

Взаимодействие пробного импульса с «одетым» бозе-эйнштейновским конденсатом разреженных атомарных газов

Н.И.Шамров

Предложены полуклассические уравнения взаимодействия пробного импульса с «одетым» бозе-эйнштейновским конденсатом (БЭК) разреженного атомарного газа. Получено аналитическое решение этих уравнений в случае импульсов малой интенсивности. Найдены условия возникновения дифракционной решетки из атомов отдачи. Предсказано существование индуцированного сверхизлучения на частоте пробного пучка. Определена скорость распространения импульса в конденсате в зависимости от его энергии. Оценены пределы применимости двухуровневой модели «одетого» атома.

Ключевые слова: «одетый» бозе-эйнштейновский конденсат, дифракционная решетка атомов отдачи, замедление пробного импульса, индуцированное сверхизлучение, многократное возбуждение атомов.

1. Введение

В последнее время объектом пристального внимания многих исследователей стали оптические явления, возникающие при взаимодействии лазерного излучения с бозе-эйнштейновским конденсатом (БЭК) различных веществ [1–20]. Такой интерес обусловлен наличием у БЭК двух принципиально важных свойств: большого (сотни микросекунд) времени поперечной релаксации наведенного дипольного момента в атомах и предельно низких (единицы см/с) скоростей их теплового движения. Эти свойства проявляются по-разному в зависимости от геометрии среды, интенсивности излучения и т. д. [3–6].

В настоящей работе рассматривается эксперимент по взаимодействию конденсата паров натрия, заключенного в магнитную ловушку диаметром 20 мкм и длиной 200 мкм и содержащего несколько миллионов атомов, с двумя лазерными пучками – «одевающим» и пробным [5]. Частота одевающего пучка смещена в красную сторону относительно резонансной частоты перехода $3S_{1/2}$, $F = 1 \rightarrow 3P_{3/2}$, $F = 0, 1, 2$ на 1.7 ГГц, а частота пробного, в свою очередь, меньше частоты одевающего на 91 кГц. Оба пучка лежат в плоскости, перпендикулярной оси вытянутости конденсата, и пересекают друг друга под углом 135° . Основным результатом эксперимента состоит в обнаружении усиления интенсивности пробного пучка при включенном одевающем. Усиление наиболее заметно для относительно слабого пробного пучка. По мере роста его мощности оно падает и, когда интенсивности пучков становятся сопоставимыми, сменяется затухающими осцилляциями. При относительно высокой интенсивности одевающего пучка зафиксировано остаточное излучение на частоте пробного после прекращения облучения им конденсата. Кроме того, наблюдалось запаз-

дывание пробного импульса на выходе, что интерпретировалось как уменьшение групповой скорости света.

При описании взаимодействия лазерного бипучка с конденсатом преимущественно используется полуклассический подход [5, 19, 20]. К настоящему времени найдены основные закономерности усиления интенсивности пробного излучения [5, 19, 20]. Кроме того, удалось качественно объяснить природу замедления пробных импульсов [5, 19] и установить причины существования остаточного пробного излучения [5].

Целью настоящей работы является количественный анализ двух последних эффектов и оценка пределов применимости двухуровневой модели «одетого» атома, использованной при их описании. Кроме того, ставится задача выяснения условий многократного возбуждения атомов и, прежде всего, условий заселения состояний, отвечающих переизлучению фотонов из пробной волны в одевающую.

2. Уравнения модели

Поскольку взаимодействие лазерного бипучка с атомом является квазирезонансным, рассматриваем его как систему с двумя электронными состояниями с волновыми функциями ϕ_a (основное состояние) и ϕ_b (возбужденное состояние). В процессе переизлучения атом получает импульс отдачи. Пренебрегая конечностью размеров ловушки, возникшее поступательное движение атома с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ описываем волной де-Бройля. Соответствующую волновую функцию атома представим в виде

$$|s; \mathbf{k}\rangle = \frac{1}{V^{1/2}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\phi_s \quad (s = a, b), \quad (1)$$

где V – объем конденсата.

Волновую функцию Ψ атома в произвольном состоянии зададим разложением

$$\Psi = \sum_{s=a,b;\mathbf{k}} c_{s,\mathbf{k}} |s; \mathbf{k}\rangle, \quad (2)$$

Н.И.Шамров. Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Институт физики и химии, Россия, 430000 Саранск, ул. Большевикская, 68а; e-mail: nik_shamrov@mail.ru.

Поступила в редакцию 5 марта 2007 г., после доработки – 28 мая 2007 г.

где $c_{s,k}$ – зависящие от времени коэффициенты разложения. Заметим, что в выбранном нами базисе (1) зависимость от времени содержат также и электронные волновые функции ϕ_s (в форме временного фазового множителя $\exp(-i\omega_s t)$, где $\hbar\omega_s$ – электронная энергия атома в состоянии s).

Полное лазерное поле представим в виде суперпозиции полей одевающей (E_d) и пробной (E_p) волн, распространяющихся перпендикулярно направлению вытянутости конденсата (ось z) и образующих между собой (в плоскости xy) угол 135° :

$$E = i \sum_{f=d,p} E_f \exp(-i\omega_f t + i\mathbf{k}_f \mathbf{r}) + \text{компл. сопр.} \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{k}_d = k_d(\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$; $\mathbf{k}_p = k_p \mathbf{j}$; k_d, k_p – волновые числа; \mathbf{i} и \mathbf{j} – единичные орты по осям x и y соответственно. Поляризацию всех волн будем считать направленной вдоль оси z .

Используя метод вращающейся волны, в дипольном приближении можно получить следующие уравнения для коэффициентов $c_{s,k}$ и амплитуд E_f средних по конденсату полей [20]:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{a,k} &= \frac{d}{\hbar} [\bar{E}_d c_{b,k+k_d} + \bar{E}_p \exp(-i\delta\omega t) c_{b,k+k_p}] \\ &\times \exp(-i\Delta\omega t) - i\omega_k c_{a,k}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{b,k} &= -\frac{d}{\hbar} [E_d c_{a,k-k_d} + E_p \exp(-i\delta\omega t) c_{a,k-k_p}] \\ &\times \exp(i\Delta\omega t) - i\left(\frac{\Gamma_R}{2} + \omega_k\right) c_{b,k}, \end{aligned}$$

$$\frac{D}{2c} \dot{E}_p = E_p^c - E_p + \frac{\hbar}{d\tau_R} \exp[-i(\delta\omega + \Delta\omega t)] \sum_{k'-k=k_p} \bar{c}_{a,k} c_{b,k'}, \quad (5)$$

$$\frac{D}{2c} \dot{E}_d = E_d^c - E_d + \frac{\hbar}{d\tau_R} \exp(-i\Delta\omega t) \sum_{k'-k=k_p} \bar{c}_{a,k} c_{b,k'}, \quad (6)$$

где E_d^c, E_p^c – амплитуды полей одевающего и пробного лучей на входе в конденсат; $\Delta\omega = \omega_{ba} - \omega_d$ – расстройка электронного резонанса; $\delta\omega = \omega_d - \omega_p$ – разность частот одевающей и пробной волн; Γ_R – вероятность спонтанного распада возбужденного электронного состояния атома; $\hbar\omega_k$ – кинетическая энергия отдачи атома, обладающего импульсом $\hbar\mathbf{k}$; d – матричный элемент дипольного момента перехода; $\tau_R = c\hbar/(\pi\omega_d d^2 N_0 D)$ – сверхизлучательное время; N_0 – концентрация атомов; D – поперечный размер конденсата; $\omega_{ba} = \omega_b - \omega_a$; черта означает комплексное сопряжение.

Заметим, что амплитуды полей E_d и E_p изменяются в конденсате по линейному закону, поэтому разность их значений на выходе и входе в два раза больше их средних значений.

В экспериментах по взаимодействию лазерного излучения с бозе-эйнштейновским конденсатом щелочных металлов [3–6] частота Раби много меньше расстройки резонанса. Следовательно, амплитуду возбужденного электронного состояния можно представить в виде $c_{b,k} = C_{b,k} \exp(i\Delta\omega t)$, где $C_{b,k}$ – медленно меняющаяся функция

времени [14]. В этом случае ее производной по времени можно пренебречь, выразить ее из второго уравнения (4) и подставить в оставшиеся уравнения. В результате для $C_{a,k} = c_{a,k}$ и амплитуд полей E_d, E_p получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{a,k} &= \frac{d^2(i-v)}{\hbar^2 \Delta\omega} [(E_p|^2 + |E_d|^2) C_{a,k} + E_d \bar{E}_p \exp(-i\delta\omega t) \\ &\times C_{a,k+k_p-k_d} + E_p \bar{E}_d \exp(i\delta\omega t) C_{a,k+k_d-k_p}] - i\omega_k C_{a,k}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2c} \dot{E}_p &= E_p^c - E_p + \frac{i-v}{\Delta} \sum_k [|C_{a,k}|^2 E_p \\ &+ \exp(-i\delta\omega t) \bar{C}_{a,k} C_{a,k+k_p-k_d} E_d], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2c} \dot{E}_d &= E_d^c - E_d + \frac{i-v}{\Delta} \sum_k [|C_{a,k}|^2 E_d \\ &+ \exp(i\delta\omega t) \bar{C}_{a,k} C_{a,k+k_d-k_p} E_p], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta = \Delta\omega\tau_R$; $v = \Gamma_R/2\Delta\omega$.

Введем преобразование полей $E_f \rightarrow E_f \exp(2ict/D\Delta)$ ($f = d, p$). Тогда уравнение (7) останется неизменным, а (8), (9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D}{2c} \dot{E}_p &= E_p^c - E_p - \frac{i}{\Delta} \left(1 - \sum_k |C_{a,k}|^2\right) E_p \\ &+ \frac{i-v}{\Delta} \exp(-i\delta\omega t) \sum_k \bar{C}_{a,k} C_{a,k+k_p-k_d} E_d, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2c} \dot{E}_d &= E_d^c - E_d - \frac{i}{\Delta} \left(1 - \sum_k |C_{a,k}|^2\right) E_d \\ &+ \frac{i-v}{\Delta} \exp(i\delta\omega t) \sum_k \bar{C}_{a,k} C_{a,k+k_d-k_p} E_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь учтено, что в условиях эксперимента $v \sum_k |C_{a,k}|^2 \ll \Delta$.

Приняв феноменологическую модель релаксации, можно записать следующую систему уравнений для элементов матрицы плотности $R_{k,k',k''} = C_{a,k} \bar{C}_{a,k'} = R_{k,k'}$ и амплитуд средних полей E_d, E_p :

$$\begin{aligned} \dot{R}_{k,k'} &= \frac{d^2(i-v)}{\hbar^2 \Delta\omega} [E_d \bar{E}_p \exp(-i\delta\omega t) R_{k-k_d+k_p,k'} + E_p \bar{E}_d \\ &\times \exp(i\delta\omega t) R_{k+k_d-k_p,k'}] - \frac{d^2(i+v)}{\hbar^2 \Delta\omega} \\ &\times [E_d \bar{E}_p \exp(-i\delta\omega t) R_{k'+k_d-k_p,k} + E_p \bar{E}_d \exp(i\delta\omega t) \bar{R}_{k'-k_d+k_p,k}] \\ &- \left[i\omega_{k,k'} + \Gamma_{k,k'} + \frac{vd^2}{\hbar^2 \Delta\omega} (|E_p|^2 + |E_d|^2) \right] R_{k,k'}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2c} \dot{E}_p &= E_p^c - E_p - \frac{i}{\Delta} \left(1 - \sum_k R_{k,k}\right) E_p \\ &+ \frac{i-v}{\Delta} \exp(-i\delta\omega t) \sum_k R_{k+k_p-k_d,k} E_d, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2c} \dot{E}_d = E_d^c - E_d - \frac{i}{\Delta} \left(1 - \sum_k R_{k,k} \right) E_d \\ + \frac{i-v}{\Delta} \exp(i\delta\omega t) \sum_k R_{k+k_d-k_p, k} E_p, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Gamma_{k,k'}$ – скорости поперечной релаксации; $w_{k,k'} = w_k - w_{k'}$ – частоты многофотонных переходов.

Легко видеть, что в пренебрежении спонтанным рэлеевским рассеянием ($v = 0$) сумма $\sum_k |C_{a,k}|^2 = 1$ и третье слагаемое в уравнениях (10), (11), (13) и (14) обращается в нуль.

Поскольку при взаимодействии атома с электромагнитной волной имеет место закон сохранения импульса, импульс атома в состоянии $|a, k\rangle$ можно представить в следующем виде:

$$p = \hbar k = \hbar m(k_d - k_p), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При поглощении фотона с волновым вектором k_d и испускании фотона с волновым вектором k_p число n увеличивается, а при обратном процессе – уменьшается на единицу.

Сделаем замену $|a, k\rangle \rightarrow \Psi_n$, $R_{k,k'} \rightarrow R_{m,n}$, $w_{k,k'} \rightarrow w_{m,n}$, $\Gamma_{k,k'} \rightarrow \Gamma_{m,n}$ и введем преобразование элементов матрицы плотности $R_{m,n} \rightarrow R_{m,n} \exp[i(n-m)\delta\omega t]$. Тогда в уравнениях (12)–(14) сомножители типа $\exp(i\delta\omega t)$ исчезнут. Кроме того, перейдем к безразмерным единицам для времени и амплитуд полей [20]: $\tau = t/\tau_{\text{amp}}$, $e_f = E_f/E_{\text{max}}$ ($f = d, p$), где $\tau_{\text{amp}} = \Delta\omega\hbar^2/(d^2E_{\text{max}}^2)$ – характерный временной масштаб, E_{max} – некоторая максимальная амплитуда лазерных полей, использованных в эксперименте. В этом случае уравнения (12)–(14) в явном виде можно будет записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{m,n} = (i-v)(\varepsilon_d \bar{e}_p R_{m-1,n} + \varepsilon_p \bar{e}_d R_{m+1,n}) \\ - (i+v)(\varepsilon_d \bar{e}_p R_{m,n+1} + \varepsilon_p \bar{e}_d R_{m,n-1}) \\ - [i\beta_{m,n} + \gamma_{m,n} + v(|\varepsilon_p|^2 + |\varepsilon_d|^2)] R_{m,n}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\kappa \dot{e}_p = \varepsilon_p^c - \varepsilon_p - \frac{i}{\Delta} \left(1 - \sum_n R_{n,n} \right) \varepsilon_p + \frac{i-v}{\Delta} \sum_n R_{n-1,n} \varepsilon_d, \quad (16)$$

$$\kappa \dot{e}_d = \varepsilon_d^c - \varepsilon_d - \frac{i}{\Delta} \left(1 - \sum_n R_{n,n} \right) \varepsilon_d + \frac{i-v}{\Delta} \sum_n R_{n+1,n} \varepsilon_p. \quad (17)$$

Здесь $\beta_{m,n} = f_{m,n} - (m-n)\delta$ – многофотонная расстройка резонанса; $f_{m,n} = w_{m,n}/\tau_{\text{amp}}^{-1}$; $\delta = \delta\omega/\tau_{\text{amp}}^{-1}$; $\gamma_{m,n} = \Gamma_{m,n}/\tau_{\text{amp}}^{-1}$; $\kappa = D/(2c\tau_{\text{amp}})$; $w_{m,n} = p^2/(2M\hbar) = (1 + \sqrt{2})\hbar k_d^2(m^2 - n^2) \times (2M)^{-1}$; M – масса атома.

Считаем, что вначале

$$R_{0,0}(0) = 1, \quad R_{m,n}(0) = 0 \quad (18)$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l; m = n \neq 0),$$

где l – максимальная кратность возбуждения атомов конденсата. Легко видеть, что число уравнений в системе (15)–(17) равно $(2l+1)(l+1) + 2$.

Оценим значения параметров, входящих в уравнения (15)–(17), например для условий эксперимента [5]. Пусть $E_{\text{max}} = 1.45 \times 10^{-2}$ ед. СГС (амплитуда поля при интен-

сивности лазерного излучения 100 мВт/см^2). Поскольку $d = 0.52 \times 10^{-17}$ ед. СГС (эффективный дипольный момент) и $\Delta\omega = 1.07 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, то характерное время $\tau_{\text{amp}} = 2.10 \times 10^{-6}$ с и единица энергии $\hbar\tau_{\text{amp}}^{-1} = 0.50 \times 10^{-21}$ эрг. Пусть полное число атомов в конденсате $N = 4 \times 10^6$. Тогда при $L = 200 \text{ мкм}$ и $D = 20 \text{ мкм}$ концентрация атомов в конденсате $N_0 = 1.60 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Так как $\omega_d = 3.20 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$, то $\tau_R = 0.37 \times 10^{-8}$ с, а $\Gamma_R = 0.63 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$. В результате поглощения фотона с длиной волны $\lambda = 589 \text{ нм}$ кинетическая энергия атома $W_0 = 1.60 \times 10^{-22}$ эрг. Таким образом, в условиях эксперимента характерная ширина лазерного импульса (100 мкс) и пиковое значение поля в нем (плотность потока 5 мВт/см^2) составят приблизительно $47.6\tau_{\text{amp}}$ и $0.22E_{\text{max}}$, константы $-v = 0.29 \times 10^{-2}$, $\Delta = 9.95$, $\delta = 1.20$, а энергия $W_0 = 0.32\hbar\tau_{\text{amp}}^{-1}$.

3. Протяженные импульсы в «одетом» конденсате

Пусть облучение конденсата производится импульсами длительностью

$$t_f \gg \frac{1}{\delta\omega}, \quad \frac{1}{w_{m,n}} \quad (f = p, d; m \neq n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l). \quad (19)$$

Тогда вероятность перехода $0 \rightarrow -1$ ничтожно мала и ею можно пренебречь. Кроме того, если одевающая волна не очень интенсивна [20], повторное возбуждение атомов ею можно также не учитывать. В этой ситуации актуальными будут лишь два состояния -0 и 1 . Именно такие условия реализуются в эксперименте [5]. Поэтому ограничимся здесь рассмотрением уравнений (15)–(18) при $m, n = 0, 1$. В этом случае, пренебрегая влиянием спонтанного рэлеевского рассеяния (полагая $v = 0$) на динамику конденсата и запаздыванием излучения в нем ($\kappa \dot{e}_f \ll e_f$), имеем

$$\dot{R}_{0,0} = i\varepsilon_p \bar{e}_d R_{1,0} - i\bar{e}_p \varepsilon_d \bar{R}_{1,0}, \quad (20)$$

$$\dot{R}_{1,1} = i\bar{e}_p \varepsilon_d \bar{R}_{1,0} - i\varepsilon_p \bar{e}_d R_{1,0}, \quad (21)$$

$$\dot{R}_{1,0} = i\bar{e}_p \varepsilon_d R_{0,0} - i\bar{e}_p \varepsilon_d \bar{R}_{1,1} - (i\beta + \gamma) R_{1,0}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^c + \frac{i}{\Delta} \bar{R}_{1,0} \varepsilon_d, \quad (23)$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_d^c + \frac{i}{\Delta} R_{1,0} \varepsilon_p, \quad (24)$$

где $\beta = \beta_{1,0}$; $\gamma = \gamma_{1,0}$. Амплитуды $\varepsilon_p^{\text{out}}$, $\varepsilon_d^{\text{out}}$ полей на выходе можно получить из соответствующих выражений (23), (24), если в каждом из них второе слагаемое увеличить вдвое.

Во второй части эксперимента работы [5] волна на частоте ω_d падала на конденсат непрерывно, так что $E_d^c(t) = E_d^0 = \text{const}$ на протяжении всего времени облучения. Конденсат в этих условиях назовем «одетым».

Рассмотрим вначале взаимодействие «одетого» конденсата с пробным импульсом прямоугольной формы:

$$E_p^c(t) = \begin{cases} E_p^0, & 0 \leq t \leq t_p, \\ 0, & t < 0, t > t_p \end{cases} \quad (25)$$

где E_p^0 и t_p – амплитуда и длительность пробного импульса.

Пусть доля атомов, получивших импульс отдачи, мала. Тогда $R_{0,0} \approx 1$ и вторым слагаемым в уравнении (22) можно пренебречь:

$$\dot{R}_{1,0} = i\bar{\epsilon}_p \epsilon_d - (i\beta + \gamma)R_{1,0}. \quad (26)$$

Кроме того, будем считать истощение одевающего пучка незначительным, т. е. примем $E_d \approx E_d^0$. В этом случае система уравнений (23), (26) имеет следующее аналитическое решение:

$$R_{1,0}(\tau) = \frac{i\epsilon_d^0 \bar{\epsilon}_p^0}{\alpha - i\beta} \times \begin{cases} [\exp(\alpha - i\beta)\tau - 1], & \tau \leq \tau_p, \\ [\exp(\alpha - i\beta)\tau_p - 1] \exp[(\alpha - i\beta)(\tau - \tau_p)], & \tau > \tau_p, \end{cases} \quad (27)$$

$$\epsilon_p(\tau) = \epsilon_p^0 \times \begin{cases} 1 + \frac{g(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} [\exp(\alpha - i\beta)\tau - 1], & \tau \leq \tau_p, \\ \frac{g(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} [\exp(\alpha + i\beta)\tau_p - 1] \exp[(\alpha + i\beta)(\tau - \tau_p)], & \tau > \tau_p. \end{cases} \quad (28)$$

Подставим теперь выражения (27), (28) в уравнение (21). Интегрируя его, можно найти приближенное решение для диагонального элемента матрицы плотности

$$R_{1,1}(\tau) = \frac{2|\epsilon_p^0|^2 |\epsilon_d^0|^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{\exp \alpha \tau}{\alpha^2 + \beta^2} [2\gamma\beta \sin \beta \tau - (\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \beta^2) \times \cos \beta \tau] + \frac{g}{2\alpha} \exp 2\alpha \tau + \gamma \tau + 1 - \frac{g}{2\alpha} + \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} \right\}, \quad \tau \leq \tau_p, \quad (29)$$

$$R_{1,1}(\tau) = R_{1,1}(\tau_p) + \frac{2\text{Re}(\epsilon_p^0) |\epsilon_d^0|^2 g}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \times (\exp 2\alpha \tau - 2 \exp \alpha \tau \cos \beta \tau + 1) \{ \exp[2\alpha(\tau - \tau_p)] - 1 \}, \quad \tau > \tau_p.$$

Аналогично можно получить выражение для амплитуды поля рассеянного одевающего излучения:

$$\epsilon_s(\tau) = \epsilon_d(\tau) - \epsilon_d^0 = \frac{-\epsilon_d^0 |\epsilon_p^0|^2}{\Delta(\alpha^2 + \beta^2)} \begin{cases} (\alpha + i\beta) [\exp(\alpha + i\beta)\tau - 1] \left\{ 1 + \frac{g(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} [\exp(\alpha + i\beta)\tau - 1] \right\}, & \tau \leq \tau_p, \\ g(\exp 2\alpha \tau_p - 2 \exp \alpha \tau_p \cos \beta \tau_p + 1) \exp[2\alpha(\tau - \tau_p)], & \tau > \tau_p. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь $\tau_p = t_p/\tau_{\text{amp}}$; $\epsilon_f^0 = E_f^0/E_{\text{max}}$ – безразмерные пиковые значения амплитуд полей бипучка ($f = d, p$) на входе в конденсат; $\alpha = g - \gamma$; $g = |\epsilon_d^0|^2/\Delta$; $\beta \tau = (w - \delta\omega)t$; $(g - \gamma)\tau = (G - \Gamma)t$; $w = w_{1,0}$ – частота перехода $1 - 0$; $\Gamma = \Gamma_{1,0}$ – скорость поперечной релаксации элемента $R_{1,0}$; $G = g/\tau_{\text{amp}} = 3NR_d/Sk_d^2$ – усиление пробного излучения в единицу времени; R_d – скорость рэлеевского рассеяния одевающего пучка; S – площадь сечения конденсата, перпендикулярного направлению распространения этого пучка.

Из решений (27), (29) следует, что при точном двухфотонном резонансе к моменту выключения пробного пучка в конденсате формируется динамическая решетка атомов, движущихся в одном и том же направлении и с

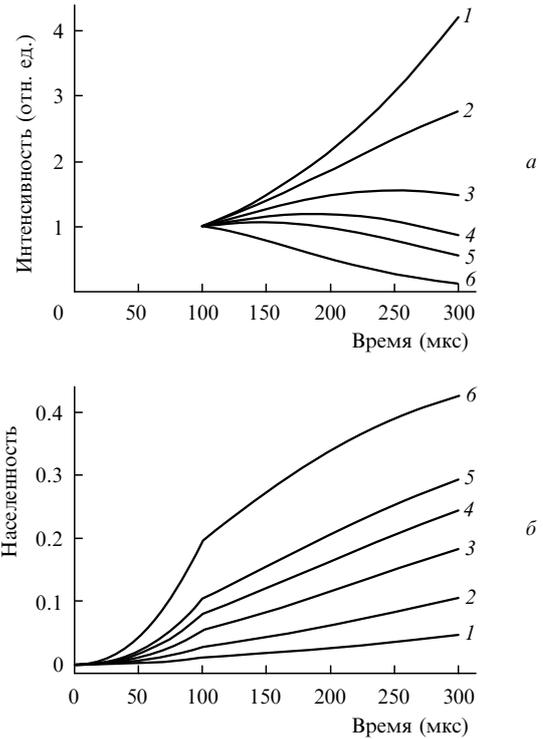


Рис.1. Интерференция света на решетке атомов отдачи, возникающей при облучении конденсата брэгговским импульсом прямоугольной формы с длительностью 100 мкс и интенсивностью $I_p^0 = 0.002$ (1), 0.005 (2), 0.01 (3), 0.015 (4), 0.02 (5) и 0.04 мВт/см² (6); а – интенсивность дифрагировавшего излучения, нормированная на ее значение при $t = t_p$, б – населенность возбужденного уровня. Скорость поперечной релаксации $0.5 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, интенсивность одевающего пучка 20 мВт/см².

одной и той же скоростью. Поскольку одевающее излучение непрерывно, то на временах $t > t_p$ оно будет дифрагировать на этой решетке. Для $G < \Gamma$, как следует из формулы (30), интенсивность дифрагировавшего света I_s ($I_s \sim |\epsilon_s|^2$) будет убывать, причем тем быстрее, чем больше разность $\Gamma - G$. Это означает, что при низкой интенсивности одевающего пучка возникшая динамическая решетка с течением времени разрушается. Критичной с этой точки зрения является ситуация, когда $G = \Gamma$.

В случае значительной мощности одевающего излучения, когда $G > \Gamma$, вероятность его рассеяния возрастает

с течением времени. Однако это справедливо не всегда. Как показывают результаты численных решений полной системы уравнений (20)–(24) (рис.1), по мере роста отношения I_p^0/I_d^0 , сопровождаемого увеличением числа атомов отдачи, рост вероятности рассеяния замедляется и при переходе примерно 10 % атомов на уровень 1 прекращается совсем. При еще больших значениях отношения I_p^0/I_d^0 величина I_s с течением времени уменьшается. Таким образом, дополнительным фактором, влияющим на возможность существования динамической решетки атомов отдачи, является степень нелинейности процесса взаимодействия пробного импульса с «одетым» БЭК, задаваемая величиной I_p^0/I_d^0 .

При $G > \Gamma$ интенсивность рассеянного одевающего излучения тем выше, чем меньше параметр I_p^0/I_d^0 (см. рис.1). Поскольку $\hbar\omega_p \ll \hbar\omega_d$, то рассеянная энергия сосредотачивается преимущественно в р-моду. Можно добиться такого положения, при котором интенсивность пробной волны за счет решеточной генерации будет многократно превышать входную. В этих условиях отключение лазера на частоте ω_p практически не скажется на динамике пробного импульса – на этой частоте наступит режим сверхизлучения. Роль импульса E_p^s (см. (25)) будет сводиться лишь к наведению в конденсате малой поляризации, величина которой следует из формулы (27):

$$R_{1,0}(\tau_p) = \frac{i\varepsilon_d^0 \bar{\varepsilon}_p^0}{\alpha - i\beta} [\exp(\alpha - i\beta)\tau_p - 1]. \quad (31)$$

Пусть одевающее поле очень сильное, так что $G \gg \Gamma$. Тогда, опуская на временах $t > t_p$ первый член в правой части (24) и подставляя это выражение в формулы (20)–(22), получаем следующие уравнения:

$$\dot{R} = -2gZR - i\beta R, \quad (32)$$

$$\dot{Z} = 2g|R|^2, \quad (33)$$

где $Z = R_{1,1} - R_{0,0}$; $R = 2R_{1,0}$.

Уравнения (32), (33) имеют интеграл движения

$$|R(\tau)|^2 + Z(\tau)^2 = |R(\tau_p)|^2 + Z(\tau_p)^2 = 1. \quad (34)$$

Используя его, можно легко получить решение этих уравнений:

$$Z(\tau) = \tanh \frac{\tau - \tau_p - \tau_0}{\tau_s},$$

$$R(\tau) = \operatorname{sech} \frac{\tau - \tau_p - \tau_0}{\tau_s} \exp[-i\beta(\tau - \tau_p)],$$

где

$$\tau_0 = -\frac{\tau_s}{2} \ln \left[\frac{1 + Z(\tau_p)}{1 - Z(\tau_p)} \right]; \quad (35)$$

$\tau_s = \frac{1}{2}g$.

Если $|R(\tau_p)| \ll 1$, то $Z(\tau_p) = -[1 - |R(\tau_p)|^2]^{1/2} \approx -1 + 0.5|R(\tau_p)|^2$ и $\tau_0 \approx -\tau_s \ln |R_{1,0}(\tau_p)|$.

Таким образом, в случае $G \gg \Gamma$, когда фазовую релаксацию можно не учитывать, уравнения (20)–(24) имеют решение

$$R_{1,0}(\tau) = \frac{i\varepsilon_d^0 \bar{\varepsilon}_p^0}{g - i\beta} \times \begin{cases} [\exp(g - i\beta)\tau - 1], & \tau \leq \tau_p, \\ \frac{1}{2} \operatorname{sech} \frac{\tau - \tau_p - \tau_0}{\tau_s} \exp[-i\beta(\tau - \tau_p)], & \tau > \tau_p, \end{cases} \quad (36)$$

$$Z(\tau) = \begin{cases} \frac{4|\varepsilon_p^0|^2 |\varepsilon_d^0|^2}{g^2 + \beta^2} (\exp 2g\tau - 2 \exp 2g\tau \cos \beta\tau + 1) - 1, & \tau \leq \tau_p, \\ \tanh \frac{\tau - \tau_p - \tau_0}{\tau_s}, & \tau > \tau_p, \end{cases} \quad (37)$$

$$\varepsilon_p(\tau) = \begin{cases} \varepsilon_p^0 \left\{ 1 + \frac{g(g - i\beta)}{g^2 + \beta^2} [\exp(g + i\beta)\tau - 1] \right\}, & \tau \leq \tau_p, \\ \frac{i\varepsilon_d^0}{2\Delta} \operatorname{sech} \frac{\tau - \tau_p - \tau_0}{\tau_s} \exp[i\beta(\tau - \tau_p)], & \tau > \tau_p. \end{cases} \quad (38)$$

Из приведенных формул видно, что в момент времени $\tau = \tau_p$ недиагональный элемент матрицы плотности $R_{1,0}(\tau)$ и разность населенностей $Z(\tau)$ непрерывны, но поле $\varepsilon_p(\tau)$ претерпевает разрыв. Причем, как уже указывалось ранее, чем меньше I_p^0 и чем больше I_d^0 , тем меньший скачок оно испытывает.

Таким образом, при $I_p^0 \ll I_d^0$ и слабой фазовой релаксации излучение в р-моду формируется в виде колоколообразного импульса с шириной τ_s и временем задержки τ_0 (относительно момента времени τ_p).

Если усиление G не столь велико и превышает скорость Γ лишь в несколько раз, то, как показывают результаты численного решения полной системы уравнений (20)–(24), основные черты генерации пробного излучения остаются прежними (рис.2). В частности, ширина и пиковая интенсивность пробного импульса не зависят от его входной энергии, а время задержки убывает с ее ростом. Между тем время задержки и длительность этого импульса обратно пропорциональны, а его максимальная интенсивность – прямо пропорциональна мощности одевающего излучения.

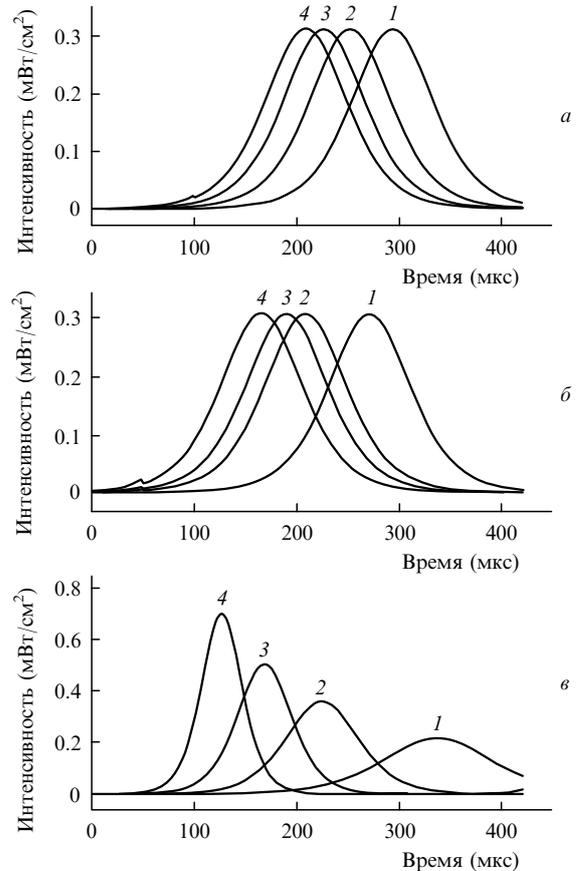


Рис.2. Форма импульса индуцированного сверхизлучения при длительности затравочного импульса $t_p = 10$ (1), 25 (2), 50 (3), 100 мкс (4) (а), его интенсивности $I_p^0 = 0.00005$ (1), 0.0002 (2), 0.0004 (3), 0.001 мВт/см² (4) (б), а также интенсивности излучения одевающего лазера $I_d^0 = 40$ (1), 55 (2), 70 (3) и 90 мВт/см² (4) (в). Интенсивности пучков: $I_d^0 = 50$ мВт/см² (а, б), $I_p^0 = 0.0001$ мВт/см² (а), длительность импульса $t_p = 50$ (б) и 25 мкс (в).

Для дальнейшего анализа важен спектральный состав пробного излучения. Поэтому здесь будем полагать, что пробный импульс имеет гауссову форму:

$$E_p^c = E_p^0 \exp \left[-2 \ln 2 \left(\frac{t - t_0}{t_p} \right)^2 \right], \quad (39)$$

где t_0 – момент времени достижения пиковой интенсивности I_p^0 ; t_p – ширина импульса на высоте $I_p^0/2$.

В линейном случае, когда доля атомов, получивших импульс отдачи, мала, а истощение одевающей волны незначительно, уравнения (20)–(24) для пробного импульса вида (39), как и для импульса вида (25), допускают аналитическое решение.

В случае точного резонанса для недиагонального элемента матрицы плотности имеем

$$R_{1,0}(\tau) = \frac{i\sqrt{\pi}\varepsilon_d^0 \varepsilon_p^0}{2} \exp \left[a(\tau - \tau_0) - \frac{b^2}{4a^2} \right] \times \left\{ \Phi \left[\frac{a}{2b} + b(\tau - \tau_0) \right] - \Phi \left(\frac{a}{2b} - b\tau_0 \right) \right\}, \quad (40)$$

для амплитуды среднего поля р-моды –

$$\varepsilon_p(\tau) = \varepsilon_p^0 \exp \left[-b^2(\tau - \tau_0)^2 + \frac{\sqrt{\pi}g\varepsilon_p^0}{2} \right] \times \exp \left[a(\tau - \tau_0) - \frac{b^2}{4a^2} \right] \times \left\{ \Phi \left[\frac{a}{2b} + b(\tau - \tau_0) \right] - \Phi \left(\frac{a}{2b} - b\tau_0 \right) \right\}, \quad (41)$$

где $a = \alpha$; $b = (2 \ln 2)^{1/2}/\tau_p$; $\tau_p = t_p/\tau_{amp}$; $\tau_0 = t_0/\tau_{amp}$; $\Phi(t)$ – интегральная функция Пуассона.

Амплитуда пробного поля на выходе ε_p^{out} получается из выражения (41) удвоением второго члена, который всегда положителен. Поэтому максимум интенсивности $I_p \sim |\varepsilon_p^{out}|^2$ совпадает с максимумом амплитуды ε_p^{out} . Причем момент его достижения $t_0^{out} > t_0$. Это означает, что пробный импульс проходит конденсат за конечное время $t_0^{out} - t_0$. Кроме того, $I_p(t_0^{out}) > I_p(t_0)$, т. е. импульс усиливается. Скорость распространения, ширина и усиление пробного импульса в конденсате зависят от его энергии и интенсивности одевающей волны.

Пусть длительность пробного импульса t_p и обратное время линейного усиления $1/G$ меньше или сравнимы с временем поперечной релаксации $T_2 = 1/\Gamma$ для перехода $0-1$. Если интенсивность I_p^0 меньше интенсивности I_d^0 на один-два порядка, прохождение пробного импульса через конденсат сопровождается его незначительным (в несколько раз) усилением, причем тем большим, чем выше интенсивность одевающего пучка (рис.3,а). При этом импульс практически не уширяется. Скорость его распространения с увеличением мощности одевающей волны вначале падает (кривые 1, 2), а затем возрастает (кривые 4, 5). Наименьшая скорость распространения (кривая 3) достигается для значений I_d^0 , при которых примерно около половины атомов переходит из состояния 0 в состояние 1 (рис.3,б). При использованных параметрах задачи эта скорость составила около 1.4 м/с.

Если энергию пробного импульса уменьшить настолько, что отношение I_p^0/I_d^0 составит $\sim 10^{-3}$ и менее,

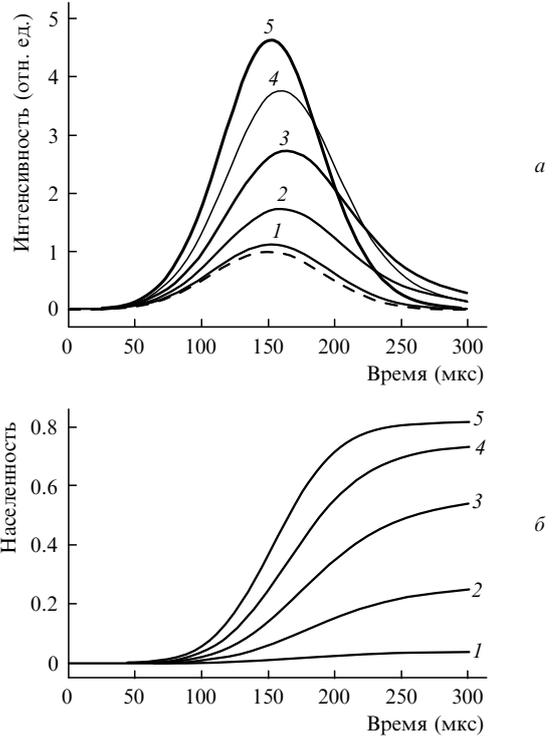


Рис.3. Эволюция импульса гауссовой формы длительностью 100 мкс с пиковой интенсивностью 0.1 мВт/см² (штриховая кривая) (а) и динамика возбуждения атомов в конденсате при $I_d^0 = 1$ (1), 5 (2), 10 (3), 15 (4) и 20 мВт/см² (5) (б). Интенсивности импульсов нормированы на его входное пиковое значение.

то основным фактором, влияющим на его форму, станет решеточная генерация. Она приводит к значительному уширению импульса и существенному увеличению времени его пребывания в конденсате. Причем чем меньше энергия пробного импульса, тем более выраженными становятся эти эффекты. В этих условиях можно наблюдать экстремально большое замедление пробного импульса в «одетом» конденсате. Например, при $I_d^0 = 50$ мВт/см², $I_p^0 = 0.001$ мВт/см² и $t_p = 50$ мкс оно составило примерно 113 мкс (скорость распространения около 0.17 м/с).

4. Короткие импульсы в «одетом» конденсате

До сих пор для описания взаимодействия лазерного бипучка с БЭК использовалась модель атома с двумя состояниями – 0 и 1. Для возбуждения состояний с $n \geq 2$ необходима определенная, высокая мощность одевающего излучения. Соответствующий порог [20]

$$I_{d,th} \approx \frac{1}{8} \left(\frac{c\hbar}{\pi d} \right)^2 \frac{\Delta\omega\delta\omega}{I_p} \quad (42)$$

не зависит от длительности пробного импульса и будет тем ниже, чем выше его интенсивность.

Переходы из состояния 0 в состояние –1, из состояния –1 в состояния –2 и т. д. происходят в результате поглощения фотона из р-моды и его испускания в d-моду. Поскольку для центральных частот $\hbar\omega_p < \hbar\omega_d$, то для возбуждения состояний Ψ_n с $n < 0$ важна не только мощность пробного импульса, но и его спектральная ширина. Поэтому будем считать, что длительность пробного импульса удовлетворяет условию

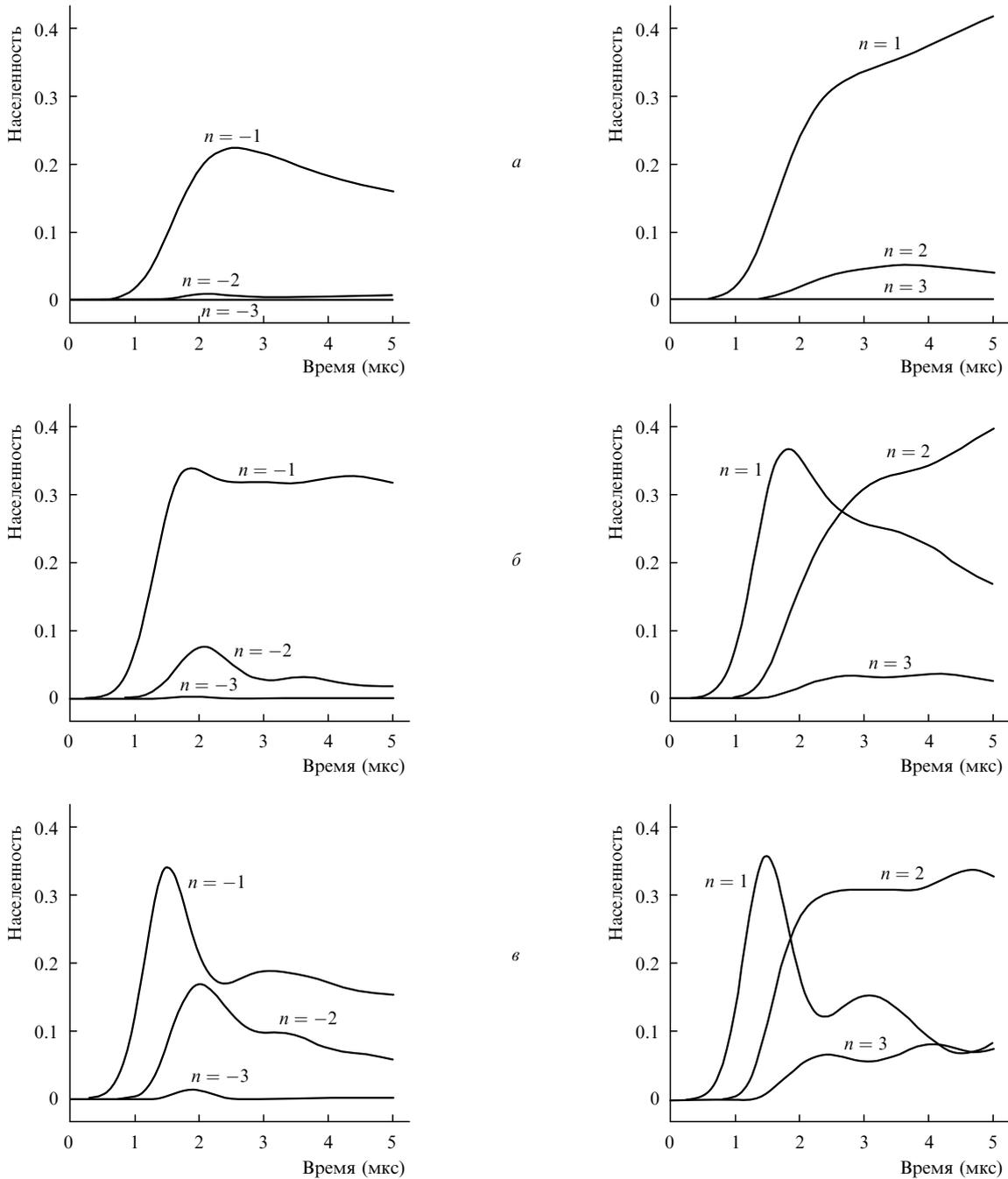


Рис.4. Возбуждение атомных состояний с номерами n высокого порядка под действием одевающего пучка интенсивностью 50 мВт/см^2 и пробного импульса с длительностью 1 мкс и интенсивностью $I_p^0 = 50$ (а, б) и 100 мВт/см^2 (в) при однофотонной расстройке резонанса $\Delta\omega = 0.5 \times 10^{10}$ (а) и $0.25 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ (б, в).

$$t_f \sim \frac{1}{\delta\omega}, \quad \frac{1}{w_{m,n}} \quad (f = p, d; \quad m \neq n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l), \quad (43)$$

а сам импульс имеет гауссову форму (39).

Численное решение системы уравнений (15)–(17), допускающей возможность многократного возбуждения атомов, показывает, что действительно, начиная с некоторых значений τ_p , пробный импульс в присутствии одевающего луча способен вызвать переходы из состояния 0 в состояние -1 . Поскольку уменьшение длительности пробного импульса сопровождается падением его энергии, для ее сохранения необходимо повышать его мощность. Однако даже при $t_p \sim 1 \text{ мкс}$ для интенсивностей $I_d^0, I_p^0 = 50 - 100 \text{ мВт/см}^2$ в состояние -1 переходит всего

лишь несколько процентов атомов. Таким образом, использование слишком коротких импульсов для повышения эффективности возбуждения состояний $-1, -2$ и т. д. не вполне оправданно. Можно предположить, что этого, как и в случае с возбуждением состояний $2, 3$ и т. д., можно добиться за счет уменьшения однофотонной расстройки электронного резонанса $\Delta\omega$. И действительно, расчеты подтвердили это (рис.4). Причем оказалось, что чем ниже $\Delta\omega$ и чем выше отношение I_p^0/I_d^0 , тем большая доля атомов проходит через каскад состояний с отрицательными n .

Отметим, что возбудить состояния с отрицательными n можно также путем понижения двухфотонной атомной расстройки резонанса $\delta\omega$, достигаемого, например,

уменьшением угла между лучами в бипучке либо использованием БЭК более тяжелых атомов.

5. Заключение

Полуклассические уравнения применяются для анализа взаимодействия пробного импульса с «одетым» БЭК паров натрия. При малой интенсивности излучения и большой протяженности пробного импульса заселяется лишь состояние 1, соответствующее поглощению фотона из одевающей моды и его испусканию в пробную моду поля. В этих условиях при превышении коэффициентом усиления скорости поперечной релаксации и незначительном отклонении населенностей от равновесных значений атомы отдачи образуют дифракционную решетку. Импульс, проходя через такую среду, замедляется и уширяется, причем тем сильнее, чем меньше его энергия. При очень малой ее величине, когда входной импульс можно рассматривать как затравочный, решеточная генерация становится преобладающей и на частоте пробного луча возникает индуцированное сверхизлучение.

Переходы из основного состояния 0 в состояния с $n \neq 1$ сильно нерезонансны. Необходимым условием их заселения является определенная, весьма высокая интенсивность облучения. Для реализации состояний с $n > 0$ протяженность пробного импульса не важна. В то же время состояния с $n < 0$ возбуждаются пробными импульсами малой длительности, сравнимой или меньшей об-

ратной частоты отдачи атома. Порог мощности, необходимый для реализации каскадного процесса в обоих каналах, может быть понижен, в частности, уменьшением расстройки однофотонного электронного резонанса.

1. Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L.P., Stringari S. *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463 (1999).
2. Courteille Ph.W., Bagnato V.S., Yukalov V.I. *Laser Phys.*, **11**, 659 (2001).
3. Inouye S., Chikkatur A.P., Stamper-Kurn D.M., et. al. *Science*, **285**, 571 (1999).
4. Inouye S., Low R.F., Gupta S., et. al. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4225 (2000).
5. Schneble D., Yoshio T., Boyd M., et. al. *Science*, **300**, 475 (2003).
6. Schneble D., Campbell G.K., Streed E., et. al. *Phys. Rev. A*, **69**, 041601-1 (R) (2004).
7. Moore M.G., Meystre P. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5202 (1999).
8. Mustecaplioglu O.E., You L. *Phys. Rev. A*, **62**, 063615 (2000).
9. Piovella N., Bonifacio R., McNeil B.W.J., Rob G.R. *Opt. Commun.*, **187**, 165 (2001).
10. Трифонов Е.Д. *ЖЭТФ*, **120**, 1117 (2001).
11. Piovella N., Gatelli M., Martinucci L., et. al. *Laser Phys.*, **12**, 1 (2002).
12. Трифонов Е.Д., Шамров Н.И. *Оптика и спектроскопия*, **96**, 294 (2004).
13. Bonifacio R., Cataliotti F.S., Cola M, et. al. *Opt. Commun.*, **233**, 155 (2004).
14. Шамров Н.И. *Оптика и спектроскопия*, **100**, 99 (2006).
15. Шамров Н.И. *Оптика и спектроскопия*, **101**, 802 (2006).
16. Shamrov N.I. *Laser Phys.*, **16**, 1374 (2006).
17. Аветисян Ю. А., Трифонов Е.Д. *Оптика и спектроскопия*, **100**, 307 (2006).
18. Аветисян Ю. А., Трифонов Е.Д. *ЖЭТФ*, **130**, 771 (2006).
19. Трифонов Е.Д., Шамров Н.И. *ЖЭТФ*, **126**, 54 (2004).
20. Shamrov N.I. *Laser Phys.*, **17**, 858 (2007).