+ , I_2^- (I_1^- , I_2^+) встречных волн, принадлежащих разными собственным значениям матрицы резонатора, – синфазные; переход через центр линии сопровождается переключением интенсивностей и состояний поляризации встречных и однонаправленных волн.

На рис.5 иллюстрируется поведение фазовых характеристик в области отстроек вблизи центра линии, где происходит переключение интенсивностей. Как видно из рис.5,а, средние значения разностей фаз постоянны ($\bar{\Psi}_1 = -\pi/2$, $\bar{\Psi}_2 = +\pi/2$) и не изменяются при переходе через центр линии, претерпевая скачки на 2π вдали от него. Изменение мгновенных значений разностей фаз (рис.5,б) происходит непрерывно в узкой области отстроек (несколько десятков килогерц) и имеет место не на центре линии, а вблизи точки $x' \approx -125$ кГц. Аналогичное поведение фазовых переменных было обнаружено [43] при теоретическом исследовании динамики генерации лазера класса В со скалярным полем.

Отличительной особенностью генерации электромагнитной волны с ненулевой эллиптичностью по сравнению с линейно поляризованной волной является появление дополнительного сдвига фазы, определяемого выражением [39, 38]

$$\Psi_p = \arctan(\xi \tan \gamma). \tag{21}$$

Если в качестве начальных значений разностей фаз выбрать те, которые определяются на основании (20) поляризацией мод резонатора, то характер автоколебаний существенно изменится. На рис.6 показаны периодичес-

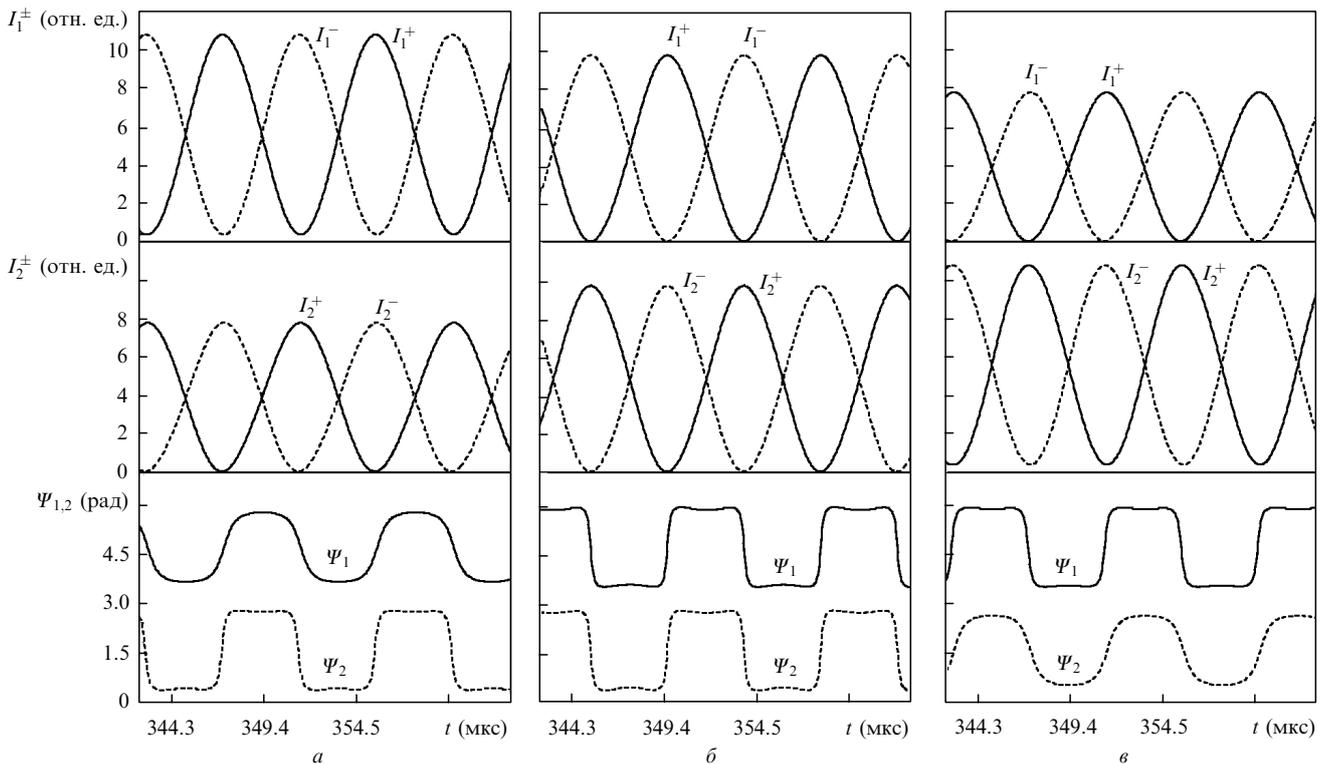


Рис.4. Автоколебательные режимы генерации для $x' = -43.2$ МГц (а), $x' = 0$ (б) и $x' = 43.2$ МГц (г) при $I_{1,2}^\pm|_{t=0} = \Psi_{1,2}|_{t=0} = 0$ и $r = 0.001$.

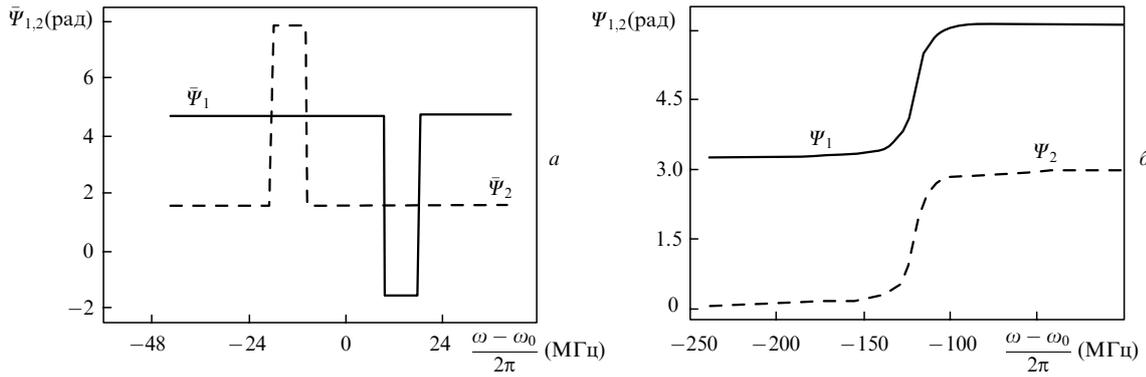


Рис.5. Зависимости средних значений разностей фаз $\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$ (a) и их мгновенных значений (б) от отстройки.

кие колебания интенсивностей и разностей фаз встречных волн при $I_{1,2}^{\pm}|_{\tau=0} = 0, \Psi_1|_{\tau=0} = 2.2 \times 10^{-4}$ рад, $\Psi_2|_{\tau=0} = -3.13$ рад и тех же остальных параметрах, что и на рис.4. Видно, что в широком диапазоне отстроек справа и слева от центра автоколебания имеют ту же форму, что и на центре. Переключение интенсивностей происходит при симметричных относительно центра отстройках $x \approx \pm 36$ МГц. Фазовые характеристики в окрестности точек переключения изменяются подобно тому, как это имеет место вблизи центра (рис.5).

Смещение переключения интенсивностей по отстройке, обусловленное сдвигом фазы волны, величина которого определяется состоянием поляризации этой волны, является следствием поляризационно-фазовой динамики. Появление дополнительной разности фаз генерируемых волн, обусловленной различием состояний поляризации этих волн и качественно изменяющей характер динамики системы, было обнаружено в работе [17] при описании интерференции двух квазимонохроматических волн. Здесь уместно напомнить о влиянии поляризации на частотные характеристики кольцевых газовых лазеров в режиме стационар-

ной генерации, когда различие эллиптичностей встречных волн в лазерах приводит к появлению разности их частот, т. е. к поляризационной невязимости [44, 35].

4. Хаотические и стохастические режимы генерации

Понимание важности роли хаотических и стохастических режимов генерации в процессах функционирования нейророботных устройств, в биологических, социальных и экономических системах, при создании новых принципов обработки информации, при защите информации в оптических устройствах связи, при создании оптических компьютеров и т. д. сделало эти режимы в последние годы предметом интенсивных исследований. В настоящее время существует ряд сценариев эволюции от стационарного решения к периодическому и, наконец, к хаотическому (см., напр., [45–48]), однако картина возможных путей возникновения и проявлений хаоса является далеко не полной. К числу проблем, интенсивно изучаемых в последние годы, следует отнести возникновение хаоса в

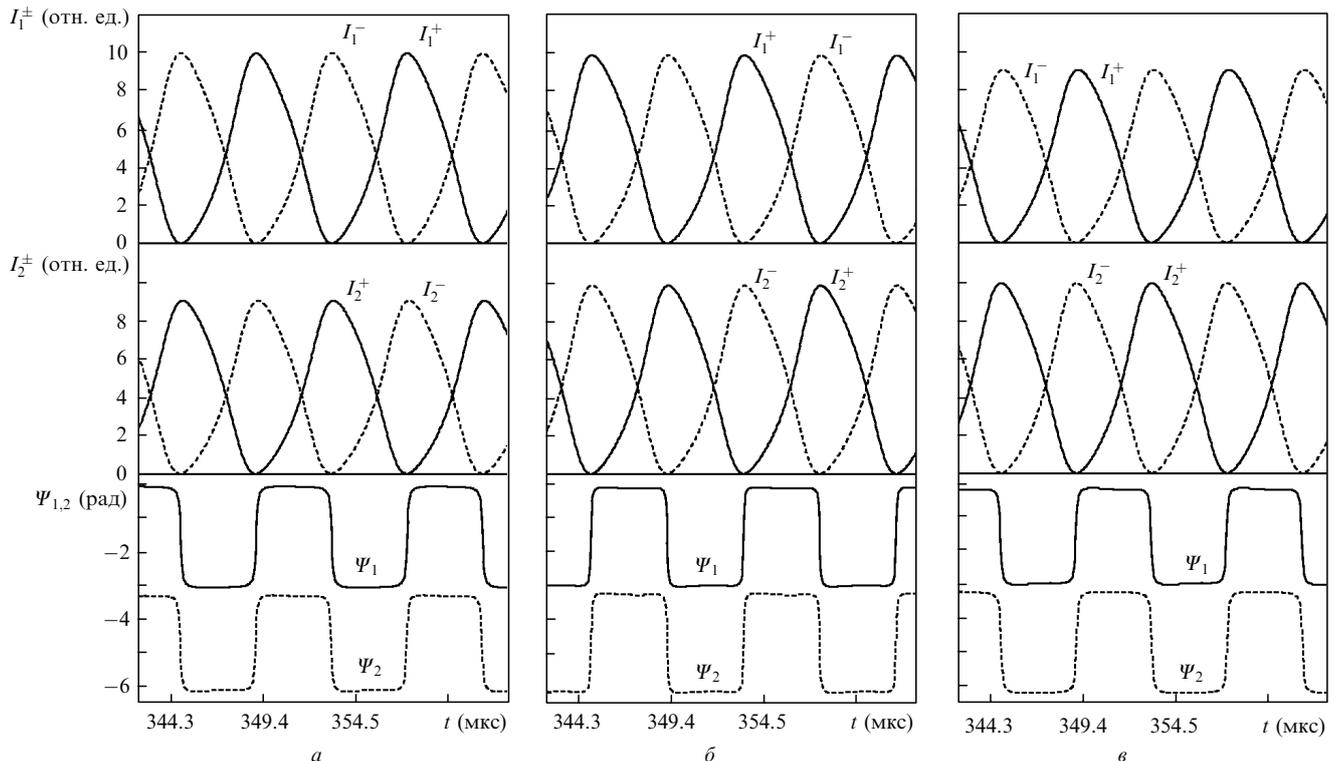


Рис.6. То же, что и на рис.4, но при $I_{1,2}^{\pm}|_{\tau=0} = 0, \Psi_1|_{\tau=0} = 2.2 \times 10^{-4}$ рад и $\Psi_2|_{\tau=0} = -3.13$ рад.

нелинейных системах с симметрией (см., напр., [49, 50]). Следствием симметрии динамической системы является наличие бистабильности и мультистабильности аттракторов с различной топологией, что влечет за собой возможность возникновения сложных режимов за счет как взаимодействия хаотических аттракторов при попадании траектории в бассейн притяжения двух (или нескольких) таких аттракторов (см., напр., [47]), так и возникновения сложных периодических решений (траектория которых охватывает несколько стационарных состояний), эволюционирующих при изменении управляющего параметра к хаотическому аттрактору со сложной топологией. Одним из возможных механизмов возникновения сложных динамических структур является влияние случайных флуктуаций.

4.1. Спонтанное нарушение фазовой симметрии и детерминированный хаос

Явления нарушения и восстановления поляризационной симметрии на языке сингулярных (симметричных) бифуркаций стационарных и периодических решений были описаны в [51]. Учет линейной связи встречных волн позволяет обнаружить эффекты нарушения и восстановления фазовой симметрии. Впервые спонтанное нарушение фазовой симметрии, определенное как переход от режима автоколебаний с нулевой разностью частот встречных волн к бистабильному режиму автоколебаний с ненулевой разностью частот этих волн, было обнаружено в одномодовом двухчастотном кольцевом газовом лазере класса А с совпадающими линейными состояниями поляризации волн генерации [52, 53].

В отсутствие продольного магнитного поля в активной среде уравнения генерации (13), (14) инвариантны относительно следующих преобразований [54]:

$$G = \{I_1^+, I_2^+, I_1^-, I_2^-, \Psi_1, \Psi_2, \Delta\Phi\} \\ \rightarrow \{I_1^-, I_2^-, I_1^+, I_2^+, \Delta\Phi - \Psi_1, \Delta\Phi - \Psi_2, \Delta\Phi\}, \quad (22)$$

$$G = \{I_1^+, I_2^+, I_1^-, I_2^-, \Psi_1, \Psi_2, x\} \\ \rightarrow \{I_2^+, I_1^+, I_2^-, I_1^-, -\Psi_2, -\Psi_1, -x\}, \quad (23)$$

где $x = (x_1^+ + x_2^+)/2 = (x_1^- + x_2^-)/2$; $\Delta\Phi = \phi_{1,2}^- - \phi_{1,2}^+$.

Условие (22) отражает инвариантность уравнений (13), (14) относительно замены направлений распространения при условии постоянства разности фаз, что для равных интенсивностей бегущих встречных волн с одинаковыми частотами представляет собой условие формирования стоячей волны, а для различных интенсивностей этих волн приводит к бистабильности. Второе преобразование зависит от параметра отстройки, отражая инвариантность системы относительно изменения знака этого параметра.

Условие инвариантности (22) находит отражение в появлении периодических режимов генерации с различными свойствами симметрии [55]: симметричных S-циклов, траектория которых в фазовом пространстве в результате преобразования G остается неизменной, и асимметричных M-циклов, которые рождаются всегда в паре и в результате преобразования G трансформируются друг в друга: $GX_1(t) = X_2(t)$. Аналогичность свойств симметрии периодических режимов генерации и симметрии

хиральных и ахиральных биологических макромолекул [56] позволяет использовать динамику анизотропных лазерных систем при изучении процессов эволюции в биологии.

На рис.7 приведена диаграмма аттракторов, рассчитанная на плоскости (r, x) при $\psi = 0.08$ рад, $\phi = 0.07$ рад, $\gamma_{1M}^+ = -0.0035$ рад, $\xi_{1M}^+ = -0.0435$, $(\omega_{1c}^\pm - \omega_{2c}^\pm)/2\pi = 21.3$ МГц и нулевых начальных условиях. В силу (23) в области существования стационарного режима 2 генерации стоячей волны при $x < 0$ стоячая волна формируется встречными бегущими волнами 1^+ , 1^- с разностью фаз между ними $\Psi_1 = -\pi/2$, а при $x > 0$ – волнами 2^+ , 2^- с разностью фаз $\Psi_2 = \pi/2$. Рис.8, а, б иллюстрирует поведение средних значений разностей фаз $\bar{\Psi}_1$ и $\bar{\Psi}_2$ для $r = 0.001$ и нулевых начальных данных при последовательном прохождении слева направо областей $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ (рис.7).

Видно, что изменения этих величин имеют место в области автоколебаний и являются следствием скачков мгновенных значений разностей фаз на 2π , не изменяющих интенсивности. Поведение мгновенных значений интенсивностей и разностей фаз показано на рис.8, в, г. В зависимости от условий регистрации, для которой выбирается некоторый конечный временной интервал, средние значения разности фаз могут изменяться как непрерывно, так и скачкообразно.

Переход от режима генерации четырех бегущих волн

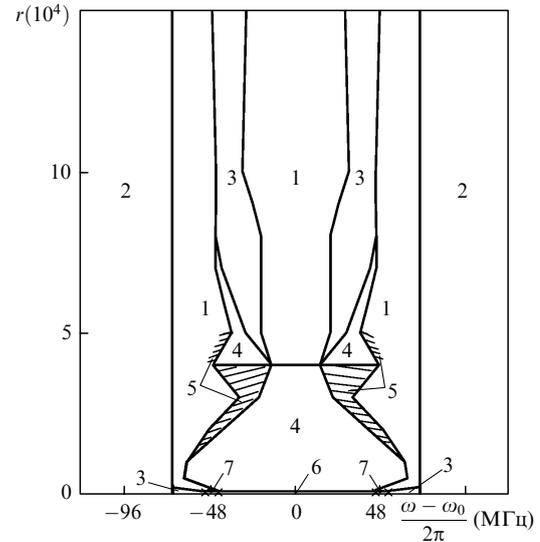


Рис.7. Диаграмма аттракторов при $\psi = 0.08$ рад, $\phi = 0.07$ рад, $\gamma_{1M}^+ = -0.0035$ рад, $\xi_{1M}^+ = -0.0435$ и $(\omega_{1c}^\pm - \omega_{2c}^\pm)/2\pi = 21.3$ МГц. Обозначены следующие режимы генерации:

1 – автоколебательный режим, соответствующий симметричному предельному циклу, с антифазными колебаниями интенсивностей встречных волн с эллиптическими неортогональными состояниями поляризации; 2 – одночастотный стационарный режим генерации стоячей волны, сформированной двумя встречными бегущими волнами с эллиптическими неортогональными состояниями поляризации; 3 – стационарный режим генерации двух стоячих волн с различными интенсивностями; 4 – стационарный режим генерации четырех бегущих волн с различными интенсивностями; 5 – асимметричный предельный цикл и детерминированный хаос; 6 – стационарный режим генерации двух бегущих волн с различными интенсивностями и частотами (1^+ , 2^- слева от центра и 2^+ , 1^- справа от него); 7 – асимметричный предельный цикл второго рода с колебаниями интенсивностей и вращением разностей фаз; режимы генерации, обусловленные чувствительностью системы к воздействию случайного шума, показаны крестиками.

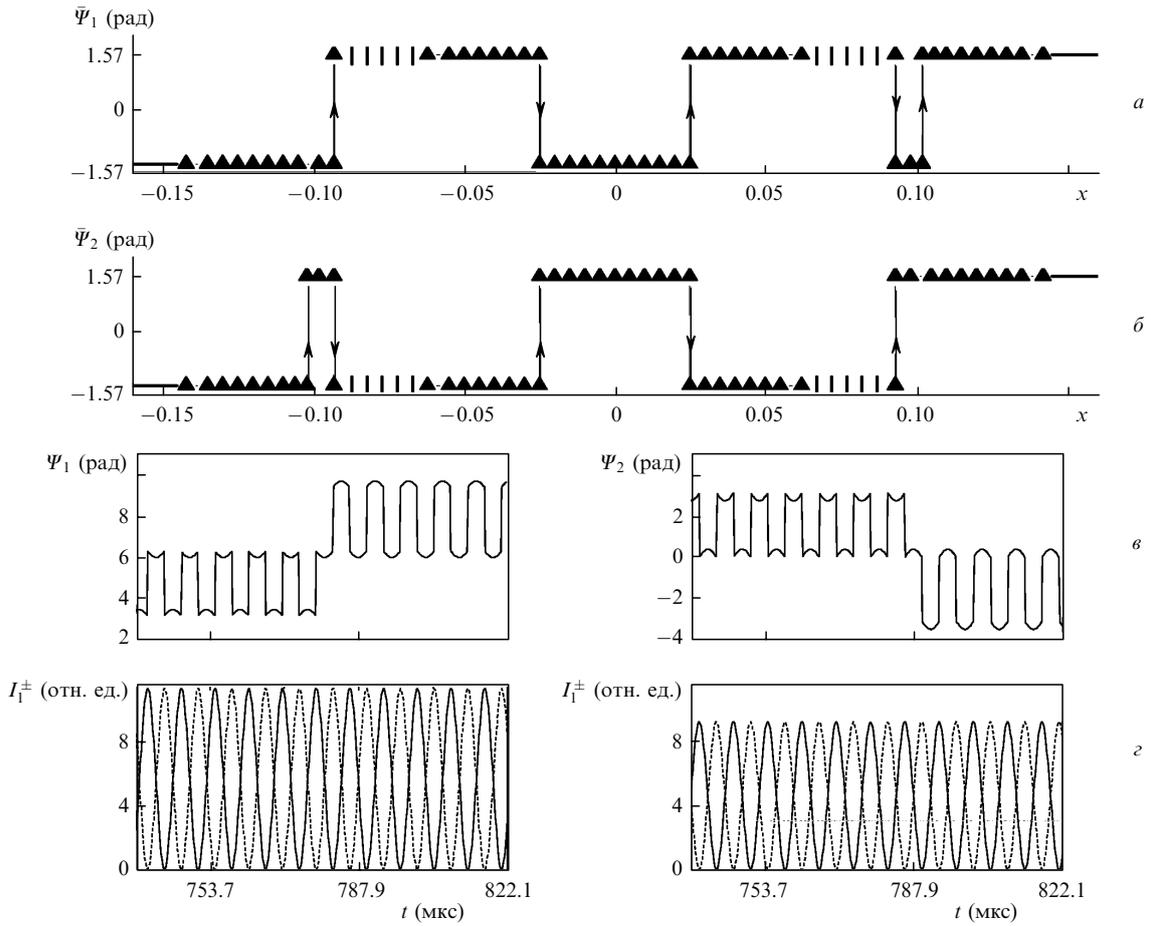


Рис.8. Изменение средних значений разностей фаз $\bar{\Psi}_1$ (а) и $\bar{\Psi}_2$ (б) при движении из области отрицательных в область положительных отстроек, а также скачки мгновенных значений разностей фаз на 2π при неизменных интенсивностях; $x = -0.0235$ (с) и -0.0287 (д) ($I_{1,2}^{\pm}$ – сплошные кривые, $I_{1,2}^-$ – штриховые). Сплошные линии на рис. а, б – стационарный режим 2 генерации одной стоячей волны; вертикальные черточки – режим 3 двух стоячих волн, треугольники – режим автоколебаний 1; стрелками показаны направления изменения средних значений разности фаз на π .

4 к режиму генерации двух стоячих волн 3 (как справа, так и слева от центра линии) сопровождается бифуркацией типа вилки стационарного решения. В силу (22) при заданном значении параметра Φ выбор одного из двух возможных решений типа бегущих волн будет полностью определяться флуктуациями начальных условий, что позволяет говорить о спонтанном нарушении (восстановлении) фазовой симметрии в точке бифуркации.

На границе области 4 при увеличении $|x|$ и постоянном значении r из стационарного решения, соответствующего режиму генерации четырех бегущих волн, в результате суперкритической бифуркации Хопфа рождается асимметричный предельный цикл. При дальнейшем увеличении $|x|$ в заштрихованной области 5 (см. рис. 7) М-цикл в зависимости от величины коэффициента обратного рассеяния ведет себя по-разному. На рис.9 иллюстрируется эволюция фазовых проекций и временных реализаций для I_1^{\pm} , а также спектров мощности при увеличении отстройки x для $r = 0.0005$, начиная с момента возникновения асимметричного предельного цикла и заканчивая возникновением симметричного цикла (сверху вниз на рисунке). Численные расчеты проведены при достаточно малом шаге движения по параметру. Видно, что вначале при $x' = -36$ МГц возникает М-цикл с периодом T , который претерпевает две бифуркации удвоения периода: при $x' = -37.2$ и -38.2 МГц. Затем при $x' = -38.9$ МГц фиксируются двухтактная лента асимметричного стран-

ного аттрактора (см., напр., [45]) и обратная последовательность бифуркаций удвоения: 4Т-цикл при $x' = -39.94$ МГц и 2Т-цикл при $x' = -39.96$ МГц; наконец, при $x' = -39.97$ МГц в результате бифуркации типа вилки периодического решения рождается устойчивый симметричный S-цикл, т. е. происходит восстановление фазовой симметрии (при движении по параметру в обратном направлении – нарушение симметрии).

В области 1 (см. рис.7) интенсивности и разности фаз совершают периодические колебания относительно стационарного решения, соответствующего режиму генерации двух стоячих волн, поэтому можно утверждать, что в рассматриваемом ЧКГЛ спонтанное нарушение фазовой симметрии, описываемое бифуркацией типа вилки, для периодического решения, так же как и для стационарного, имеет место при переходе от режима генерации бегущих волн к режиму генерации стоячих волн.

Бифуркация типа вилки периодического решения, сопровождающаяся возникновением хаоса в результате последовательности Фейгенбаума, наблюдалась в радиотехнической системе [57]; в лазерных и оптических системах она обнаружена впервые.

В области 5, где существует детерминированный хаос, в зависимости от начальных условий возможно одновременное существование аттракторов с различной топологией – мультистабильность. Так, в точке $x' = -39.84$ МГц, $r = 0.0005$ при нулевых начальных данных фикси-

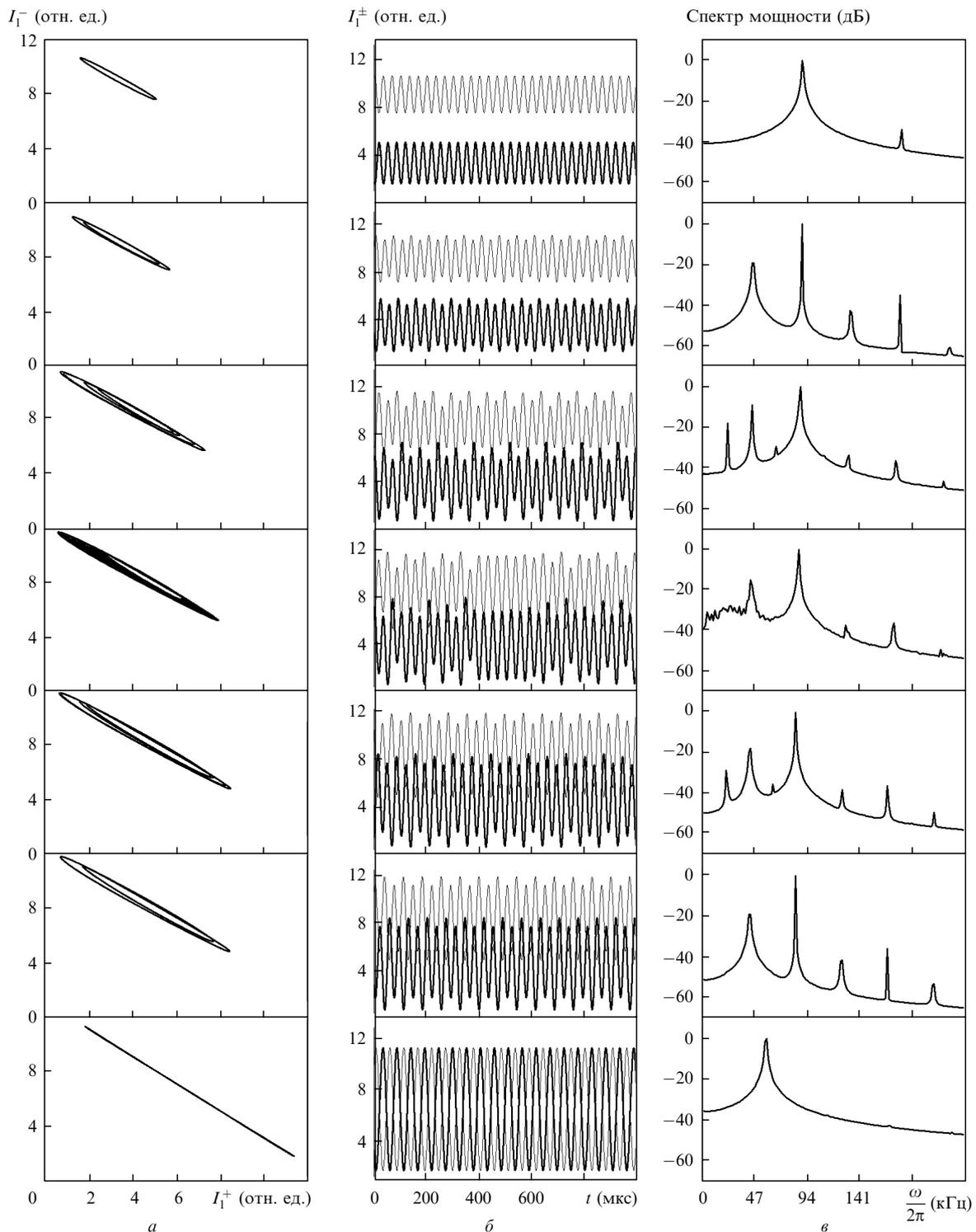


Рис.9. Эволюция фазовых проекций (а) и временных реализаций (б) для I_1^\pm , а также спектров мощности (в) при $r = 0.0005$; сверху вниз: М-циклы с периодами T , $2T$ и $4T$, двухтактная лента асимметричного странного аттрактора, М-циклы с периодами $4T$ и $2T$, S-цикл.

руется симметричный предельный цикл, при движении с малым шагом по параметру отстройки – асимметричный странный аттрактор (подобный приведенному на рис.9), а при начальных данных $I_1^+|_{\tau=0} = 2.58$, $I_1^-|_{\tau=0} = 10.28$, $I_2^+|_{\tau=0} = 4.098$, $I_2^-|_{\tau=0} = 2.68$, $\Psi_1|_{\tau=0} = 0.947$ рад и $\Psi_2|_{\tau=0} = -1.58$ рад возможен хаос, появляющийся в результате бистабильности асимметричных странных аттракторов: система попадает в область притяжения обоих этих аттракторов и попеременно находится то на одном, то на другом из них. На рис.10 приведены фазовые проекции,

временные реализации и спектры мощности, характеризующие топологию такого асимметричного аттрактора. Реализация в эксперименте одного из возможных в области мультистабильности режимов генерации будет зависеть от свойств рассматриваемого ЧКГЛ и скорости сканирования измерительной системы по отстройке.

4.2. Сложные колебания, индуцированные шумом

Индукцированные шумом сложные колебания обнаружены в лазерах с разными активными средами: в газовом

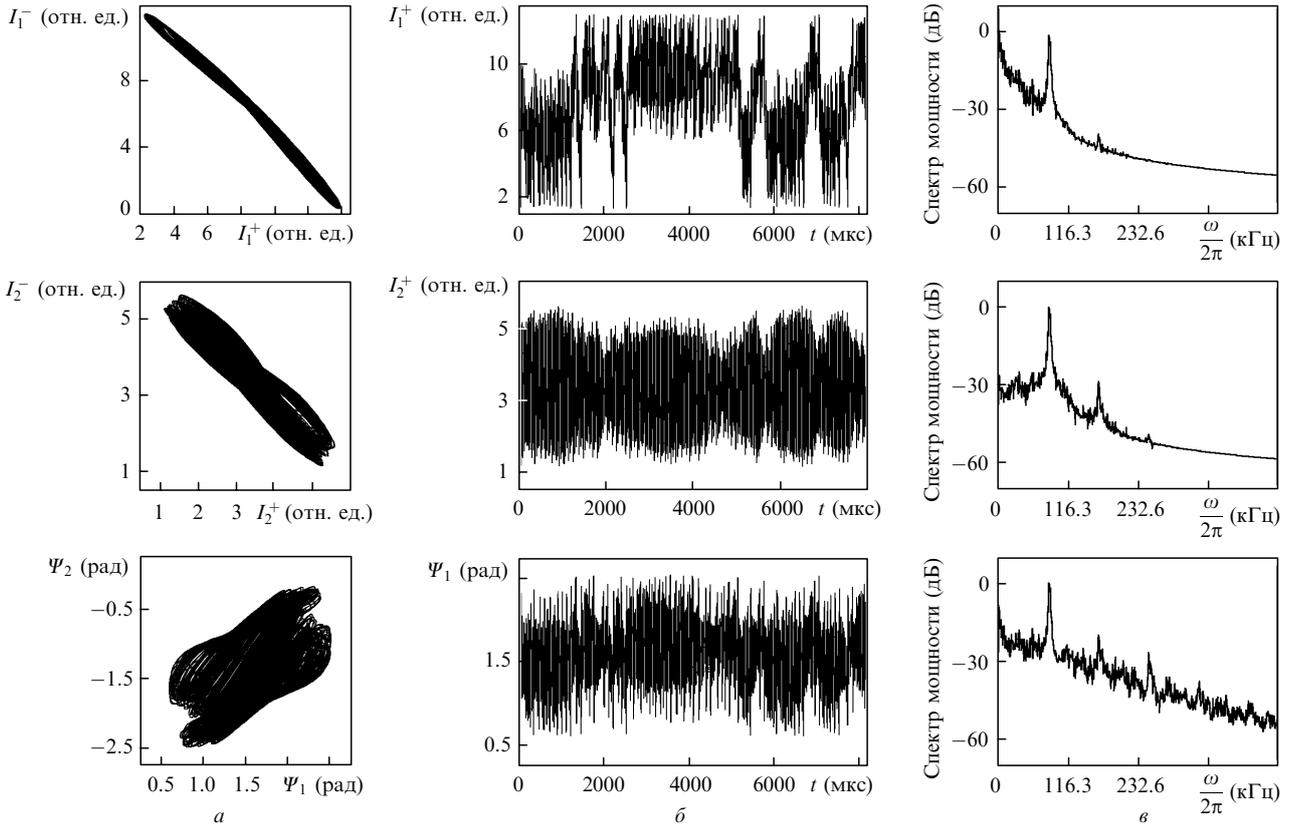


Рис.10. Странный аттрактор, возникающий в результате взаимодействия двух асимметричных аттракторов; фазовые проекции (а), временные реализации (б), а также спектры мощности (в) для I_1^+ , I_2^+ , Ψ_1 .

лазере [58], в полупроводниковом инжекционном лазере [59] и в лазере с вертикальным резонатором [60]. Теоретически влияние скорости прохождения бифуркационной точки при нарушении симметрии, а также возможность предсказуемого выбора одного из бистабильных решений исследовались в [61,62].

В рассматриваемом ЧКГЛ чувствительные к воздействию случайных возмущений режимы возникают при малых величинах коэффициента обратного рассеяния в области 7 на диаграмме аттракторов (см. рис.7). Здесь вблизи границы со стационарным режимом генерации бегущих волн при $x' = -45.84$ МГц фиксируется асимметричный предельный цикл второго рода с вращением разности фаз Ψ_2 и колебаниями интенсивности волны I_2^- вблизи нуля, что делает систему чувствительной к воздействию случайных флуктуаций, природа которых может быть различной.

Влияние случайных флуктуаций будем исследовать на основе анализа решений уравнений генерации (13), (14) [63], записанных в форме Ланжевена с аддитивным включением случайного возмущения (см., напр., [64]); это допустимо при условии, что интенсивность случайных воздействий мала и не зависит от переменных и времени.

Для выявления принципиальных эффектов, вызванных флуктуационными возмущениями малой интенсивности, ограничимся, не конкретизируя физическую природу этих возмущений, рассмотрением влияния δ -коррелированного (белого) шума с нулевым математическим ожиданием и с очень малой интенсивностью, который условно можно рассматривать как слабое возмущение траектории системы в фазовом пространстве. Источники случайных флуктуаций в случае белого шума с одинако-

вой для всех переменных интенсивностью D определяются как $\langle \xi(\tau) \rangle \langle \xi(\tau') \rangle = D\delta(\tau - \tau')$ (см., напр., [64]).

Заметим, что данное рассмотрение, не претендуя на математически корректное описание влияния случайных флуктуаций, как внешних (тепловые и др.), так и внутренних (шум спонтанной эмиссии), достаточно сложное в условиях четырехволновой генерации, тем не менее позволяет сделать вывод о возможности существования в многомодовых лазерных системах с линейной связью механизма возникновения сложных режимов генерации, в основе которого лежит стохастизация периодического режима с колебаниями интенсивности одной из волн вблизи порога.

Проследим эволюцию асимметричного предельного цикла второго рода при увеличении отстройки частоты генерации от центра линии в присутствии шума с интенсивностью $D = 10^{-7}$. Последовательность временных реализаций и спектров мощности для интенсивностей I_2^\pm приведена на рис. 11 при $x' = -45.84$ (а), -47.04 (б), -47.42 (в) и -48.47 МГц (г). Переменная Ψ_2 ведет себя по отношению к шуму подобно I_2^- , а I_1^\pm , Ψ_1 — подобно I_2^+ .

Видно, что вначале присутствие шума влияет только на I_2^- (рис.11,а), слабо искажая временную зависимость и спектр мощности в области высоких частот этой переменной. Затем вследствие нелинейного взаимодействия амплитуда колебаний I_2^- возрастает, что приводит к росту амплитуды высокочастотной (шумовой) компоненты в спектре мощности (рис.11,б). При этом остальные переменные по-прежнему остаются нечувствительными к возмущениям системы за счет усложнения колебаний I_2^- . Оценка ляпуновской размерности данного аттрактора дает $\bar{D} = 2.3$. Увеличение $|x|$ приводит к дальнейшему

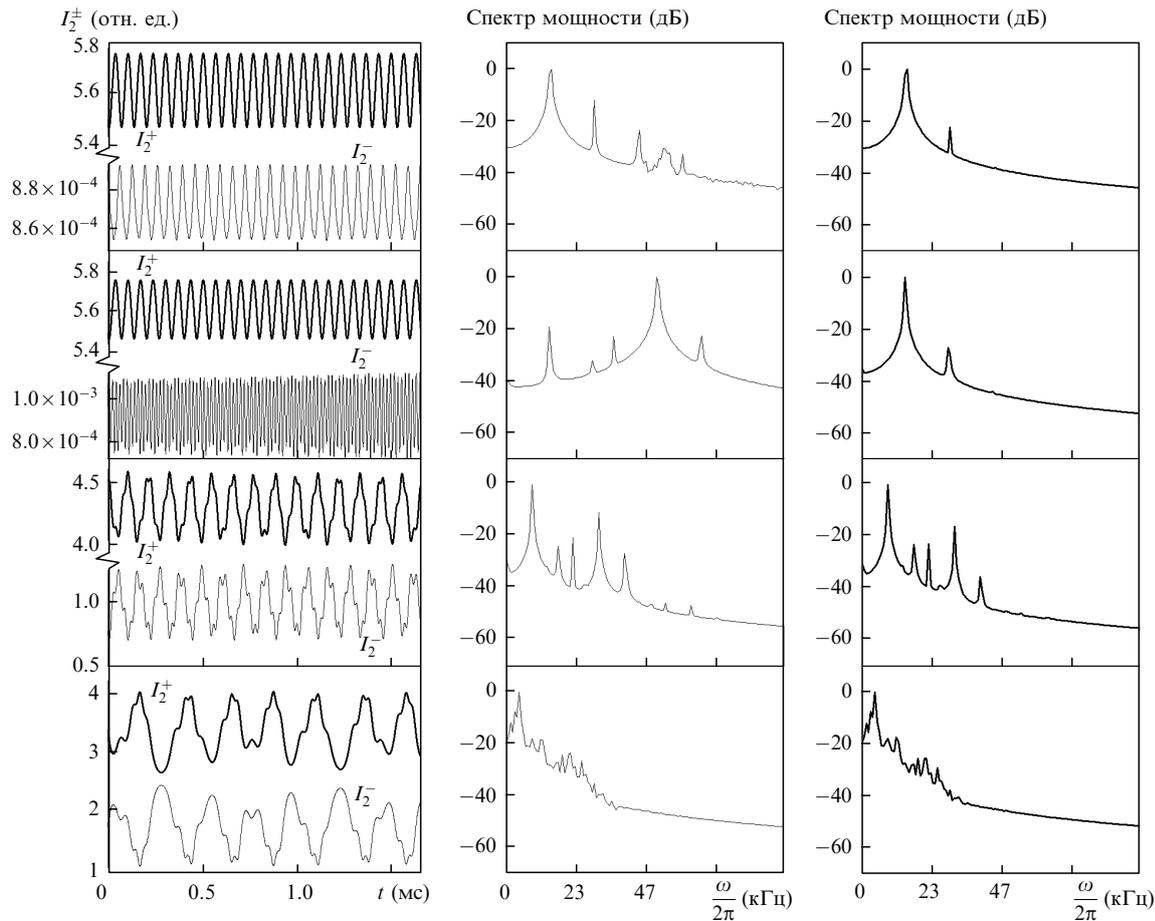


Рис.11. Эволюция временных реализаций интенсивностей I_2^\pm и спектров мощностей для I_2^- (средняя колонка) и I_2^+ (правая колонка): предельный цикл второго рода в присутствии слабых возмущений (а), стохастические колебания (б), асимметричный хаос (в) и асимметричный предельный цикл со сложной формой колебаний (з).

росту амплитуды колебаний I_2^- , так что она, сохраняя сложную форму, становится нечувствительной к воздействию слабого шумового сигнала. Размерность аттрактора понижается: $\tilde{D} = 2.01$. Однако из-за достаточно большой амплитуды колебаний «зашумленных» переменных сложную форму колебания приобретают все переменные системы (рис.11,в). И, наконец, при $x' = -48.47$ МГц движение системы становится периодическим с очень большим периодом и сложной формой колебаний (рис.11,з). Не проводя количественных исследований меры стохастичности (см., напр., [60]), тем не менее сложные колебания с дробной размерностью, существующие в области чувствительности системы к шуму (рис.11,б), условно отнесем к стохастическим, а колебания с дробной размерностью в области, где чувствительность к шуму исчезает (рис.11,в), – к хаотическим.

Затем, при $x' = -48.5$ МГц, имеет место бифуркация типа вилки, в результате которой два долгопериодических асимметричных предельных цикла второго рода сливаются и исчезают, а вместо них рождается долгопериодический симметричный предельный цикл первого рода со сложной формой колебаний. Рис.12 иллюстрирует восстановление (нарушение) фазовой симметрии для трехмерных проекций. Поскольку в точке бифуркации система уже нечувствительна к шуму, можно утверждать, что выбор одного из асимметричных предельных циклов полностью определяется значениями переменных в начальный момент времени, что соответствует спонтанному нарушению фазовой симметрии.

Эволюция временных реализаций I_1^\pm для симметричных аттракторов при дальнейшем увеличении отстройки показана на рис.13. При движении сверху вниз при $x' = -47.8$ МГц (а) фиксируется симметричный предельный цикл, форма колебаний которого упрощается, а период уменьшается. Далее этот цикл теряет устойчи-

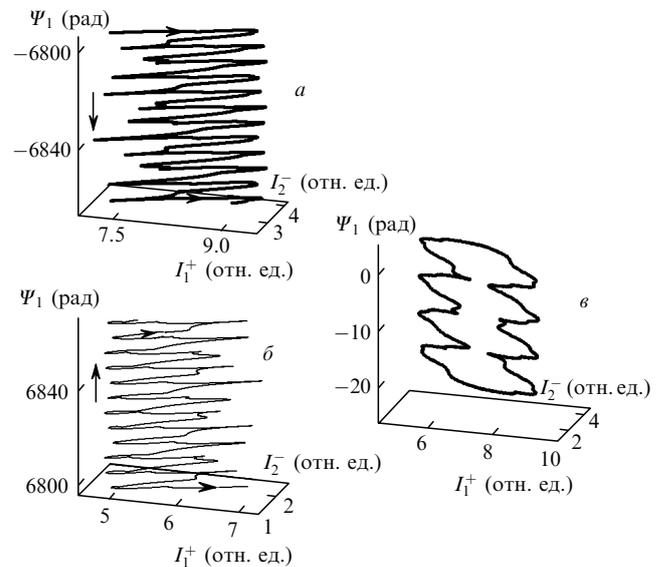


Рис.12. Спонтанное восстановление (нарушение) фазовой симметрии в трехмерных проекциях для $r = 0.00001$; М-циклы при $x' = -48.47$ МГц (а, б) и S-цикл при $x' = -48.5$ МГц (в).

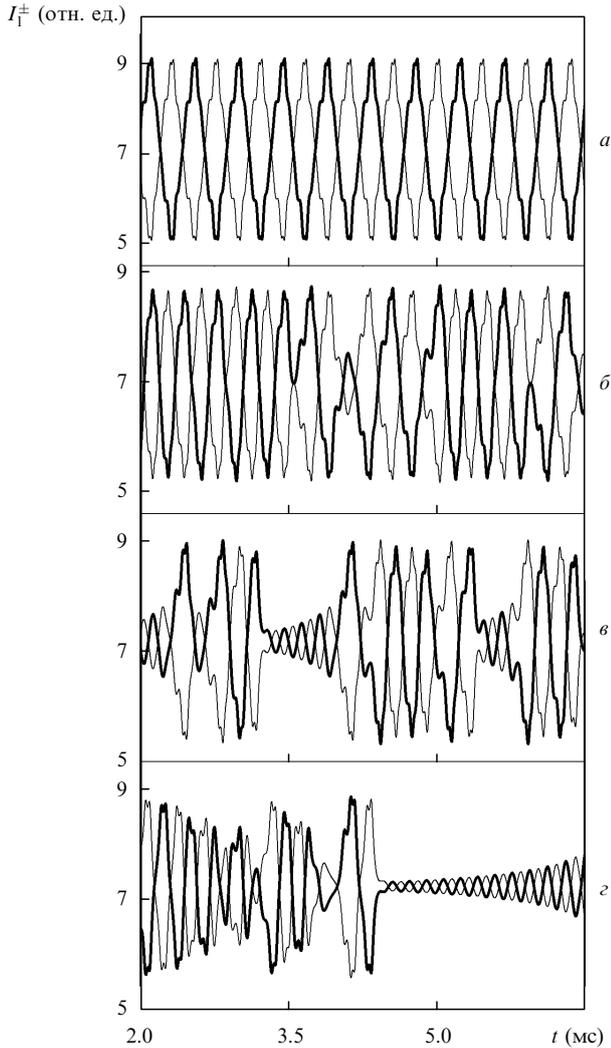


Рис. 13. Эволюция временных реализаций интенсивностей I_1^\pm встречных волн для симметричного решения: предельный цикл (а), хаос (б–в) (I_1^+ – жирные кривые, I_1^- – тонкие).

вость, и через перемежаемость возникает симметричный хаос, существующий при $x' = -49.4$ (б), -50.4 (в), -51.4 МГц (г), после чего следует режим стационарной генерации двух стоячих волн с различными интенсивностями.

5. Заключение

В ЧКГЛ с линейной связью эллиптически поляризованных встречных волн на основе разработанной и экспериментально апробированной модели изучены явления нелинейной динамики, обусловленные неустойчивостью фазовых характеристик генерируемого поля.

Показано, что в режиме автоколебаний, существующем в широком диапазоне управляющих параметров, возможно переключение интенсивностей, состояний поляризации и разностей фаз генерируемых волн. Сдвиг фазы волны, обусловленный появлением отличной от нуля эллиптичности, приводит к смещению переключения интенсивностей из области отстроек вблизи центра контура усиления, что характерно для линейной поляризации, на край контура.

Выявлены свойства симметрии уравнений генерации. Показано, что спонтанное нарушение фазовой симметрии для стационарных и периодических решений проис-

ходит при переходе от режима генерации бегущих волн к режиму генерации стоячих волн, что достигается изменением отстройки частоты генерации от центра линии. В зависимости от величины коэффициента обратного рассеяния для периодических режимов при этом возможно возникновение как детерминированного, так и индуцированного шумом хаоса. Следствием симметрии системы является мультистабильность регулярных и хаотических аттракторов с различной топологией.

Обнаружен новый механизм возникновения сложных (хаотических и стохастических) колебаний в анизотропных лазерах с линейной связью – стохастизация периодических режимов с колебаниями интенсивности одной из волн вблизи порога генерации. В присутствии δ -коррелированного белого шума при изменении отстройки эти режимы вызывают появление стохастических колебаний и хаоса с различными свойствами симметрии. В ЧКГЛ с эллиптической поляризацией волн генерации возможны следующие режимы со сложной динамической структурой: асимметричный хаос (возникает в ходе трех различных сценариев – последовательности бифуркаций удвоения периода асимметричного предельного цикла, взаимодействия двух асимметричных ленточных аттракторов и стохастизации предельного цикла второго рода) индуцированные шумом стохастические колебания, а также симметричный хаос, возникающий через потерю устойчивости симметричным предельным циклом и перемежаемость.

Результаты исследования динамики генерации анизотропного ЧКГЛ с симметрией могут быть использованы в информатике – для создания устройств для кодирования и защиты информации, в биологии – для объяснения механизмов возникновения киральной и акиральной симметрии в природе, а также для объяснения закономерностей формирования динамических структур в многомерных связанных системах различного физического происхождения, в том числе в многомодовых анизотропных лазерах с более сложными активными средами, теоретические подходы для описания которых пока отсутствуют.

Разработанная в настоящей работе модель ЧКГЛ может быть использована в лазерной гироскопии для изучения зависимости ширины зоны синхронизации от состояний поляризации генерируемых волн, для изучения поляризационной невязанности, возникающей из-за несовершенств изготовления элементов резонатора, из-за деформации поляризации, задаваемой резонатором, в активной среде, а также из-за деполяризации излучения при обратном рассеянии. Учет продольного магнитного поля, налагаемого на среду, позволяет исследовать магнитооптические эффекты.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Беларуси, договор Ф05-226.

Приложение

В ЧКГЛ коэффициенты нелинейного взаимодействия для волны 1, соответствующей волне 1^+ ($2 \rightarrow 1^-, 3 \rightarrow 2^+, 4 \rightarrow 2^-$), в присутствии продольного магнитного поля на активной среде и в приближении трех релаксационных констант ($y_{1,2} = \gamma_{a,b}/2Ku, y = \gamma/Ku$) и предельного доплеровского уширения на основании [38] записываются в следующем виде:

$$c'_1 = \frac{\exp[-(x_1^2 + \Delta^2)]}{\cosh 2\beta_1} \times \left[R_1 \frac{y_1 + y_2}{y} \cosh 2(x_1 \Delta + \beta_1) + C_1 + C_2 \right], \quad (\text{П1})$$

$$c''_1 = \frac{\exp[-(x_1^2 + \Delta^2)]}{\cosh 2\beta_1} \left[R_1 \frac{y_1 + y_2}{y} \times \sinh 2(x_1 \Delta + \beta_1) + C_1 C_2 \right], \quad (\text{П2})$$

$$C_{1,2} = \frac{\exp[\pm 2(x_1 \Delta - \beta_1)]}{2(y \mp \Delta)} \left[R_2 y_2 + R_3 y_1 + y_1 y_2 \left(\frac{R_3}{y_1 \mp i\Delta} + \frac{R_2}{y_2 \mp i\Delta} \right) \right], \quad (\text{П3})$$

$$a_{12} = \frac{\exp[-(x_1^2 + \Delta^2)]}{\cosh 2\beta_1} [A_1 \cosh 2(x_1 \Delta + \beta_2) + A_2 + A_3], \quad (\text{П4})$$

$$A_1 = \frac{R_1}{y + i\Delta x_{12}} \left[(y_1 + y_2) + y_1 y_2 \times \left(\frac{1}{y_1 + i\Delta x_{12}} + \frac{1}{y_2 + i\Delta x_{12}} \right) \right], \quad (\text{П5})$$

$$A_{2,3} = \frac{\exp[\pm 2(x_1 \Delta - \beta_2)]}{2[y + i(\Delta x_{12} \mp \Delta)]} \left\{ R_3 y_1 + R_2 y_2 + y_1 y_2 \times \left[\frac{R_3}{y_1 + i(\Delta x_{12} \mp \Delta)} + \frac{R_2}{y_2 + i(\Delta x_{12} \mp \Delta)} \right] \right\}, \quad (\text{П6})$$

$$a_{13} = \frac{\exp[-(x_1^2 + \Delta^2)]}{\cosh 2\beta_3} \left\{ \frac{\cosh 2(x_1 \Delta - \beta_3)}{y + ix_{13}} \times (R_3 y_1 + R_2 y_2) + \frac{R_1}{2} (y_1 + y_2) \left[\frac{\exp 2(x_1 \Delta + \beta_3)}{y + i(x_{13} - \Delta)} + \frac{\exp[-2(x_1 \Delta + \beta_3)]}{y + i(x_{13} + \Delta)} \right] \right\}, \quad (\text{П7})$$

$$b_{12}, \tilde{b}_{12} = \frac{1}{2} \exp[-(x_1^2 + \Delta^2)] y_1 y_2 (B_{10} \pm B_{20}), \quad (\text{П8})$$

$$B_{10,20} = \frac{\exp[\pm 2(x_1 \Delta - i\gamma_2)]}{y + i(\Delta x_{12} \mp \Delta)} \left(\frac{R_2}{y_1 + i\Delta x_{12}} + \frac{R_3}{y_2 + i\Delta x_{12}} + \frac{R_3}{y_1 \mp i\Delta} + \frac{R_2}{y_2 \mp i\Delta} \right), \quad (\text{П9})$$

$$b_{13}, \tilde{b}_{13} = \frac{1}{2} \exp[-(x_1^2 + \Delta^2)] y_1 y_2 (B_{13} \pm B_{23}),$$

$$B_{13,23} = \frac{\exp[\pm 2(x_1 \Delta - i\gamma_3)]}{y + i(x_{13} \mp \Delta)} \left(\frac{R_3}{y_1 \mp i\Delta} + \frac{R_2}{y_2 \mp i\Delta} \right), \quad (\text{П10})$$

$$d_{12} = \frac{\exp[-(x_1^2 + \Delta^2)]}{\cosh 2\beta_2} [A_1 \sinh 2(x_1 \Delta + \beta_2) + A_2 - A_3], \quad (\text{П11})$$

$$d_{13} = \frac{\exp[-(x_1^2 + \Delta^2)]}{\cosh 2\beta_3} \left\{ \frac{\sinh 2(x_1 \Delta - \beta_3)}{y + ix_{13}} \times (R_3 y_1 + R_2 y_2) + \frac{R_1}{2} (y_1 + y_2) \left[\frac{\exp 2(x_1 \Delta + \beta_3)}{y + i(x_{13} - \Delta)} - \frac{\exp[-2(x_1 \Delta + \beta_3)]}{y + i(x_{13} + \Delta)} \right] \right\}, \quad (\text{П12})$$

$$a_{1k}, d_{1k} = \left\{ \frac{\alpha_1}{2} \frac{y_1 y_2}{\cosh 2\beta_2} \left(\frac{1}{y_1 + i\Delta x_{12}} + \frac{1}{y_2 + i\Delta x_{12}} \right) \times \left[\frac{\exp(z_1 - z_3 - z_2 + z_4^* + 2i\delta_1 \Delta)}{y + i(\delta_1 - \Delta)} \pm \frac{\exp[-(z_1 - z_3 - z_2 + z_4^* + 2i\delta_1 \Delta)]}{y + i(\delta_1 + \Delta)} \right] + \frac{\exp(z_1 - z_3 + z_2 - z_4^* + 2i\delta_1 \Delta)}{y + i(\delta_1 - \Delta)} \times \left[\frac{R_3}{y_1 + i(\Delta x_{12} - \Delta)} + \frac{R_2}{y_2 + i(\Delta x_{12} - \Delta)} \right] \pm \frac{\exp[-(z_1 - z_3 + z_2 - z_4^* + 2i\delta_1 \Delta)]}{y + i(\delta_1 + \Delta)} \times \left[\frac{R_3}{y_1 + i(\Delta x_{12} + \Delta)} + \frac{R_2}{y_2 + i(\Delta x_{12} + \Delta)} \right] \right\}, \quad (\text{П13})$$

$$b_{1k} = b_0 \cos 2\Psi_{1k}, \quad \tilde{b}_{1k} = -b_0 \sin 2\Psi_{1k}, \quad (\text{П14})$$

$$b_0 = \alpha_1 y_1 y_2 \frac{1}{y + i\delta_1} \left(\frac{R_2}{y_1 + i\Delta x_{12}} + \frac{R_2}{y_1 + i\Delta x_{12}} \right), \quad (\text{П15})$$

$$\Psi_{1k} = z_3 - z_2 - z_1^* + i \frac{2\delta_1 \Delta}{Ku^2},$$

$$\alpha_1 = N_{12} \exp[2i(\Delta x_{13} - \Delta x_{24})] \times \exp[-(\delta_1^2 + \Delta^2)] \sqrt{\frac{\cosh 2\beta_1 \cosh 2\beta_2}{\cosh 2\beta_3 \cosh 2\beta_4}}, \quad (\text{П16})$$

$$x_{ij} = (x_i + x_j)/2, \quad \Delta x_{ij} = (x_i x_j)/2, \quad \delta_1 = x_1 + \Delta x_{42}. \quad (\text{П17})$$

Функции угловых моментов рабочих уровней атомов R_1, R_2, R_3 ,

$$\frac{R_1}{9} = \frac{1}{3} L_1(0) + \frac{1}{2} L_1(1) + \frac{1}{6} L_1(2) = \frac{1}{3} L_2(0) + \frac{1}{2} L_2(1) + \frac{1}{6} L_2(2), \quad (\text{П18})$$

$$\frac{R_2}{9} = \frac{1}{3} L_1(0) - \frac{1}{2} L_1(1) + \frac{1}{6} L_1(2) = L_2(2),$$

$$\frac{R_3}{9} = \frac{1}{3} L_2(0) - \frac{1}{2} L_2(1) + \frac{1}{6} L_1(2) = L_1(2),$$

выражаются через б_j-символы Вигнера $L_{1,2}$ [65]:

$$L_1(k) = \begin{Bmatrix} k & 1 & 1 \\ j_2 & j_1 & j_1 \end{Bmatrix}, \quad L_2(k) = \begin{Bmatrix} k & 1 & 1 \\ j_1 & j_2 & j_2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{П19})$$

Отношение фурье-компоненты плотности инверсной населенности среды к ее среднему значению [66]

$$N_{12} = \int_0^L N(z) \exp[-2i(K_1 - K_2)z] dz / \int_0^L N(z) dz. \quad (\text{П20})$$

Выражения для a_{14} , b_{14} , \tilde{b}_{14} , d_{14} получаются из формул для a_{13} , b_{13} , \tilde{b}_{13} , d_{13} при замене $\beta_3 \rightarrow \beta_4$, $\gamma_3 \rightarrow \gamma_4$, $x_{13} \rightarrow x_{14}$; коэффициенту a_{1k} соответствует верхний знак, d_{1k} – нижний. Коэффициенты нелинейного взаимодействия для волны 2 получаются из (П1)–(П20) при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, для волны 3 – при $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$, для волны 4 – при $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$.

1. Привалов В.Е., Фридрихов С.А. *УФН*, **97**, 374 (1969).
2. Федоров Б.Ф., Шереметьев А.Г., Умников В.Н. *Оптический квантовый гироскоп* (М.: Машиностроение, 1973).
3. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **30**, 96 (2000).
4. Веткин В.А., Хромых А.М.В сб. *Квантовая электроника*, 3 (9), 59 (1972).
5. Соколов В.А., Фрадкин Э.Е. *Квантовая электроника*, **2**, 807 (1975).
6. Назаренко М.М., Савельев И.И., Скулаченко С.С. *Квантовая электроника*, **6**, 1698 (1979).
7. Yasinskiĭ V.M. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2792**, 166 (1995).
8. Ясинский В.М. *Квантовая электроника*, **26**, 616 (1997).
9. Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г. *ЖЭТФ*, **52**, 1616 (1967).
10. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах*. Под ред. Ю.Л.Климонтовича (М.: Наука, 1974).
11. Chyba T.H. *Phys. Rev. A*, **40**, 6327 (1989).
12. Chyba T.H. *Opt. Commun.*, **76**, 395 (1990).
13. Svirina L.P. *Opt. Commun.*, **111**, 380 (1994).
14. Le Floch A., Ropars G., Lenormand J.M., Le Naour R. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 918 (1984).
15. Cotteverte J.C., Bretenaker F., Le Floch A. *Opt. Lett.*, **16**, 572 (1991).
16. Puccioni J.P., Lippi J.L., Abraham N.B., Arecchi F.T. *Opt. Commun.*, **72**, 361 (1989).
17. Svirina L.P., Gudelev V.G., Zhurik Yu.P. *Phys. Rev. A*, **56**, 5053 (1997).
18. Svirina L.P. *Quantum & Semiclassical Optics, JEOS, part B*, **10**, 425 (1998).
19. Brunel M, Emile O., Alourni M, Le Floch A., Bretenaker F. *Phys. Rev. A*, **59**, 831 (1999).
20. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Наумкин Н.И. *Квантовая электроника*, **34**, 839 (2004).
21. Климонтович Ю.Л., Курятов В.Н., Ланда П.С. *ЖЭТФ*, **51**, 3 (1966).
22. Aronowitz F., Collind R.J. *Appl. Phys. Lett.*, **9**, 55 (1966).
23. Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **33**, 674 (1972).
24. Берштейн И.Л., Степанов Д.П. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **16**, 531 (1973).
25. Андропова И.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **17**, 775 (1974).
26. Куцак А.А., Стрекаловская Е.Ю. *ЖПС*, **23**, 995 (1975).
27. Бирман А.Я., Савушкин А.Ф., Саламатин В.А. *Оптика и спектроскопия*, **53**, 174 (1982).
28. Андропова И.А., Берштейн И.Л. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **14**, 698 (1971).
29. Сардыко В.И., Севериков В.Н. *ЖПС*, **26**, 826 (1977).
30. Paddon P., Sjerve E., May A.D., et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **9**, 574 (1992).
31. Jones R. C. *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, 488 (1941).
32. Jones R. C. *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 671 (1948).
33. Jones R. C. *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 126 (1956).
34. Рубанов В.С., Свирина Л.П., Севериков В.Н. *Докл. АН БССР*, **26**, 616 (1982).
35. Ильющенко Н.В., Свирина Л.П., Севериков В.Н. *Оптика и спектроскопия*, **54**, 380 (1983).
36. Ильющенко Н.В., Свирина Л.П., Севериков В.Н. *Оптика и спектроскопия*, **54**, 874 (1983).
37. Кузнецов В.М., Рубанов В.С., Свирина Л.П., Севериков В.Н. *Квантовая электроника*, **13**, 66 (1986).
38. Войтович А.П., Севериков В.Н. *Лазеры с анизотропными резонаторами* (Минск: Наука и техника, 1988).
39. Аззам Р., Башара Н. *Эллипсометрия и поляризованный свет* (М.: Мир, 1981).
40. Raterink H.J., Van der Stadt H., Velsel C.H.P., Dijkstra G. *Appl. Opt.*, **6**, 813 (1967).
41. Svirina L.P. *Quantum & Semiclassical Optics, JEOS, part B*, **10**, 213 (1998).
42. Зборовский В.А., Тиунов Е.А., Фрадкин Э.Е. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **21**, 816 (1978).
43. Pando C.L., Luno Acosta G.A. *Opt. Commun.*, **114**, 509 (1995).
44. Тиунов Е.А. Фрадкин Э.Е. *Оптика и спектроскопия*, **44**, 557 (1978).
45. Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах* (М.: Наука, 1990).
46. Anischenko V.S. *Dynamical Chaos – Models Experiments. Appearance, Routes Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems* (Singapore, World Scientific, 1995).
47. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем* (Саратов: изд-во СГУ, 1999).
48. Hilborn R.C. *Chaos Nonlinear Dynamics* (New York, Oxford: Oxford University Press, 1994).
49. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. *IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-33*, 1073 (1986).
50. *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*. Ed. by R.N.Madan (Singapore: World Scientific, 1993).
51. Svirina L.P. *J. Optics B: Quantum & Semiclas. Opt.*, **3**, S133 (2001).
52. Skryabin D.V., Vladimirov A.G., Radin A.M. *Opt. Commun.*, **116**, 109 (1995).
53. Скрыбин Д.В., Владимиров А.Г., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **78**, 989 (1995).
54. Свирина Л.П. *Оптика и спектроскопия*, **95**, 339 (2003).
55. Николаев Е.В. *Математический сборник*, **196**, 143 (1995).
56. Аветистов В.А., Гольдманский В.И. *УФН*, **166**, 873 (1996).
57. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. *Стохастические колебания в радиофизике и электронике* (М.: Наука, 1989).
58. Gudelev V.G., Svirina L.P., Zhurik Yu.P. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2792**, 119 (1995).
59. Hwang S.K., Gao J.B., Liu J.M. *Phys. Rev. E*, **61**, 5162 (2000).
60. Gao J.B., Hwang S.K., Liu J.M. *Phys. Rev. E*, **82**, 1132 (1999).
61. Бутковский О.Я., Браш Дж.С., Кравцов Ю.А., Суровяткина Е.Д. *ЖЭТФ*, **109**, 2201 (1996).
62. Kravtsov Yu.A., Kadtke J.B. *Predictability in Complex Dynamical Systems* (New York: Springer, 1999).
63. Свирина Л.П. *Оптика и спектроскопия*, **97**, 165 (2004).
64. Ван Кампен Н.Г. *Стохастические процессы в физике и химии* (М.: Высшая школа, 1990).
65. Собельман И.И. *Введение в теорию атомных спектров* (М.: Физматгиз, 1963).
66. Lamb W.E. *Phys. Rev. A*, **134**, 1429 (1964).