

## Собственные частоты невзаимного кольцевого оптического резонатора с неоднородным заполнением

В.Ф.Судаков

*Рассмотрен невзаимный кольцевой оптический резонатор с простейшим типом неоднородностей в виде двух взаимодействующих рассеивателей. Сформулирована граничная задача периодического типа, позволяющая записать характеристическое уравнение для определения собственных частот. В предположении относительной малости коэффициента отражения и параметра невзаимности найдены аналитические выражения для собственных частот и коэффициента распределения бегущих волн в моде. Обсуждены особенности расщепления этих частот и структура соответствующих им собственных функций (мод резонатора).*

**Ключевые слова:** кольцевой резонатор, собственные частоты, моды, частотная невзаимность.

1. Обычно теория кольцевых лазеров формулируется на базе уравнений для коэффициентов разложения (амплитуд колебаний) генерируемого поля по бегущим волнам. Последние являются модами однородного взаимного (идеального) кольцевого резонатора с двукратно вырожденным частотным спектром. Для обоснования возникновения внутренней синхронизации (захвата) бегущих волн, а также объяснения особенностей режима их взаимных биений в динамические уравнения для коэффициентов разложения феноменологически вводится линейная связь. В то же время можно, и даже более естественно, использовать разложение поля по модам реального кольцевого резонатора, невзаимного (в некоторых случаях) и обычно неоднородного (из-за конечной апертуры отражателей, наличия диафрагмы, неоднородности показателя преломления и т. д.). При таком разложении динамические уравнения для амплитуд колебаний будут связаны только вследствие взаимного влияния через активное вещество, что позволяет несколько изменить подход к анализу явлений захвата и биений.

Чтобы использовать разложение по модам реального резонатора, необходимо достаточно точно решить для него спектральную задачу. Такая цель ставилась, например, в работах [1, 2], где реальный резонатор считался взаимным, а неоднородностью являлась диафрагма в виде тонкого цилиндра. В [3] изучались моды и спектр взаимного резонатора с другим типом неоднородности – двумя частично отражающими безграничными гранями (местами скачка показателя преломления среды заполнения) с учетом переотражений между ними. В [1, 2] неоднородность была локализована, и этим было задано описание мод в парааксиальном приближении. В [3] адекватным постановке задачи является приближение плоских волн.

**В.Ф.Судаков.** Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5; e-mail: soudukov@aport2000.ru

Поступила в редакцию 8 июня 2006 г., после доработки – 26 ноября 2007 г.

В настоящей статье обобщаются результаты работы [3] на случай не только неоднородного, но и невзаимного резонатора с целью построения в дальнейшем теории лазерного гироскопа на основе разложения его излучения по модам такого реального резонатора. Потери в среде заполнения во внимание не принимаются. Ставится задача в рамках теории резонатора получить аналитическую зависимость частотного расщепления от параметров невзаимности и неоднородности. Чтобы избежать нежелательной громоздкости формул и учесть в то же время основную особенность неоднородности (возможность взаимных переотражений в резонаторе), взята, как и в [3], простейшая ее модель: заполнение резонатора кусочно-однородным диэлектриком со скачком показателя преломления только в двух максимально удаленных сечениях. В таком представлении возможно только рассеяние излучения вперед и назад, следовательно потерь из-за ухода излучения из резонатора нет. Используемая здесь постановка задачи, несмотря на предельную простоту модели (а также благодаря ей), переносит некоторые важные вопросы с уровня теории лазера на уровень более простой линейной теории резонатора.

2. Пусть  $\omega_p$  – вырожденная собственная частота взаимного однородного кольцевого резонатора ( $p$  – натуральное число). В невзаимном кольцевом резонаторе вырождение снимается. Каждой из различных собственных частот  $\omega_p^{(\pm)}$  соответствует одна бегущая волна. Ниже вкратце приведено описание схемы, с помощью которой исследуется снятие вырождения, поскольку именно эта схема будет использоваться и при учете неоднородности.

Поле  $E$  (например, поперечная компонента поляризованного электрического поля) в одномерном невзаимном кольцевом резонаторе описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 2 \frac{a}{c_0} \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} - \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $c_0$  – скорость света;  $n$  – показатель преломления среды заполнения;  $a$  – безразмерный параметр невзаимности (если осевой контур резонатора имеет форму окружно-

сти с периметром  $L$ , а невзаимность создается его вращением с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  относительно нормали к плоскости резонатора, то  $a = L\Omega/(2\pi c_0) \ll 1$  [4]). Поле в кольцевом резонаторе без потерь должно удовлетворять граничным условиям периодического типа:

$$E(0, t) = E(L, t), \quad \frac{\partial E(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial E(L, t)}{\partial z}. \quad (2)$$

Краевой задаче (1), (2) удовлетворяют волны  $E(z, t) = u(z) \exp(i\omega t)$ , где  $u(z)$  – решения стационарной краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + i2a \frac{\omega}{c_0} \frac{du}{dz} + n^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} u = 0, \quad (3)$$

$$u(0) = u(L), \quad \frac{du(0)}{dz} = \frac{du(L)}{dz}. \quad (4)$$

Пространственная бегущая волна  $u(z) = E' \exp(-ikz)$  является решением волнового уравнения (3), если частота  $\omega$  и волновое число  $k$  удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$k^2 - k2a\chi - \chi^2 n^2 = 0, \quad \chi = \frac{\omega}{c_0}. \quad (5)$$

Если волновое число  $k = k_p^{(\pm)} = \pm k_{p0} = \pm 2\pi p/L$ , то бегущая волна, удовлетворяющая граничным условиям (4), и есть решение краевой задачи (3), (4), т. е. эта волна является модой кольцевого резонатора. Собственные частоты находятся из выражения (5). Разрешим его относительно волновых чисел:

$$k_p^{(\pm)} = -a\chi_p^{(\pm)} \pm \left[ (a\chi_p^{(\pm)})^2 + n^2 \chi_p^{(\pm)2} \right]^{1/2} \approx \pm n\chi_p^{(\pm)} - a\chi_p^{(\pm)}.$$

Отсюда получим дуплеты собственных частот  $\omega_p^{(\pm)} = c_0 k_p^{(\pm)} = c_0 k_{p0}/(n \mp a)$ . Они зависят как от вырожденной частоты  $\omega_{p0} = c_0 k_{p0}$  в отсутствие невзаимности, так и от параметра невзаимности, обуславливающей расщепление вырожденной частоты и образование дуплета. Таким образом, все собственные частоты  $\omega_p^{(\pm)}$  различны и каждой из них соответствует собственная бегущая волна (мода)  $E_p^{(\pm)}(z, t) = E_p^{(\pm)} \exp(\mp ik_{p0}z) \exp(i\omega_p^{(\pm)}t)$ .

3. Перейдем к рассмотрению невзаимного неоднородного кольцевого резонатора, действуя по той же схеме, что и в п.2. Пусть показатель преломления среды заполнения

$$n(z) = \begin{cases} n_1 & \text{при } 0 \leq z < \frac{L}{2}, \\ n_2 & \text{при } \frac{L}{2} \leq z < L. \end{cases}$$

В [3] было показано, что такая неоднородность, подобно невзаимности, снимает вырождение спектра собственных частот однородного взаимного кольцевого резонатора. Следует ожидать, что и совместное влияние невзаимности и неоднородности также приведет к невырожденному (простому) спектру, причем влияние обоих факторов должно увеличивать расщепление частот дуплетов по сравнению с влиянием любого из них. Для доказательства этого утверждения будет найдено расщепление собственных частот. Малыми величинами одного порядка считаются параметр приведенной невзаимности  $2\pi p a/n_{av}$ , где  $n_{av} = (n_1 + n_2)/2$ , и коэффициент отражения  $R_1 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ .

4. Поле в неоднородном невзаимном кольцевом резонаторе без потерь удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{a}{c_0} \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} - \frac{n^2(z)}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

и граничным условиям периодического типа (2). Собственные колебания будем искать в виде  $E(z, t) = u(z) \times \exp(i\omega t)$ . Мода  $u(z)$  должна быть решением краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + i2a \frac{\omega}{c_0} \frac{du}{dz} + n^2(z) \frac{\omega^2}{c_0^2} u = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями (4), дополненными условиями

$$u\left(\frac{L_+}{2}\right) = u\left(\frac{L_-}{2}\right), \quad \frac{du}{dz}\left(\frac{L_+}{2}\right) = \frac{du}{dz}\left(\frac{L_-}{2}\right). \quad (8)$$

Индексы «+» и «-» у  $L$  в формуле (8) означают правую и левую окрестности точки  $z = L/2$  соответственно.

Для бегущей волны  $u(z) = E' \exp(-ikz)$  на каждом интервале, где показатель преломления постоянен, справедливо дисперсионное уравнение

$$k^2 - 2a \frac{\omega}{c_0} k - \frac{\omega^2}{c_0^2} n_1^2 = 0 \quad \text{при } 0 \leq z < \frac{L}{2},$$

$$k^2 - 2a \frac{\omega}{c_0} k - \frac{\omega^2}{c_0^2} n_2^2 = 0 \quad \text{при } \frac{L}{2} \leq z < L.$$

Отсюда для каждого из указанных интервалов находятся два волновых числа, соответствующих заданной частоте:

$$k_1^{(\pm)} = \chi \left[ \pm (a^2 + n_1^2)^{1/2} + a \right] \approx \pm \chi (n_1 \pm a) \quad \text{при } 0 \leq z < \frac{L}{2}, \quad (9)$$

$$k_2^{(\pm)} = \chi \left[ \pm (a^2 + n_2^2)^{1/2} + a \right] \approx \pm \chi (n_2 \pm a) \quad \text{при } \frac{L}{2} \leq z < L. \quad (10)$$

Распределение  $u(z)$ , удовлетворяющее (7), следует искать в виде волны с различными соотношениями амплитуд встречных бегущих волн в пределах каждого интервала с постоянным показателем преломления:

$$u_1(z) = E_1^{(+)} \exp(-ik_1^{(+)}z) + E_1^{(-)} \exp(-ik_1^{(-)}z) \quad \text{при } 0 \leq z < \frac{L}{2}, \quad (11)$$

$$u_2(z) = E_2^{(+)} \exp(-ik_2^{(+)}z) + E_2^{(-)} \exp(-ik_2^{(-)}z) \quad \text{при } \frac{L}{2} \leq z < L, \quad (12)$$

где  $E_{1,2}^{(\pm)}$  – неизвестные амплитуды бегущих волн. Их выбор определяется граничными условиями (4) и (8).

Граничное условие периодичности (4) позволяет получить первую связь в виде

$$E_1^{(+)} = R_1 E_1^{(-)} + T_2 E_2^{(+)} \exp(-ik_2^{(+)}L), \quad (13)$$

$$E_2^{(-)} \exp(-ik_2^{(-)}L) = -R_1 E_2^{(+)} \exp(-ik_2^{(+)}L) + T_1 E_1^{(-)}.$$

Граничное условие непрерывности (8) позволяет получить вторую связь в виде

$$\begin{aligned} E_1^{(-)} \exp\left(-ik_1^{(-)}\frac{L}{2}\right) &= R_1 E_1^{(+)} \exp\left(-ik_1^{(+)}\frac{L}{2}\right) \\ &+ T_2 E_2^{(-)} \exp\left(-ik_2^{(-)}\frac{L}{2}\right), \\ E_2^{(+)} \exp\left(-ik_2^{(+)}\frac{L}{2}\right) &= -R_1 E_2^{(-)} \exp\left(-ik_2^{(-)}\frac{L}{2}\right) \\ &+ T_1 E_1^{(+)} \exp\left(-ik_1^{(+)}\frac{L}{2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $T_2 = n_2/n_{av}$  и  $T_1 = n_1/n_{av}$  – коэффициенты пропускания. Соотношение между ними и коэффициентом отражения  $R_1$  очевидно:  $T_1 T_2 = 1 - R_1^2$ .

5. В последующем будут использоваться приведенные амплитуды бегущих волн

$$\tilde{E}_1^{(\pm)} = E_1^{(\pm)} \exp\left(-ik_1^{(\pm)}\frac{L}{2}\right), \quad \tilde{E}_2^{(\pm)} = E_2^{(\pm)} \exp\left(-ik_2^{(\pm)}\frac{L}{2}\right).$$

В этих обозначениях граничные условия (13), (14) примут соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2^{(-)} \\ \tilde{E}_2^{(+)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{T_2} \\ &\times \begin{pmatrix} \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(-)})\frac{L}{2}\right] & -R_1 \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(-)})\frac{L}{2}\right] \\ -R_1 \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] & \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1^{(-)} \\ \tilde{E}_1^{(+)} \end{pmatrix} = \frac{1}{T_1} \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2^{(-)} \\ \tilde{E}_2^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Объединим эти два уравнения в одно, воспользовавшись при этом соотношением между коэффициентами пропускания и отражения, приведенным выше. В результате получим условие самовоспроизведения вектора приведенных амплитуд после одного прохода по периметру резонатора:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1^{(-)} \\ \tilde{E}_1^{(+)} \end{pmatrix} = \hat{W} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1^{(-)} \\ \tilde{E}_1^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Такое условие типично для кольцевых структур различной природы. В результате подстановки (15) в (16) получим матрицу преобразования (за один проход)

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \frac{1}{T_2 T_1} \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ R_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(-)})\frac{L}{2}\right] & -R_1 \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(-)})\frac{L}{2}\right] \\ -R_1 \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] & \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

которая зависит от параметров резонатора (включая параметр невзаимности) и от неизвестной пока частоты.

Ненулевой вектор приведенных амплитуд в уравнении (17) существует только при частотах, которые являются корнями характеристического уравнения

$$\text{Det}(\hat{W} - \hat{I}) = 0, \quad (19)$$

где  $\hat{I}$  – единичная матрица. Определенные таким образом частоты суть собственные частоты резонатора. Соответствующие им смешанные волны (11), (12) являются собственными волнами (модами) для граничной задачи (7), (4), (8). Получим выражение для собственных частот.

6. Нетрудно показать, что  $\text{Det}(\hat{W} - \hat{I}) = 1 - \text{Sp} \hat{W} + \text{Det} \hat{W}$ . Найдем след и детерминант матрицы преобразования (17):

$$\begin{aligned} \text{Det} \hat{W} &= \frac{1 - R_1^2}{(T_1 T_2)^2} \left\{ \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(-)} + k_1^{(+)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] \right. \\ &\quad \left. - R_1^2 \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(-)} + k_1^{(-)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right], \right. \\ \text{Sp} \hat{W} &= \frac{1}{T_1 T_2} \\ &\times \left\{ \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(-)})\frac{L}{2}\right] - R_1^2 \exp\left[i(k_1^{(-)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] \right. \\ &\quad \left. - R_1^2 \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(-)})\frac{L}{2}\right] + \exp\left[i(k_1^{(+)} + k_2^{(+)})\frac{L}{2}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Используя (9), (10) и соотношение между коэффициентами отражения и пропускания, путем несколько громоздких преобразований приведем последние выражения к виду

$$\text{Det} \hat{W} = \exp\left(-i\chi 4a \frac{L}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{Sp} \hat{W} &= 2 \exp\left(-i\chi 2a \frac{L}{2}\right) (1 - R_1^2)^{-1} \left\{ \cos\left[n_1 + n_2 \frac{L}{2}\right] \right. \\ &\quad \left. - R_1^2 \cos\left[\chi(n_1 - n_2) \frac{L}{2}\right] \right\}. \end{aligned}$$

С учетом этих выражений характеристическое уравнение (19) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\begin{aligned} 2 \exp\left(-i\chi 2a \frac{L}{2}\right) \frac{1}{1 - R_1^2} \left\{ (1 - R_1^2) \cos\left(\chi 2a \frac{L}{2}\right) \right. \\ \left. - \cos\left[\chi(n_1 + n_2) \frac{L}{2}\right] - R_1^2 \cos\left[\chi(n_1 - n_2) \frac{L}{2}\right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение удобнее представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \sin\left(\chi \frac{n_1 + n_2 - 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \sin\left(\chi \frac{n_1 + n_2 + 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \\ - R_1^2 \sin\left(\chi \frac{n_1 - n_2 - 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \sin\left(\chi \frac{n_1 - n_2 + 2a}{2} \frac{L}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Если  $a = 0$  и  $R_1 = 0$ , корни уравнения (20) двукратно вырождены и образуют последовательность  $k_p = 2\pi p / (n_{av} L)$

(формально  $n_1 = n_2$ ) при натуральных  $p$ . Мы снова пришли к уже упомянутому выше спектру частот взаимного кольцевого резонатора с однородным заполнением.

При небольших параметрах невязимости и неоднородности (в указанном выше смысле) естественно искать приведенные собственные частоты  $\chi$  с помощью теории возмущений вырожденного спектра. Запишем выражение для первого слагаемого в уравнении (20), используя линейное приближение для его сомножителей:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\chi \frac{n_1 + n_2 - 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \sin\left(\chi \frac{n_1 + n_2 + 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \\ & \approx \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \frac{L}{2}\right)^2 (\chi - k_p^{(+)}) (\chi - k_p^{(-)}), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $k_p^{(\pm)} = 2\pi p / [(n_{av} \mp a)L]$  – корни первого и второго сомножителей соответственно.

Второе слагаемое в (20) мало. Для сохранения порядка малости параметр  $\chi$  в нем может быть заменен на  $k_p$ ; выполнен также ряд приближенных преобразований, приведенных ниже. Во первых,

$$\begin{aligned} & R_1^2 \sin\left(\chi \frac{n_1 - n_2 - 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \sin\left(\chi \frac{n_1 - n_2 + 2a}{2} \frac{L}{2}\right) \\ & \approx R_1^2 \sin^2\left(k_p \frac{n_1 - n_2}{2} \frac{L}{2}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Кроме того, для  $\chi$ , близких к  $k_p$ , уравнение (20) в силу выражений (21), (22) можно заменить квадратным уравнением вида

$$(\chi - k_p^{(+)}) (\chi - k_p^{(-)}) \approx R_1^2 \sin^2\left(R_1 k_{p0} \frac{L}{2}\right) \left(n_{av} \frac{L}{2}\right)^{-2},$$

где  $k_{p0} = 2\pi p / L = 2\pi / \lambda$ .

Решая это уравнение, получим два значения  $\chi_p^{(\pm)}$ :

$$\begin{aligned} \chi_p^{(\pm)} & = \frac{k_p^{(+)} + k_p^{(-)}}{2} \\ & \pm \left[ \left( \frac{k_p^{(+)} - k_p^{(-)}}{2} \right)^2 + R_1^2 \sin^2\left(R_1 k_{p0} \frac{L}{2}\right) \left(n_{av} \frac{L}{2}\right)^{-2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда в нулевом приближении следует выражение для расщепления частот, обусловленного возмущением вырожденной частоты:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_p & = \omega_p^{(+)} - \omega_p^{(-)} = (\chi_p^{(+)} - \chi_p^{(-)})c_0 \\ & = 2 \frac{c_0}{Ln_{av}} \left[ (ak_{p0}L)^2 + 4R_1^2 \sin^2\left(R_1 k_{p0} \frac{L}{2}\right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

В этой формуле в рамках сделанных допущений учтено влияние как невязимости, так и неоднородности заполнения кольцевого резонатора.

7. Сформулируем основные результаты работы. Вырожденные частоты (взаимного однородного резонатора) образуют эквидистантный спектр с частотным интервалом  $\omega_{p0} - \omega_{p-10} = 2\pi c_0 / (n_1 L)$ . Вращение и неоднородность заполнения резонатора снимают вырождение. Формула (23) дает выражение для дуплета собственных частот  $\omega_p^{(\pm)} = c_0 \chi_p^{(\pm)}$ , лежащих вблизи вырожденной собст-

венной частоты  $\omega_{p0} = c_0 k_{p0}$ . Разность частот для каждого дуплета (частотное расщепление) определяется выражением (24). Она зависит как от номера дуплета (через  $k_{p0}$ ), так и от параметров резонатора – параметра невязимости и коэффициента отражения. Меньшие (а также большие) частоты дуплетов образуют неэквидистантную последовательность. Аналогичная зависимость характерна и для разности собственных частот связанных консервативных контуров с различными парциальными резонансными частотами. Таким образом, определенная вырожденная собственная частота «невозмущенного» кольцевого резонатора соответствует совпадающим собственным частотам двух идентичных несвязанных контуров. Связь (индуктивного или емкостного типа) между контурами является аналогом связи между волнами кольцевого резонатора вследствие неоднородности его заполнения. При наличии связи и «невязимости» (различия парциальных частот контуров) собственные частоты системы контуров, как и собственные частоты резонатора, «расталкиваются» [5], причем каждый из двух факторов только увеличивает расщепление. Внутренняя синхронизация в кольцевом лазере [6] может рассматриваться как компенсация суммарного расщепления собственных частот реального резонатора за счет нелинейной связи между модами (не являющимися бегущими волнами). Естественно, что теория генерации в двухчастотном кольцевом лазере сложнее и указанная аналогия носит только качественный характер.

Выражение (24) позволяет отметить важную особенность расщепления частот дуплета, по понятным причинам не имеющую аналога в системе связанных консервативных контуров. Для приблизительной числовой оценки по формуле (24) укажем значения входящих в нее величин. Если осевой контур кольцевого резонатора есть окружность с периметром  $L = 0.4$  м и невязимостью создается вращением резонатора с угловой скоростью, равной скорости вращения Земли, то  $a = 1.55 \times 10^{-14}$ .

В качестве примера, поясняющего влияние двух резких неоднородностей резонатора (рассматриваемых как взаимодействующие рассеивающие центры), возьмем резонатор, заполненный средами с  $n_1 = 1.1 + 5 \times 10^{-4}$  и  $n_2 = 1.1 - 5 \times 10^{-4}$ . В этом случае  $n_{av} = 1.1$ ,  $\Delta n = n_1 - n_2 = 10^{-3}$  и  $R_1 = 10^{-5}$ . При использовании резонатора с центральной длиной волны  $\lambda_0 = 10^{-6}$  м вырожденное волновое число  $k_{p0} = 6.28 \times 10^6$  м<sup>-1</sup>. Расщепление частот зависит не только от  $R_1$ , но и от периодически меняющейся величины  $|\sin(R_1 k_{p0} L / 2)|$ . Видно, что при сравнительно малой разности показателей преломления вклад, вносимый в расщепление (24) из-за отражения на неоднородности, может варьироваться от нуля до максимального значения  $\Delta\omega_p^{\max} \approx 4R_1 c_0 / (n_{av} L)$ . При  $n_{av} = 1.1$ ,  $L = 0.4$  м и  $R_1 = 10^{-3}$  этот вклад равен  $2.72 \times 10^5$  рад/с. Таков порядок величины зоны захвата в кольцевом лазере с рассматриваемым реальным резонатором.

Расщепление частот изменяется от минимального значения, зависящего только от параметра невязимости, до максимального, определяемого также и коэффициентом отражения (числовые оценки приведены на рис.1). Для большей наглядности на рис.1 параметр невязимости  $a = 3 \times 10^{-11}$ . Видно, что при некоторых значениях разности показателей преломления (коэффициента отражения) происходит «просветление» среды заполнения резонатора: расщепление частот определяется только невязимостью. Это является следствием взаи-

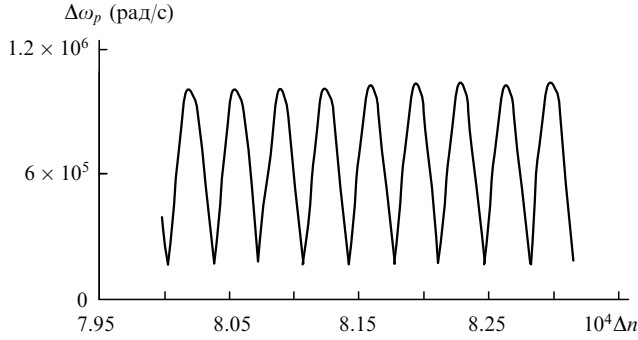


Рис.1. Зависимость разности собственных частот  $\Delta\omega_p$  (24) от разности показателей преломления  $\Delta n$  при  $a = 3 \times 10^{-11}$  и  $k_{p0}L = 3.99 \times 10^6$ .

модействия рассеивателей, которое имеет место и для более реалистичных неоднородностей.

8. Определенный интерес представляет описание мод исследуемого резонатора. Они определены с точностью до постоянной величины, и их количественной характеристикой служит только коэффициент распределения, т. е. отношение амплитуд встречных бегущих волн, образующих данную моду. Рассматриваемая задача о кольцевом резонаторе вполне аналогична квантово-механической спектральной задаче с периодическим потенциалом и периодическими граничными условиями. Решением этой задачи могут быть (в зависимости от свойств потенциала) периодические собственные функции типа стоячей либо бегущей волны.

В нашем случае можно ожидать аналогичных результатов. При этом следует учитывать, что даже незначительные, но скачкообразные изменения показателя преломления  $\Delta n$  являются эффективными эквивалентными точечными отражателями. При наличии двух таких отражателей образуется система из двух связанных линейных резонаторов, объединенных в один кольцевой резонатор. В зависимости от  $\Delta n$  и геометрических параметров системы связь таких линейных резонаторов может быть как слабой (вплоть до полной независимости), так и сильной (вплоть до формирования однородного кольцевого резонатора). В первом случае моды будут близки к стоячим волнам (модуль коэффициента распределения соизмерим с единицей), во втором мода близка к бегущей волне (модуль коэффициента распределения либо много больше единицы, либо близок к нулю). Степень связи системы взаимодействующих линейных резонаторов периодически зависит от  $\Delta n$  (при остальных фиксированных параметрах). Действительно, с изменением  $\Delta n$  меняются эквивалентные размеры резонаторов, что, в свою очередь, очевидным образом приводит к периодической воспроизводимости всех свойств системы.

Как следует из (17), коэффициент распределения моды в области среды с  $n = n_1$  для приведенной собственной частоты  $\chi = \chi_p^{(\pm)}$  может быть найден по формуле

$$\frac{E_1^{(-)}}{E_1^{(+)}} = \frac{\tilde{E}_1^{(-)}}{\tilde{E}_1^{(+)}} = \frac{W_{12}}{1 - W_{11}}. \quad (25)$$

Указанные элементы матрицы  $\hat{W}$  зависят от  $\chi$ . Используя (18), можно показать, что

$$W_{12} = \frac{R_1}{T_1 T_2} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[ i(k_1^{(+)} + k_2^{(+)}) \frac{L}{2} \right] - \exp \left[ i(k_1^{(+)} + k_2^{(-)}) \frac{L}{2} \right] \right\} \\ = \frac{R_1}{T_1 T_2} \left[ \exp \left( i\chi L \frac{n_1 + n_2}{2} \right) \exp(-i\chi L a) \right. \\ \left. - \exp \left( i\chi L \frac{n_1 - n_2}{2} \right) \right],$$

$$W_{11} = \frac{1}{T_1 T_2}$$

$$\times \left\{ \exp \left[ i(k_1^{(-)} + k_2^{(-)}) \frac{L}{2} \right] - R_1^2 \exp \left[ i(k_1^{(-)} + k_2^{(+)}) \frac{L}{2} \right] \right\} \\ = \frac{1}{T_1 T_2} \left[ \exp \left( -i\chi L \frac{n_1 + n_2}{2} \right) \exp(i\chi L a) \right. \\ \left. - R_1^2 \exp \left( -i\chi L \frac{n_1 - n_2}{2} \right) \right].$$

Опуская члены, пропорциональные  $R_1^2$ , с помощью двух последних выражений приведем (25) к следующему виду:

$$\frac{E_1^{(-)}}{E_1^{(+)}} \\ \approx R_1 \frac{\exp(i\chi L n_{av}) \exp(-i\chi L a) - \exp[i\chi L (n_1 - n_2)/2]}{1 - \exp(-i\chi L n_{av}) \exp(i\chi L a)}. \quad (26)$$

Из (23) после несколько громоздких преобразований нетрудно получить, что

$$\exp(i\chi_p L n_{av}) \\ = \exp \left\{ \pm i \left[ (ak_{p0}L)^2 + 4R_1^2 \sin^2 \left( R_1 k_{p0} \frac{L}{2} \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (27)$$

(легко заметить, что из (27) следует выражение (24)).

Выражение (27) получено при условии, что  $ak_{p0}L$  и  $2R_1$  имеют одинаковый порядок малости; это условие не вполне корректно в предельном случае  $R_1 = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , когда следует воспользоваться значительно более простыми соотношениями, о чем говорилось выше. Использование (27) в (26) позволяет в указанном приближении дать численные оценки модуля коэффициента распределения (26). На рис.2 показана зависимость этой величины от  $\Delta n$  при тех же значениях  $n_{av}$ ,  $a$ ,  $L$ ,  $k_{p0}$ ,  $\lambda$ , что и в п.7. Для сравнения на рис.2 приведена также зависимость

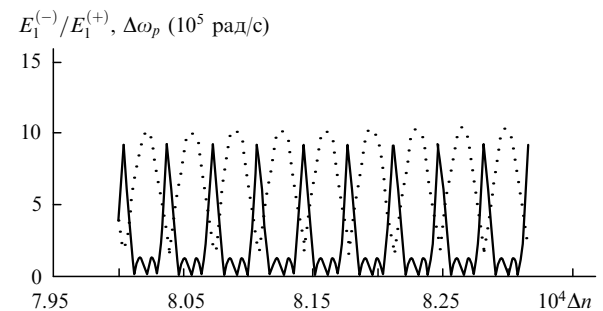


Рис.2. Зависимости модуля коэффициента распределения  $E_1^{(-)}/E_1^{(+)}$  (26) одной из мод (сплошная кривая) и разности собственных частот  $\Delta\omega_p$  (24) (пунктирная кривая) от разности показателей преломления  $\Delta n$ .

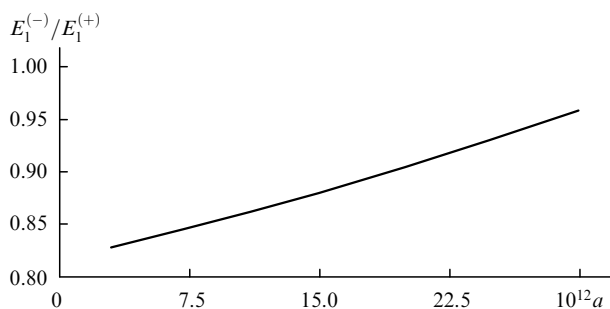


Рис.3. Зависимость модуля коэффициента распределения  $E_1^{(-)}/E_1^{(+)}$  (26) от параметра невязимности  $a$  при  $\Delta n = 8.158 \times 10^{-4}$  и  $k_{p0}L = 3.99 \times 10^6$ .

$\Delta\omega_p(\Delta n)$ . Расчет выполнен только для одной приведенной собственной частоты  $\chi_p^{(+)} = \omega_p^{(+)} / c_0$ . Аналогичную зависимость для другой собственной частоты (для соответствующей моды) можно рассчитать по формуле (24).

На рис.2 видны все отмеченные выше особенности мод неоднородного кольцевого резонатора. В среднем эти моды близки к стоячим волнам. Однако при тех  $\Delta n$ , при которых разность собственных частот определяется только невязимностью («просветление» резонатора) мода близка к бегущей волне (модуль коэффициента распределения достигает 10). При некоторых значениях  $\Delta n$  в области сильного влияния неоднородности (когда разность частот в основном обусловлена неоднородностью резонатора) модуль коэффициента распределения дости-

гает нижнего предела, равного 0.4 (что соответствует сравнительно небольшому отличию моды от стоячей волны). Возможно, это обусловлено используемыми приближениями, но не исключено и физическое объяснение: преобладание противоположного направления распространения волны в моде при некоторых  $\Delta n$  может быть следствием сложного характера взаимодействия волн в системе двух связанных линейных резонаторов при равнозначности обоих направлений распространения (это очевидно, если невязимность отсутствует).

На рис.3 для полноты картины показана зависимость модуля коэффициента распределения от параметра невязимности при фиксированном  $\Delta n$ , обеспечивающем близкий к стоячей волне характер моды. Эта зависимость в широком диапазоне изменения параметра невязимности очень слабая и монотонная. При других  $\Delta n$  закономерность та же, т.е. структура моды определяется главным образом только неоднородностью резонатора.

1. Скрябин Д.В., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **75** (1), 175 (1992).
2. Скрябин Д.В., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **77** (1), 109 (1994).
3. Судаков В.Ф. *Квантовая электроника*, **35** (12), 1146 (2005).
4. Aronowitz F. *Phys. Rev. A*, **139**, 635 (1965).
5. Стрелков С.П. *Введение в теорию колебаний* (М.: Наука, 1964, ч. II, гл. 1).
6. Зейгер С.Г., Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Фрадкин Э.Е. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (М.: Наука, 1974, с. 77 – 102).