

# Динамические зоны синхронизации кольцевого лазера при использовании периодической подставки

В.Н.Курятов, В.Ф.Судаков

*Представлена методика расчета динамических зон синхронизации кольцевого лазера с периодической частотной подставкой специального вида. Предложенный алгоритм, по существу учитывающий особый характер подставки, позволяет проводить поиск минимальных ширин зон при изменении параметров подставки. В качестве примеров проведены расчеты ширин зон в случае модуляции гармонической несущей как гармонической огибающей (трехчастотная подставка), так и огибающей типа «мягкого» меандра (многочастотная подставка).*

**Ключевые слова:** кольцевой лазер, динамические зоны синхронизации, знакопеременная подставка.

## 1. Введение

Одномодовый (двухволновой) кольцевой лазер (КЛ) может работать в режиме как двухчастотной генерации (каждая волна генерируется на своей частоте), так и одночастотной (обе волны генерируются на одной частоте, т. е. взаимно синхронизированы). Реализация этих режимов зависит от отношения разности собственных частот резонатора  $\Delta\Omega$  (частотной невзаимности) к величине  $\Omega_{st}$  (порог статической синхронизации, ПСС). Одночастотный режим имеет место при  $\Delta\Omega/\Omega_{st} \leq 1$ , двухчастотный – в противном случае. Если ПСС недопустимо велик, вводят периодическую частотную подставку (частотную модуляцию) на частоте  $\nu_m$  с амплитудой  $\Omega_m$ , намного превышающей ПСС. Подставка является той частью разности частот генерируемых встречно распространяющихся волн, которая создается управляющим сигналом (т. е. полностью известна). Как и измеряемая (т. е. заранее неизвестная) часть этой разности частот, подставка порождается невзаимностью кольцевого резонатора. При наличии периодической подставки измеряемая разность частот  $\bar{\Omega}$  есть результат некоторой операции, выполняемой над массивом значений разности фаз встречных волн  $\varphi(t)$  в определенные дискретные моменты времени. В простейшем случае разность фаз квантуется с шагом  $\pi$ , указанные моменты времени соответствуют квантованным значениям фазы, а в качестве оценки частотной невзаимности используется выражение

$$\bar{\Omega} = \frac{\varphi(nT_m) - \varphi(0)}{nT_m},$$

где  $T_m = 2\pi/\nu_m$  – период подставки;  $n$  – некоторое целое число (в теории обычно  $n = 1$ ). Таким способом можно получить достаточно точные оценки частотной невзаим-

ности, меньшей ПСС, но и в этом случае она должна превышать величину  $\Omega_{dyn}$ , называемую порогом динамической синхронизации (ПДС).

Было также установлено, что в окрестности значений  $\Delta\Omega$ , кратных частоте подставки, оценка невзаимности резко ухудшается из-за возникновения динамических зон синхронизации (ДЗС) различных порядков. Возникновение таких зон есть результат синхронизации связанной системы двух генераторов в режиме биений на обертонах частоты подставки. Основные особенности при использовании периодической подставки проявляются в зависимости  $\bar{\Omega}(\Delta\Omega)$ , которую можно рассматривать в качестве выходной характеристики КЛ как измерительного преобразователя. Исследованию этой характеристики было посвящено большое число работ. Ранние работы [1–5] в основном описывали ПДС, однако в [6] путем численного эксперимента были исследованы также и ДЗС низших порядков. Дальнейшее развитие теории шло в направлении более точного и подробного описания всей совокупности ДЗС и поведения характеристики между ними.

Разность фаз встречных волн при наличии периодической подставки  $\Omega_m H(\nu_m t)$  удовлетворяет известному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\Omega + \Omega_m H(\nu_m t) - \Omega_{st} \cos \varphi. \quad (1)$$

Обычно (это определяется конкретными техническими решениями) используется либо гармоническая подставка, либо подставка типа меандра. В первом случае в ее спектре присутствует одна частота, во втором спектр является многочастотным. По этой причине во многих работах изучается именно многочастотная периодическая подставка. В частности, в [7, 8] методом усреднения была построена общая теория КЛ с периодической подставкой, но при условии  $\nu_m \gg \Omega_{st}$ . Исследовались не только ДЗС целых порядков (в линейном приближении по связи) [7], но и ДЗС полужелых порядков (в квадратичном приближении по связи) [8].

Указанное ограничение не всегда выполняется на практике. Чтобы восполнить этот пробел, в работе [9] вместо метода усреднения использовалась теория Флоке. Для применения этой теории нелинейное уравнение (1)

**В.Н.Курятов.** ФГУП «НИИ "Полос" им. М.Ф.Степанаха», Россия, 117342 Москва, ул. Введенского, 3

**В.Ф.Судаков.** Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5; e-mail: soudukov@aport2000.ru

Поступила в редакцию 22 декабря 2006 г., после доработки – 2 августа 2007 г.

было приведено к линейному дифференциальному уравнению второго порядка для некоторого искусственного «колебания» с периодическим коэффициентом и фазой, близкой к  $\varphi(t)$ . Однако в [9] использовать общую теорию для расчетов удалось только для подставки типа меандра. Заметим, что и в [7] общая теория была применена фактически только для расчетов в случае гармонической подставки и подставки типа меандра, хотя возможности метода усреднения этим далеко не ограничены. Дальнейшие существенные обобщения представлены в работах [10, 11], где на основе [7], т. е. на основе метода усреднения, исчерпывающим образом описана характеристика  $\bar{\Omega}(\Delta\Omega)$  в случае подставки типа меандра. В частности, точно указаны не только размеры ДЗС, но и положения их центров (что дает уточнение масштабного коэффициента характеристики). В [11] исследованы также некоторые специальные виды немодулированной подставки (в том числе гармоническая и меандр). Другие работы авторов цитируемых выше статей являются обобщением полученных ими результатов на случай подставки, включающей в себя шумовые компоненты. Особое место занимает работа [12], в которой развит физически наглядный и удобный для применения метод (векторная модель), эффективный, в частности, при исследовании периодической подставки с шумовой компонентой.

Все известные нам публикации посвящены периодической подставке, удовлетворяющей важному условию, которое было сформулировано в [11]: любая горизонтальная прямая пересекается с кривой, описывающей модуляцию подставки, не более двух раз на периоде этой модуляции. Форма подставки на периоде при этом может быть произвольной – от меандра до гармонической (включая треугольную, пилообразную, экспоненциальную и др.). Однако помимо подставки такого типа возможен принципиально другой ее вид – модулированная подставка, включающая в себя быструю (несущую) и медленную компоненты, так что на периоде медленной компоненты укладывается несколько периодов несущей. В этом случае при построении теории целесообразно ориентироваться на высокочастотную компоненту подставки и вместо метода усреднения использовать альтернативный ему метод, в котором учитывается особый характер модулированной подставки. Изложению и применению такого метода и посвящена настоящая работа. Для определенности рассмотрены подставки двух типов: с модуляцией гармонического сигнала гармоническим сигналом или экспоненциально сглаженным меандром. Такие подставки, насколько нам известно, детально ранее не изучались. Реализованный ниже метод имеет ограниченную область применения, но в ее пределах эффективен при проведении численных расчетов, что важно для практических приложений.

## 2. Основное уравнение и его преобразование

Если для формирования характеристики  $\bar{\Omega}(\Delta\Omega)$  используется модулированная подставка, фазовое уравнение (1) должно быть изменено следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\Omega - \Omega_m \cos(v_c t) [1 + \varepsilon H(v_m t)] - \Omega_{st} \cos \varphi. \quad (2)$$

В данном частном случае подставка представляет собой гармоническую несущую на частоте  $v_c$  с периодической

модуляцией функцией  $H(v_m t)$  ( $|H(v_m t)| \leq 1$ ) и глубиной модуляции  $\varepsilon < 1$ . Уравнение (2) может быть приведено к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\Omega - \Omega_m \cos(v_c t) + \Omega_m \varepsilon f(t) - \Omega_{st} \cos \varphi, \quad (3)$$

где

$$f(t) = \cos(v_c t) H(v_m t). \quad (4)$$

Используя безразмерное время  $\tau = \Omega_{st} t$ , запишем (3) в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - \sigma \cos(\alpha\tau) + \varepsilon \sigma \bar{f}(\alpha\tau) - \cos \varphi(\tau), \quad (5)$$

где  $\bar{f}(\alpha\tau) = 2 \sin(\alpha\tau) H(M^{-1}\alpha\tau)$  и введены безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{v_c}{\Omega_{st}}; \quad \sigma = \frac{\Omega_m}{\Omega_{st}} \gg 1; \quad \gamma = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_{st}}; \quad M = \frac{v_c}{v_m} \geq 2. \quad (6)$$

Удобно считать, что период подставки  $T_m = 2\pi/v_m$ , хотя, как будет видно в дальнейшем, это не обязательно (подставка может быть и почти периодической). Представим решение (5) в следующем виде:

$$\varphi(\tau) = m\alpha\tau - \frac{\sigma}{\alpha} \sin(\alpha\tau) + \varepsilon \frac{\sigma}{\alpha} F(\alpha\tau) + \varphi_m(\tau), \quad (7)$$

где целое число  $m \geq 0$  – порядок ДЗС;

$$F(\alpha\tau) = \int \bar{f}(\zeta) d\zeta$$

– периодическая функция;  $\zeta = \alpha\tau$ . Подставив (7) в выражение (5), нетрудно получить уравнение для аддитивной фазы  $\varphi_m(\tau)$ :

$$\frac{d\varphi_m(\tau)}{d\tau} = \gamma - m\alpha - \cos[m\alpha\tau - \eta \sin(\alpha\tau) + \varepsilon \eta F(\alpha\tau) + \varphi_m(\tau)],$$

где  $\eta = \Omega_m/v_c \gg 1$ .

Если проинтегрировать это уравнение по безразмерному времени на интервале  $[-M\pi/\alpha, M\pi/\alpha]$ , который соответствует периоду модуляции, то получим выражение для приращения фазы на указанном интервале:

$$\Delta\varphi_m = (\gamma - m\alpha) 2M \frac{\pi}{\alpha} - \int_{-M\pi/\alpha}^{M\pi/\alpha} \cos[m\alpha\tau - \eta \sin(\alpha\tau) + \varepsilon \eta F(\alpha\tau) + \varphi_m(\tau)] d\tau. \quad (8)$$

Из (7) и (8) нетрудно установить, что

$$\bar{\Omega} = \frac{\Delta\varphi(\tau)}{2M\pi/\alpha} = m\alpha + \frac{\Delta\varphi_m(\tau)}{2M\pi/\alpha}.$$

По определению величина  $\bar{\Omega}$  принимается за оценку частотной невязанности. Видно, что при всех  $\Delta\Omega$ , таких, что  $\Delta\varphi_m(\tau)/(2M\pi/\alpha) = 0$ , имеет место синхронизация  $m$ -го порядка:  $\bar{\Omega} = m\alpha$ . Определить ширину зоны синхронизации  $2S_m$  можно по величине интеграла в выражении (8).

## 3. Оценка ширины ДЗС в общем виде

Введем в рассмотрение функцию  $\mathfrak{R}_m(\eta, \varepsilon)$  большого параметра  $\eta$ :

$$\Re_m(\eta, \varepsilon) = \frac{1}{2M\pi} \int_{-M\pi}^{M\pi} \exp\{i[m\zeta - \eta \sin \zeta + \varepsilon\eta F(\zeta)]\} d\zeta. \quad (9)$$

Из оценок при  $\eta \gg 1, \varepsilon < 1$  следует, что второе слагаемое в показателе экспоненты значительно превышает два других в точках  $\zeta_k = (2k + 1)\pi/2$ . При  $-M \leq k \leq M - 1$  эти точки являются стационарными для интеграла (9). Следовательно, для него можно указать асимптотическое приближение [13]:

$$\Re_m(\eta, \varepsilon) \approx \frac{1}{2M\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} \sum_{k=-M}^{k=M-1} \exp \left\{ i \left[ m\zeta_k - \eta(-1)^k + \frac{\pi}{4}(-1)^k + \varepsilon\eta F(\zeta_k) \right] \right\}. \quad (10)$$

Крайние стационарные точки во внимание не принимаются, поскольку соответствующие им слагаемые в (10) пропорциональны  $2\pi/\eta$ , т. е. значительно меньше учтенных слагаемых. Из (8) следует, что синхронизация имеет место при условии

$$\begin{aligned} |\gamma - m\alpha| &\leq S_m(\eta, \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2M\pi} \int_{-M\pi}^{M\pi} \cos[m\zeta - \eta \sin \zeta + \varepsilon\eta F(\zeta)] d\zeta. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) и (10) получим приближенное выражение для полуширины ДЗС  $m$ -го порядка в общем виде:

$$\begin{aligned} S_m(\eta, \varepsilon) &= |\operatorname{Re} \Re_m(\eta, \varepsilon)| = \frac{1}{2M\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} \\ &\times \left| \sum_{k=-M}^{k=M-1} \cos \left[ m\zeta_k - \eta(-1)^k + \frac{\pi}{4}(-1)^k + \varepsilon\eta F(\zeta_k) \right] \right|. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что (11) эквивалентно условию  $|\Omega - mv_c| \leq S_m(\eta, \varepsilon)\Omega_{st}$ , т. е.  $S_m(\eta, \varepsilon)$  – полуширина ДЗС, нормированная на ПСЗ и характеризующая влияние подставки.

В отсутствие модуляции ( $\varepsilon = 0$ ) получим выражение

$$\begin{aligned} S_m(\eta, 0) &= |\operatorname{Re} \Re_m(\eta, 0)| \\ &= \frac{1}{2M\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} \left| \sum_{k=-M}^{k=M-1} \cos \left[ m\zeta_k - \eta(-1)^k + \frac{\pi}{4}(-1)^k \right] \right|. \end{aligned}$$

Легко показать, что оно не зависит от  $M$ , и поэтому можно положить  $M = 1$ . В результате получим

$$S_m(\eta, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} \left| \cos \left( m\frac{\pi}{2} - \eta + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Это известное асимптотическое выражение для полуширины ДЗС  $m$ -го порядка в случае гармонической подставки, что косвенно подтверждает правильность основного результата, описываемого формулой (12). Влияние модуляции целесообразно оценивать с помощью коэффициента влияния

$$\Sigma_m(\eta, \varepsilon) = \frac{S_m(\eta, \varepsilon)}{S_m(\eta, 0)}. \quad (13)$$

Особый интерес представляет величина  $\Sigma_0(\eta, \varepsilon)$ , относящаяся к области взаимной синхронизации волн (основной ДЗС).

#### 4. Оценка ширин ДЗС для заданных видов модуляции подставки

Применим общие выражения для расчетов коэффициента  $\Sigma_m(\eta, \varepsilon)$  в конкретных случаях.

##### 4.1. Трехчастотная подставка

Пусть в уравнении (2) функция  $H(v_m t) = \cos(v_m t)$ . Такая подставка содержит в своем спектре три гармоники. В этом случае  $\tilde{f}(\alpha\tau) = \cos(\alpha\tau)H(M^{-1}\alpha\tau)$  и ее первообразная

$$F(\alpha\tau) = \int \tilde{f}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(1+M^{-1})\alpha\tau]}{1+M^{-1}} + \frac{\sin[(1-M^{-1})\alpha\tau]}{1-M^{-1}} \right\}.$$

Подставив это выражение в (13), проведем расчет  $\Sigma_m(\eta, \varepsilon)$  для  $m = 0, 1$  при различных значениях  $M, \eta, \varepsilon$ . Типичные значения этих параметров таковы:  $4 \leq M \leq 8, 100 \leq \eta \leq 200, 0 \leq \varepsilon \leq 0.1$ . Результаты расчета представлены на рис.1–3.

Из рис.1 следует, что если четыре периода несущей укладываются на одном периоде огибающей, то в широком диапазоне превышений средней частотой  $\Omega_m$  частоты модуляции  $v_m$  влияние глубины модуляции на ширину ДЗС одинаково для зон различных порядков. Существуют глубины модуляции  $\varepsilon$  и параметры  $\eta$ , при которых ширины ДЗС резко уменьшаются. Например, при  $\varepsilon = 0.068, \eta = 100$  коэффициент влияния равен 0.01, а при  $\varepsilon = 0.082, \eta = 200$  он составляет 0.009, т. е. за счет модуляции ширины ДЗС уменьшаются приблизительно в 100 раз.

Увеличение  $M$  до 8, как следует из рис.2, подтверждает, что глубина модуляции одинаково влияет на ширины ДЗС различных порядков. При  $\varepsilon = 0.085, \eta = 100$  ширины ДЗС уменьшаются в 200 раз, при  $\varepsilon = 0.07, \eta = 200$  – приблизительно в 100 раз.

Расчеты показывают (рис.3), что влияние глубины модуляции на ширины ДЗС различных порядков совершенно одинаково. В качестве параметра выбрано отношение амплитуды огибающей к учетверенной частоте несущей  $\varepsilon\Omega_m/(4v_c) = \varepsilon\eta/4$  (при  $\eta = 200, M = 4$ ), что удобно для сравнения с экспериментальными результатами. При некоторых глубинах модуляции возможно весьма существенное уменьшение ширин ДЗС. Например, при  $\varepsilon\eta/4 = 1.69$  модуляция уприводит к уменьшению этих ширин более чем в 1500 раз.

Результаты расчетов дают представление о влиянии различных параметров гармонически модулированной

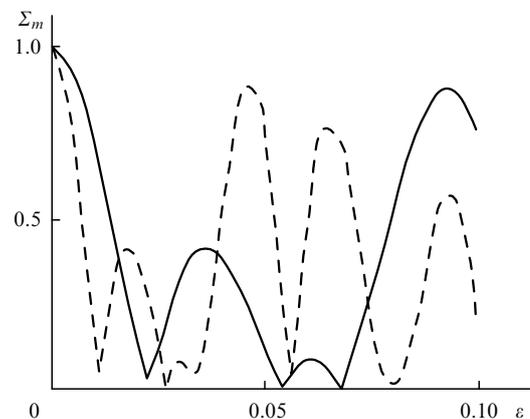


Рис.1. Зависимости коэффициента влияния  $\Sigma_m(\eta, \varepsilon)$  от глубины модуляции  $\varepsilon$  для низших ДЗС ( $m = 0, 1$ ) при  $\eta = 100$  (сплошная кривая) и 200 (штриховая кривая),  $M = 4$ .

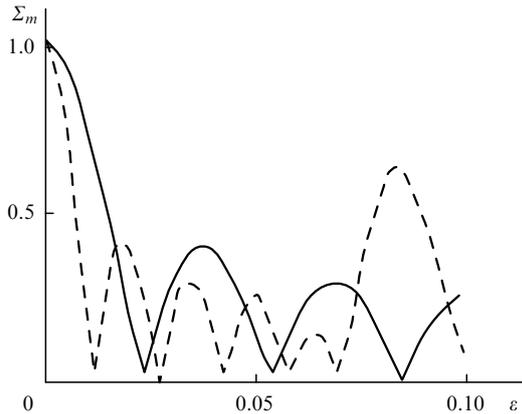


Рис.2. Зависимости коэффициента влияния  $\Sigma_m(\eta, \epsilon)$  от глубины модуляции  $\epsilon$  для низших ДЗС ( $m = 0, 1$ ) при  $\eta = 100$  (сплошная кривая) и 200 (штриховая кривая),  $M = 8$ .

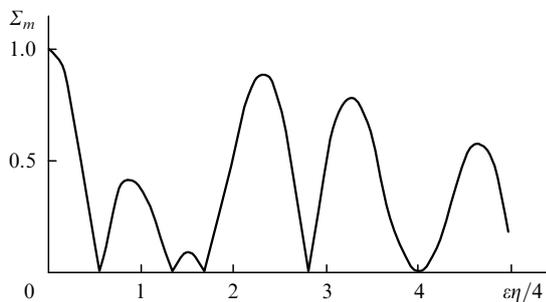


Рис.3. Зависимость коэффициента влияния  $\Sigma_m(\eta, \epsilon)$  от  $\epsilon\eta/4$  при  $m = 0$  и 1,  $M = 4$ ,  $\eta = 200$ .

подставки на ширины ДЗС. Видно, что выбор глубины модуляции  $\epsilon$  позволяет существенно уменьшить эти ширины (в равной степени для зон различного порядка). Изменяя параметры  $M, \epsilon, \eta$ , можно определить предельно возможное уменьшение ширин ДЗС.

**4.2. Многочастотная подставка**

Рассмотрим модуляцию гармонической несущей функцией, показанной на рис.4. Аналитически эта функция может быть описана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H(t) = & \left\{ h_0 - (1 + h_0) \exp \left[ -\beta \left( t + \frac{T_m}{2} \right) \right] \right\} \\
 & \times \left[ \Phi \left( t + \frac{T_m}{2} \right) - \Phi(t) \right] + [-h_0 + (1 + h_0) \exp(-\beta t)] \\
 & \times \left[ \Phi(t) - \Phi \left( t - \frac{T_m}{2} \right) \right], \tag{14}
 \end{aligned}$$

где

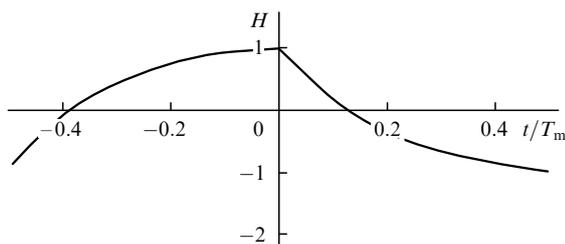


Рис.4. Модуляция «мягким» меандром  $H(t)$  при «добротности»  $Q = 5$  ( $\beta = 377$ ).

$$h_0 = \left[ 1 + \exp \left( -\frac{\beta}{v_c} \pi M \right) \right] \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\beta}{v_c} \pi M \right) \right]^{-1};$$

$\Phi(t)$  – функция Хевисайда [14]. Функции  $H(t)$  соответствуют целое семейство кривых – от почти точного меандра до треугольной формы. Параметром формы является дополнительный параметр подставки  $\beta = v_c/Q$ , который удобнее заменить «добротностью»  $Q$ . Спектр модулированной таким образом подставки достаточно широкий (он зависит от  $Q$ ). Первообразная  $F(\alpha\tau) = \int \bar{F}(\zeta) d\zeta$ , используемая в (12), может быть найдена из выражения (14):

$$\begin{aligned}
 F(\alpha\tau) = & \left\{ h_0 \sin(\alpha\tau) - (1 + h_0) \exp \left( -\frac{1}{Q} \pi M \right) \right. \\
 & \times \left. \frac{\exp(-\alpha\tau/Q) [-Q^{-1} \cos(\alpha\tau) + \sin(\alpha\tau)]}{1 + (\beta/v_c)^2} \right\} \\
 & \times [\Phi(\alpha\tau + \pi M) - \Phi(\alpha\tau)] \\
 & + \left\{ -h_0 \sin(\alpha\tau) + (1 + h_0) \exp \left( -\frac{1}{Q} \alpha\tau \right) \right. \\
 & \times \left. \frac{\exp(-\alpha\tau/Q) [-Q^{-1} \cos(\alpha\tau) + \sin(\alpha\tau)]}{1 + (\beta/v_c)^2} \right\} \\
 & \times [\Phi(\alpha\tau) - \Phi(\alpha\tau - \pi M)].
 \end{aligned}$$

Подставив данное выражение в (13), проведем расчет  $\Sigma_m(Q, \eta, \epsilon)$  для  $m = 0, 1$  при различных значениях  $M, \eta, \epsilon, Q$ . Типичные значения этих параметров следующие:  $4 \leq M \leq 8, 100 \leq \eta \leq 200, 0 \leq \epsilon \leq 0.1, 2 \leq Q \leq 6$ . Результаты расчетов представлены на рис.5–7.

Из рис.5 следует, что и при изменении глубины модуляции ее влияние на ширину ДЗС одинаково для зон различного порядка. Существуют значения глубины модуляции  $\epsilon$  и параметра  $\eta$ , при которых ширины ДЗС резко уменьшаются, хотя и не так сильно как в случае гармонической модуляции. Например, при  $\epsilon = 0.026, \eta = 100$  коэффициент влияния равен 0.02, при  $\epsilon = 0.066, \eta = 200$  он составляет 0.011 (ср. с комментарием к рис.3).

При  $M = 8$  зависимости коэффициента влияния от глубины модуляции, представленные на рис.6, существенно изменятся. Важно, что ширины ДЗС уменьшаются значительно при меньших  $\eta$ : при  $\epsilon = 0.021, \eta = 100$  коэффициент влияния равен 0,0009, при  $\epsilon = 0.027, \eta = 200$

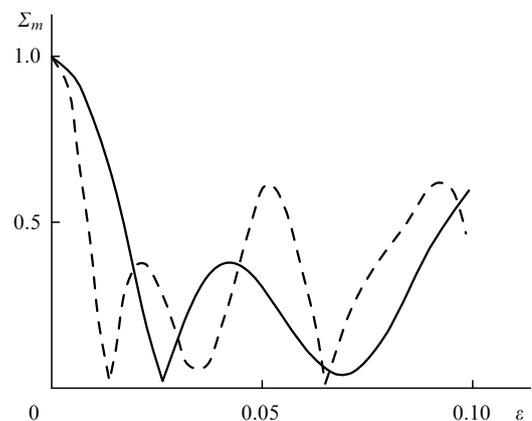


Рис.5. Зависимости коэффициента влияния  $\Sigma_m(Q, \eta, \epsilon)$  от глубины модуляции  $\epsilon$  для низших ДЗС ( $m = 0, 1$ ) при  $\eta = 100$  (сплошная кривая) и 200 (штриховая кривая),  $M = 4, Q = 5$ .

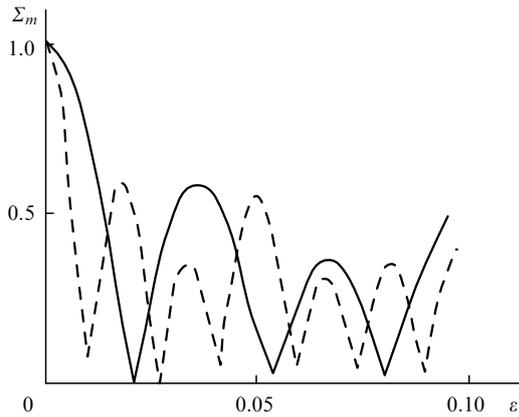


Рис.6. Зависимости коэффициента влияния  $\Sigma_m(Q, \eta, \varepsilon)$  от глубины модуляции  $\varepsilon$  для низших ДЗС ( $m = 0, 1$ ) при  $\eta = 100$  (сплошная кривая) и 200 (штриховая кривая),  $M = 4, Q = 5$ .

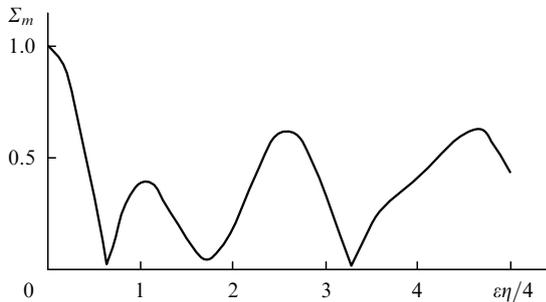


Рис.7. Зависимость коэффициента влияния  $\Sigma_m(Q, \eta, \varepsilon)$  от  $\varepsilon\eta/4$  при  $M = 4, \eta = 200, m = 0$  и 1.

он составляет 0.005. Из сравнения рис.7 и 3 следует, что переход к модуляции «мягким» меандром в целом ухудшает возможности воздействия на ДЗС: уменьшается число возможных значений параметра  $\varepsilon\eta/4$ , при которых коэффициент влияния минимален, а его значения становятся существенно больше, чем в случае гармонической модуляции (более чем в 15 раз для наилучших результатов).

Конечно, приведенные в данной работе зависимости не исчерпывают всех возможных вариантов, но выполненные нами многочисленные эксперименты свидетельствуют о сохранении качественных закономерностей.

## 5. Выводы

Предложенная методика позволяет выявить основные особенности выходной характеристики КЛ с периодической подставкой. В частности, приведены общие выражения для ширин ДЗС (на частотах, кратных основной частоте подставки) при любых видах модуляции периодической подставки и в рамках принятых допущений (спектр подставки должен быть сосредоточен в окрестности частоты несущей). Однако при этом не накладываются существенных ограничений на положение этой час-

тоты относительно  $\Omega_{st}$ . Ширины ДЗС в принятом приближении зависят не от положения первой зоны относительно ПСС, а только от величины  $\eta = \Omega_m/v_c = \sigma/\alpha \gg 1$ , что делает развитую теорию пригодной в той области параметров, где неприменим метод усреднения. Ширины ДЗС определяются величиной  $M = v_c/v_m$ . В предельном случае отсутствия модуляции ( $\varepsilon = 0$ ) можно чисто формально проводить усреднение по периоду  $T_m = M2\pi/v_c = 2\pi/v_m$  (понимая под  $v_m$  некоторую достаточно низкую частоту, соответствующую выбранному периоду усреднения).

Общая теория использовалась при расчетах для двух видов модуляции гармонической несущей. Исследовались только те зоны, которые расположены при  $\Delta\Omega$ , близких к частотам, кратным частоте несущей  $v_c$ . Более подробный анализ позволяет оценить ширины и тех зон, которые лежат в окрестности частот, кратных частоте модуляции  $v_m$ , однако их ширины несоизмеримо меньше ширин зон первого типа, поэтому мы ограничились исследованием только последних.

Установлено (по отношению ширин ДЗС без модуляции и при ее наличии), что модуляция в равной степени влияет на ширины всех ДЗС вне зависимости от их порядка. Влияние подставки определяется параметром  $\varepsilon\eta = \varepsilon\Omega_m/v_c$ , т. е. превышением амплитудой огибающей частоты несущей.

Выбранные в качестве примера виды подставки демонстрируют возможности методики и позволяют апробировать ее в эксперименте. Однако методика пригодна и для исследования более сложных видов модуляции подставки указанного выше типа.

1. Климонтович Ю.Л., Курятов В.Н., Ланда П.С. *ЖЭТФ*, **51**, 3 (1966).
2. Зейгер С.Г., Климонтович Ю.Л., Ларионцев Е.Г., Ланда П.С., Фрадкин Э.Е. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (М.: Наука, 1974, гл. VII).
3. Курятов В.Н., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **11**, 1839 (1968).
4. Круглик Г.С. *К теории биений в кольцевом ОКГ* (Минск: Наука и техника, 1967, с. 102).
5. Судаков В.Ф. *ЖПС*, **23**, 617 (1975).
6. Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Чернобровкин Г.А. *Радиотехника и электроника*, **13**, 2026 (1968).
7. Хошев И.М. *Радиотехника и электроника*, **22**, 135 (1977).
8. Хошев И.М. *Квантовая электроника*, **7** (5), 953 (1980).
9. Бирман А.Я., Наумов П.Б., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н. *Квантовая электроника*, **13** (8), 1638 (1986).
10. Найда О.Н. *Радиотехника и электроника*, **34**, 162 (1989).
11. Найда О.Н., Руденко В.В. *Квантовая электроника*, **16** (7), 1308 (1989).
12. Голяев Ю.Д., Телегин Г.И., Толстенко К.А., Яременко С.А. *Электронная техника. Сер. 11. Лазерная техника и оптоэлектроника*, вып. 3 (55), 17 (1990).
13. Федорюк М.В. *Асимптотика: интегралы и ряды* (М.: Наука, 1987, с. 544).
14. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана (М.: Наука, 1979, с. 807).