

# Флуктуации орбитального углового момента лазерного пучка, несущего оптический вихрь, в турбулентной атмосфере\*

В.П.Аксенов, Ч.Е.Погуца

*Приведены результаты теоретического исследования закономерностей эволюции орбитального углового момента (ОУМ) лаггерр-гауссова лазерного пучка при его взаимодействии с турбулентными неоднородностями атмосферы. Получены интегральные представления ОУМ через распределения случайной интенсивности и случайного поля диэлектрической проницаемости среды, а также его статистических характеристик через соответствующие корреляционные функции. Установлено, что среднее значение ОУМ при распространении лазерного пучка в случайной среде сохраняется. Рассчитана дисперсия флуктуаций ОУМ в зависимости от силы атмосферной турбулентности и параметров пучка. Показано, что при очень сильной турбулентности зависимость дисперсии ОУМ от начального углового момента пучка исчезает.*

**Ключевые слова:** оптический вихрь, орбитальный угловой момент, атмосферная турбулентность, лаггерр-гауссовы пучки, дислокации волнового фронта.

## 1. Введение

Теоретически и экспериментально установлено, что световые пучки не только переносят энергию, но и обладают линейным и угловым моментами. При этом полный угловой момент может содержать как спиновую составляющую, связанную с поляризацией, так и орбитальную составляющую, связанную с пространственными распределениями интенсивности и фазы [1, 2]. Такой угловой момент может передаваться материальным частицам, обуславливая их вращение. Это свойство имеет важные применения в таких далеких друг от друга областях, как биология [3] и микромеханика [4]. Угловой момент света может быть также использован для кодирования и обработки информации [5], в том числе в системах оптической связи [6]. Если нормировать угловой момент света на энергию, переносимую световым пучком, а энергию при этом измерять в единицах энергии фотона  $\hbar\omega$ , то каждому фотону можно поставить в соответствие спиновый орбитальный момент  $\sigma_z\hbar$ , где  $\sigma_z = \pm 1$  для циркулярно поляризованного и  $\sigma_z = 0$  для линейно поляризованного света. Орбитальный угловой момент связан с циркуляцией энергии в световом пучке и не зависит от поляризации света. Наиболее отчетливо свойства орбитального углового момента (ОУМ) проявляются в пучке, несущем оптический вихрь (ОВ), благодаря его геликоидальному волновому фронту [7]. Лаггерр-гауссовы лазерные пучки являются наиболее характерным примером пучков, несущих ОВ. В таких пучках продольная компонента ОУМ представляет собой целое число (топологи-

ческий заряд  $l$ , или сила оптического вихря), умноженное на  $\hbar$ . Величина ОУМ пучка характеризует свойства существующих в пучке ОВ. Поэтому интерес к особенностям трансформации ОУМ в различных оптических системах быстро растет [8–11].

Целью настоящей работы является исследование преобразования ОУМ в среде со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости, в частности в турбулентной атмосфере. Объектом дальнейшего анализа будет линейно поляризованный когерентный световой пучок, представляющий собой лаггерр-гауссову моду  $LG_0^{(l)}$  с  $l = 1, 2, 0$ .

## 2. Основные уравнения

Пусть  $u(\mathbf{r}; z)$  – комплексная амплитуда светового поля когерентного параксиального пучка, распространяющегося в направлении оси  $z$ , а  $\mathbf{r}(x, y)$  – вектор в плоскости  $xu$ . Известно, что  $z$ -компонента ОУМ может быть представлена следующим образом [2, 5]:

$$L_z = \frac{i}{2\omega} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{r} \times (u\nabla_{\perp} u^* - u^*\nabla_{\perp} u)] \mathbf{n} \, dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y; z)|^2 \, dx dy}, \quad (1)$$

где

$$\nabla_{\perp} = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y};$$

$l, m$  и  $\mathbf{n}$  – единичные векторы, направленные вдоль осей  $x, y$  и  $z$  соответственно;  $\omega$  – угловая частота. Вводя в рассмотрение  $U_{1,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = u(\mathbf{r}_1; z)u^*(\mathbf{r}_2; z)$  ( $U_{1,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; z) = I(\mathbf{r}_1; z)$  – интенсивность пучка), выполняя замену переменных  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и обозначая  $U_{1,1}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2, \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2; z)$  как  $U_2(\mathbf{r}; \boldsymbol{\rho}; z)$ , получаем

$$u\nabla_{\perp} u^* - u^*\nabla_{\perp} u = 2\nabla_{\perp} \rho U_2(\mathbf{r}; \boldsymbol{\rho}; z)|_{\boldsymbol{\rho}=0},$$

\*Доложена на Международной конференции «Оптика лазеров-2006» (С.-Петербург, Россия, июнь 2006 г.).

где

$$\nabla_{\perp \rho} = \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \rho_y}.$$

Используя это равенство, вместо (1) будем иметь следующее выражение:

$$L_z = \frac{1}{i\omega} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathbf{r} \times [\nabla_{\perp \rho} U_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; z)|_{\rho=0}]\} \mathbf{n} \, dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y; z) \, dx dy}. \quad (2)$$

Выберем распределение поля в исходной плоскости ( $z = 0$ ) таким же, каким оно было задано в [8]:

$$u_{0l}(\mathbf{r}) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{8\Phi}{c}} \sqrt{\frac{1}{|l|!}} \left(\frac{x + iy}{a}\right)^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right), \quad (3)$$

где  $c$  – скорость света;  $\Phi$  – полный поток энергии;  $a$  – эффективный радиус пучка. Используя (3) и (2), нетрудно вычислить, что для  $l = 1, 2, 0$  орбитальный угловой момент  $L_z$  равен  $1/\omega$ ,  $2/\omega$  и  $0$  соответственно. Рассмотрим теперь, как будет изменяться величина  $L_z$  при распространении лазерного пучка в неоднородной среде.

Будем предполагать, что пучок распространяется в полупространстве  $z \geq 0$ , заполненном преломляющей средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(x, y; z) = 1 + \tilde{\varepsilon}(x, y; z)$ , при этом  $\langle |\tilde{\varepsilon}| \rangle \ll 1$ , а комплексная амплитуда пучка подчиняется параболическому уравнению

$$2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta_{\perp} u + k^2 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; z) u(\mathbf{r}; z) = 0, \quad (4)$$

$$u(\mathbf{r}; 0) = u_{0l}(\mathbf{r}),$$

где  $k = \omega/c$ . Известно, что величина

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y; z) \, dx dy,$$

с точностью до постоянного множителя совпадающая с полным потоком энергии пучка, в приближении малоуглового рассеяния сохраняется при распространении пучка. Будем искать интересующие нас характеристики  $L_z$  в неоднородной среде, исходя из определения (2) и действуя так же, как и авторы работы [12] при расчетах статистических характеристик смещений пучков. Напишем уравнение для случайной величины  $U_2$  в суммарных и разностных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} U_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; z) &= \frac{i}{k} \nabla_{\perp \rho} \nabla_{\perp r} U_2 \\ &+ \frac{ik}{2} [\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2; z) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2; z)] U_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$U_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; 0) = u_{0l}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2) u_{0l}^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2).$$

Чтобы вывести уравнение для  $L_z$ , подействуем на уравнение (5) оператором  $\nabla_{\perp \rho}/(i\omega P_0)$  и положим затем  $\boldsymbol{\rho} = 0$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\nabla_{\perp \rho}}{i\omega P_0} U_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; z)|_{\rho=0} &= \frac{1}{\omega P_0 k} \Delta_{\perp \rho} \nabla_{\perp r} U_2|_{\rho=0} \\ &+ \frac{1}{2c P_0} \nabla_{\perp r} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; z) I(\mathbf{r}; z). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая определение (2), выполним векторное умножение (6) на  $\mathbf{r}$  и проведем интегрирование по этой переменной. В результате будем иметь выражение

$$\frac{d}{dz} L_z(z) = \frac{1}{2P_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy [\mathbf{r} \times \nabla_{\perp r} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; z)] \mathbf{n} I(\mathbf{r}; z). \quad (7)$$

Уравнение (7) должно быть дополнено граничным условием

$$L_z(0) = L_{z0}. \quad (8)$$

Уравнение, подобное (7), было получено ранее М.Берри [13] с привлечением аппарата квантовой механики. Интегрирование уравнения (7) приводит к следующему выражению для ОУМ пучка:

$$\begin{aligned} L_z(z) &= L_{z0} \\ &+ \frac{1}{2P_0 c} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy [\mathbf{r} \times \nabla_{\perp r} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; \xi)] \mathbf{n} I(\mathbf{r}; \xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Разложив вектор  $\nabla_{\perp r} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; \xi)$  на радиальную и азимутальную составляющие, получим, что изменение ОУМ пучка в процессе его распространения в рефракционной среде происходит под действием азимутальной составляющей. Очевидно, что в среде с аксиальной симметрией величина ОУМ останется неизменной. Формула (9) будет использована далее для исследования эволюции ОУМ в случайно-неоднородной среде.

### 3. Статистические характеристики ОУМ в случайно-неоднородной среде

Нас будет интересовать среднее  $\langle L_z \rangle$  и дисперсия  $B_l = \langle (L_z - \langle L_z \rangle)^2 \rangle$  флуктуаций ОУМ. Для получения  $\langle L_z \rangle$  проведем статистическое усреднение в формуле (9):

$$\begin{aligned} \langle L_z(z) \rangle &= L_{z0} \\ &+ \frac{1}{2P_0 c} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \langle I(\mathbf{r}; \xi) \mathbf{n} [\mathbf{r} \times \nabla_{\perp r} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; \xi)] \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Для вычисления корреляции в формуле (10) сначала воспользуемся приближением марковского случайного процесса и будем считать поле  $\tilde{\varepsilon}$  однородным гауссовым случайным полем. В марковском приближении имеем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; z) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}'; z') \rangle &= \delta(z - z') A(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ A(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}'; z) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}; z + \xi) \rangle \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_x d\kappa_y \exp(i\mathbf{x}\boldsymbol{\kappa}) \Phi_{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\delta(\mathbf{x})$  – дельта-функция;  $\Phi_{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa})$  – трехмерный спектр поля  $\tilde{\varepsilon}$ ;  $\boldsymbol{\kappa}$  – двумерный вектор. Затем по формуле Фуруцу – Новикова – Донскера [14] вычислим среднее от произведения случайного поля и функционала от него:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; z) R[\tilde{\varepsilon}] \rangle &= \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}; z) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}'; \xi) \rangle \\ &\times \left\langle \frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}]}{\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}'; \xi)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку при вычислении вариаций интенсивности по полю  $\tilde{\varepsilon}$  выполняется равенство

$$\left. \frac{\delta I(\mathbf{r}; \xi)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}'; \xi')} \right|_{\xi'=\xi} = 0, \quad (13)$$

оказывается, что в приближении марковского случайного процесса средний ОУМ равен исходному моменту:

$$\langle L_z(z) \rangle = L_{z0}. \quad (14)$$

Поэтому для дисперсии углового момента  $B_l$  будем иметь выражение

$$B_l = \frac{1}{4P_0^2 c^2} \int_0^z d\xi_1 \int_0^z d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 dy_2 \times \langle I(\mathbf{r}_1; \xi_1) I(\mathbf{r}_2; \xi_2) [\mathbf{r}_1 \times \nabla_{\perp \mathbf{r}_1} \tilde{e}(\mathbf{r}_1; \xi_1)] [\mathbf{r}_2 \times \nabla_{\perp \mathbf{r}_2} \tilde{e}(\mathbf{r}_2; \xi_2)] \rangle. \quad (15)$$

Воспользовавшись при вычислениях корреляции в (15) соотношением (12), после вычислений ряда вариационных производных получим в приближении марковского случайного процесса формулу

$$B_l = \frac{1}{4P_0^2 c^2} \int_0^z d\xi_1 \int_0^z d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 dy_2 \times \langle I(\mathbf{r}_1; \xi_1) I(\mathbf{r}_2; \xi_2) \langle [\mathbf{r}_1 \times \nabla_{\perp \mathbf{r}_1} \tilde{e}(\mathbf{r}_1; \xi_1)] [\mathbf{r}_2 \times \nabla_{\perp \mathbf{r}_2} \tilde{e}(\mathbf{r}_2; \xi_2)] \rangle \rangle \quad (16)$$

с «расщеплением» корреляции  $\tilde{e}$  и  $I$ , которую, расписав векторные произведения по координатам, можно переписать в следующем виде:

$$B_l = \frac{1}{4P_0^2 c^2} \int_0^z d\xi_1 \int_0^z d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 dy_2 \times \langle I(\mathbf{r}_1; \xi_1) I(\mathbf{r}_2; \xi_2) \left( x_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} - x_1 y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial x_2} - y_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \langle \tilde{e}(\mathbf{r}_1; \xi_1) \tilde{e}(\mathbf{r}_2; \xi_2) \rangle \rangle. \quad (17)$$

После подстановки корреляционной функции (11) в (17) получим формулу

$$B_l = \frac{\pi}{2P_0^2 c^2} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_x d\kappa_y \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 dy_2 (x_1 x_2 \kappa_x^2 - x_1 y_2 \kappa_x \kappa_y - y_1 x_2 \kappa_x \kappa_y + y_1 y_2 \kappa_y^2) \times \exp[i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \langle I(\mathbf{r}_1; \xi) I(\mathbf{r}_2; \xi) \rangle. \quad (18)$$

Вычисление дисперсии  $B_l$  по формуле (18) сопряжено с предварительным нахождением функции  $\Gamma_4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; z) = \langle u(\mathbf{r}_1; z) u(\mathbf{r}_2; z) u^*(\mathbf{r}_3; z) u^*(\mathbf{r}_4; z) \rangle$ , которая может быть рассчитана с помощью одного из асимптотических или численных методов [14]. Поскольку асимптотические методы применимы только в предельных случаях слабой и сильной турбулентности, построим приближенную формулу для оценки величины  $B_l$ , используя так называемое «среднеинтенсивное» приближение, заключающееся в замене

$$\langle I(\mathbf{r}_1; \xi) I(\mathbf{r}_2; \xi) \rangle \approx \langle I(\mathbf{r}_1; \xi) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2; \xi) \rangle. \quad (19)$$

Это приближение использовалось ранее для расчетов флуктуаций «центра тяжести» лазерных пучков в случайно-неоднородной среде и показало хорошие результаты

[12] не только для предельных ситуаций, но и в промежуточном случае (область фокусировки флуктуаций). Используя фурье-представление для интенсивности

$$I(\mathbf{r}; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(\boldsymbol{\kappa}, z) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\kappa_x d\kappa_y, \quad (20)$$

$$J(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}; z) \exp(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) dx dy$$

$$(J^*(\boldsymbol{\kappa}, z) = J(-\boldsymbol{\kappa}, z)), \quad (21)$$

из формулы (18) получаем

$$B_l = \frac{8\pi^5}{P_0^2 c^2} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_x d\kappa_y \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}) \left[ \kappa_x^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_x} J(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle \times \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_x} J^*(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle - \kappa_x \kappa_y \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_x} J^*(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_y} J(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle - \kappa_x \kappa_y \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_y} J^*(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_x} J(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle + \kappa_y^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_y} J(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial \kappa_y} J^*(\boldsymbol{\kappa}, \xi) \right\rangle \right]. \quad (22)$$

Если выполняется условие

$$\langle J(\boldsymbol{\kappa}, z) \rangle = \langle J^*(\boldsymbol{\kappa}, z) \rangle = \langle J(|\boldsymbol{\kappa}|, z) \rangle, \quad (23)$$

то, используя в (22) вместо декартовой  $(\kappa_x, \kappa_y)$  полярную систему координат  $(\kappa, \varphi)$ , после интегрирования по угловой переменной  $\varphi$  находим

$$B_l = \frac{8\pi^6}{P_0^2 c^2} \int_0^z d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[ \frac{\partial}{\partial \kappa} \langle J(\kappa, \xi) \rangle \right]^2. \quad (24)$$

#### 4. Среднее распределение и спектр интенсивности лаггер-гауссовых пучков

Для выполнения расчетов по формуле (24) вычислим спектр средней интенсивности для пучков с начальным распределением (3). Используем для этого хорошо известное решение [14]

$$\Gamma_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; z) = \langle U_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; z) \rangle = \frac{\kappa^2}{4\pi^2 z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho'_x d\rho'_y U_2(\mathbf{r}', \boldsymbol{\rho}'; 0) \exp\left[\frac{ik}{z}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\pi\kappa^2}{4} \int_0^z H\left(\boldsymbol{\rho} \frac{\zeta}{z} + \boldsymbol{\rho}' \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)\right) d\zeta\right], \quad (25)$$

где

$$H(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \boldsymbol{\kappa}x) \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_x d\kappa_y.$$

Будем исследовать ОУМ пучка с  $l = 1, 2, 0$ . Полагая в (25)  $\boldsymbol{\rho} = 0$  и используя (3) с параметром  $l = 1$ , после интегрирования по переменной  $\mathbf{r}'$  получаем

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}; z) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \left( \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{8\Phi}{c}} \right)^2 \pi a^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho'_x d\rho'_y \\ &\times \left[ 1 - \frac{1}{4a^2} g^2(z) \rho'^2 \right] \exp \left[ -\frac{1}{4a^2} g^2(z) \rho'^2 - \frac{ik}{z} \rho' \mathbf{r} \right. \\ &\left. - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H \left( \rho' \left( 1 - \frac{\zeta}{z} \right) \right) d\zeta \right], \quad l = 1, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $g^2(z) = 1 + \Omega^2$ ;  $\Omega = ka^2/z$  – дифракционный параметр Френеля. Интегрирование (26) в плоскости  $xу$  позволяет найти  $P_0$  для  $l = 1$ . Оказывается, что

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \langle I(\mathbf{r}'; z) \rangle = 8\pi \frac{\Phi}{c}. \quad (27)$$

Используя (21) и (26), для пучка с  $l = 1$  получаем спектр средней интенсивности вида

$$\begin{aligned} \langle J(\kappa, \xi) \rangle &= 2 \frac{\Phi}{\pi c} \left[ 1 - \frac{1}{4a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{4a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right. \\ &\left. - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^{\xi} H \left( -\kappa \frac{\xi}{k} \left( 1 - \frac{\zeta}{\xi} \right) \right) d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Для значений  $l = 2$  и  $l = 0$  будем иметь соответственно

$$\begin{aligned} \langle J(\kappa, \xi) \rangle &= \frac{\Phi}{\pi c} \left\{ \frac{\kappa^4}{16a^4} \left( \frac{\xi}{k} \right)^4 [g^2(\xi)]^2 - \frac{1}{a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 + 2 \right\} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{4a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{\pi k^2}{4} \int_0^{\xi} H \left( -\kappa \frac{\xi}{k} \left( 1 - \frac{\zeta}{\xi} \right) \right) d\zeta \right], \quad l = 2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \langle J(\kappa, \xi) \rangle &= 2 \frac{\Phi}{\pi c} \exp \left[ -\frac{1}{a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right. \\ &\left. - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^{\xi} H \left( -\kappa \frac{\xi}{k} \left( 1 - \frac{\zeta}{\xi} \right) \right) d\zeta \right], \quad l = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для  $P_0$  в случае  $l = 2$  и  $l = 0$  будет выполняться одно и то же равенство (27).

## 5. Дисперсия ОУМ в турбулентной атмосфере

Формулы (28)–(30) справедливы при любом виде спектра  $\Phi_\epsilon(\kappa)$  и, следовательно, функции  $H(x)$ . Будем далее считать, что флуктуации диэлектрической проницаемости среды вызваны пульсациями температуры и положим

$$\Phi_\epsilon(\kappa) = 0.033 C_\epsilon^2 \kappa^{-11/3}, \quad (31)$$

где  $C_\epsilon^2$  – структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха. В этом случае функция  $H(x) = 0.465 C_\epsilon^2 |x|^{5/3}$ . Подставляя это выражение в (28), получаем

$$\langle J(\kappa, \xi) \rangle = 2 \frac{\Phi}{\pi c} \left[ 1 - \frac{1}{4a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right] \exp \left[ -\frac{1}{4a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 - 1.1824 \beta_{0\xi}^2 \frac{3}{8} \left( \frac{\xi}{k} \right)^{5/6} \kappa^{5/3} \right], \quad l = 1, \quad (32)$$

$$\times g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 - 1.1824 \beta_{0\xi}^2 \frac{3}{8} \left( \frac{\xi}{k} \right)^{5/6} \kappa^{5/3}], \quad l = 1, \quad (32)$$

где  $\beta_{0\xi}^2 = 0.307 C_\epsilon^2 k^{7/6} \xi^{11/6}$  – средний квадрат флуктуаций интенсивности плоской волны на дистанции  $\xi$ , найденный в приближении метода плавных возмущений. Из (32) следует, что условие применимости формулы (24) выполняется.

Далее можно рассчитать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \kappa} \langle J(\kappa, \xi) \rangle &= 2 \frac{\Phi}{\pi c} \exp \left[ -\frac{1}{4a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right. \\ &\left. - 1.1824 \beta_{0\xi}^2 \frac{3}{8} \left( \frac{\xi}{k} \right)^{5/6} \kappa^{5/3} \right] \left\{ -\frac{1}{a^2} g^2(\xi) \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa \right. \\ &\left. + \left[ \frac{g^2(\xi)}{4a^2} \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \right]^2 2\kappa^3 - \left[ 1 - \frac{g^2(\xi)}{4a^2} \left( \frac{\xi}{k} \right)^2 \kappa^2 \right] \right. \\ &\left. \times 1.1824 \beta_{0\xi}^2 \frac{5}{8} \left( \frac{\xi}{k} \right)^{5/6} \kappa^{2/3} \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Возводя (33) в квадрат и подставляя результат в формулу (24), используя спектр (31) и вычисленное значение  $P_0$ , после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\omega^2} 0.530 \beta_0^2 \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-2/3} \exp \left[ -\frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \kappa^2 \right. \\ &\left. - 0.887 \beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{5/3} \right] \left\{ \frac{1}{\Omega} q^2(\xi) \kappa + 0.739 \beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{2/3} \right. \\ &\left. - 2 \left[ \frac{1}{4\Omega} q^2(\xi) \right]^2 \kappa^3 - 0.739 \frac{1}{4\Omega} q^2(\xi) \beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{8/3} \right\}^2, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $q^2(\xi) = \xi^2 + \Omega^2$ ;  $\beta_0^2 = 0.307 C_\epsilon^2 k^{7/6} z^{11/6}$ .

Формула (34) может использоваться для расчетов флуктуаций ОУМ при произвольных условиях турбулентности на трассе распространения лазерного пучка. Эти условия можно определить, исходя из параметра турбулентности  $\beta_0^2$ , и упростить формулу (34) для слабой и сильной турбулентности. Будем интересоваться поведением относительной дисперсии ОУМ  $\sigma_{L1}^2 = B_1 / \langle L_z \rangle^2$ . Для слабой турбулентности ( $\beta_0^2 \ll 1$ ) с учетом (14) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{L1}^2 &= 0.53 \beta_0^2 \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-2/3} \exp \left[ -\frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \kappa^2 \right] \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{\Omega} q^2(\xi) \right]^2 \kappa^2 + 4 \left[ \frac{1}{4\Omega} q^2(\xi) \right]^4 \kappa^6 \right. \\ &\left. - 4 \frac{1}{\Omega} q^2(\xi) \left[ \frac{1}{4\Omega} q^2(\xi) \right]^2 \kappa^4 \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

После вычисления интегралов, входящих в (35), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{L1}^2 &= 0.53 \frac{331 \cdot 2^{1/6} \Gamma(7/6)}{576} \beta_0^2 \Omega^{-5/6} \int_0^1 d\xi [q^2(\xi)]^{5/6} \\ &= 0.317 \beta_0^2 \Omega^{5/6} {}_2F_1 \left( -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{\Omega^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  – гамма-функция, а  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  – гипергеометрическая функция Гаусса [15]. В ближней зоне дифракции ( $\Omega \gg 1$ ) из (36) находим

$$\sigma_{L1}^2 \approx 0.317\Omega^{5/6}\beta_0^2 \quad (\beta_0^2 \ll 1). \quad (37)$$

Для дальней зоны ( $\Omega \ll 1$ ) имеем

$$\sigma_{L1}^2 \approx 0.119\Omega^{-5/6}\beta_0^2 \quad (\beta_0^2 \gg 1). \quad (38)$$

Для сильной турбулентности также будем исходить из выражения (34), но ограничимся случаем дальней зоны, когда удастся получить асимптотическую оценку относительной дисперсии ОУМ:

$$\sigma_{L1}^2 = 0.0534\beta_0^4 \quad (\beta_0^{-3/5} \ll \Omega \ll 1, \beta_0^2 \gg 1). \quad (39)$$

Отметим, что при сильной турбулентности  $\sigma_{L1}^2$  перестает зависеть от размера пучка. Очевидно, что при промежуточных значениях параметра  $\beta_0^2$  значения  $\sigma_{L1}^2$  могут быть найдены посредством численного интегрирования в формуле (34).

Для лаггерр-гауссова пучка с  $l = 2$ , подставляя (29) в (24), для спектра турбулентности вида (31) получаем

$$\begin{aligned} B_2 = & \frac{1}{\omega^2} 0.530\beta_0^2 \int_0^1 d\xi \int_0^\infty dk k^{-2/3} \exp \left[ -\frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \kappa^2 \right. \\ & - 0.887\beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{5/3} \left. \right] \left\{ \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \right]^2 \kappa^3 - 0.739\beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{2/3} \right. \\ & - 3 \frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \kappa - \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \right]^3 \kappa^5 + 0.739 \frac{1}{2\Omega^2} \beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{8/3} \\ & \left. - 0.739 \frac{1}{8} \beta_0^2 \xi^{8/3} \left[ \frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \right]^2 \kappa^{4/3} \right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

Для слабой и сильной турбулентности найдем из (40) следующие асимптотические формулы:

$$\sigma_{L2}^2 = 0.124\beta_0^2 \Omega^{5/6} {}_2F_1 \left( -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{\Omega^2} \right) \quad (\beta_0^2 \ll 1), \quad (41)$$

$$\sigma_{L2}^2 = 0.0133\beta_0^4 \quad (\beta_0^{-3/5} \ll \Omega \ll 1, \beta_0^2 \gg 1). \quad (42)$$

На рис.1 приведены результаты расчетов среднеквадратичного отклонения флуктуаций ОУМ при распространении лазерного пучка в условиях произвольной турбулентности. На рис.1,б начальные участки кривых 1 и 2 изображены в увеличенном масштабе. Из вида кривых и формул (36), (39) и (41), (42) следует, что в зависимости дисперсии флуктуаций ОУМ от параметра  $\beta_0^2$  можно выделить три характерные области. В первой (область слабой турбулентности) дисперсия ОУМ как функция  $\beta_0^2$  возрастает, причем выполняется неравенство  $\sigma_{L1}^2 > \sigma_{L2}^2$ . Это же неравенство выполняется и в третьей области (режим сильной турбулентности), однако дисперсия ОУМ в ней возрастает с увеличением  $\beta_0^2$  значительно быстрее. По-видимому, возрастание  $\sigma_{L1}^2$  при  $\beta_0^2 \ll 1$  вызвано увеличением «механической» составляющей ОУМ [8], а более быстрый рост  $\sigma_{L1}^2$  обусловлен рождением новых оптических вихрей за счет атмосферной турбулентности и увеличением вихревой составляющей ОУМ. Во второй области (промежуточной) выполняется неравенство  $\sigma_{L1}^2 < \sigma_{L2}^2$ . Можно предположить, что изменение знака неравенства при переходе от первой области ко второй и усиление флуктуаций ОУМ в лазерном пучке с  $l = 2$  по сравнению с флуктуациями момента в пучке с  $l = 1$  связаны с

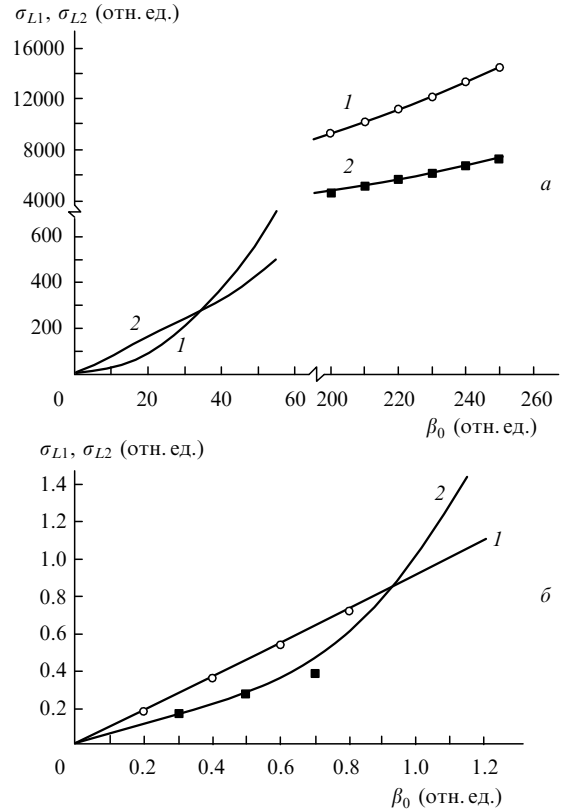


Рис.1. Зависимости относительных дисперсий флуктуаций ОУМ пучков  $\sigma_{L1}$  (1) и  $\sigma_{L2}$  (2) от параметра  $\beta_0$  и асимптотики (39) (○) и (42) (■) (а), а также начальные участки кривых 1 и 2 в увеличенном масштабе и асимптотики (36) (○) и (41) (■) (б) при  $\Omega = 1$ .

неустойчивостью переносимого пучком оптического вихря с топологическим зарядом  $l = 2$  к малым возмущениям [16] и его распадом на систему двух случайно размещенных вихрей одного знака, каждый из которых обладает единичным топологическим зарядом.

Для дальнейшего рассмотрения выделим «атмосферную» составляющую ОУМ, рассчитав дисперсию флуктуаций момента гауссова пучка, изначально обладающего нулевым ОУМ. Используя (30) и проводя вычисления по приведенной выше схеме, в наиболее общем случае будем иметь

$$\begin{aligned} B_0 = & \frac{1}{\omega^2} 0.530\beta_0^2 \int_0^1 d\xi \int_0^\infty dk k^{-2/3} \exp \left[ -\frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \kappa^2 \right. \\ & - 0.887\beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{5/3} \left. \right] \left\{ \left[ \frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \right]^2 \kappa^2 + (0.739\beta_0^2 \xi^{8/3})^2 \kappa^{4/3} \right. \\ & \left. + 2 \cdot 0.739 \frac{1}{2\Omega} q^2(\xi) \beta_0^2 \xi^{8/3} \kappa^{5/3} \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

а в условиях слабой и сильной турбулентности получим соответственно

$$B_0 = 0.138 \frac{1}{\omega^2} \beta_0^2 \Omega^{5/6} {}_2F_1 \left( -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{\Omega^2} \right) \quad (\beta_0^2 \ll 1), \quad (44)$$

$$B_0 = 0.0534\beta_0^4 \frac{1}{\omega^2} \quad (\beta_0^{-3/5} \ll \Omega \ll 1, \beta_0^2 \gg 1). \quad (45)$$

Отношения асимптотических оценок  $B_l$ , полученных для условий слабой и сильной турбулентности, в зависимости от индекса  $l$  имеют следующий вид:

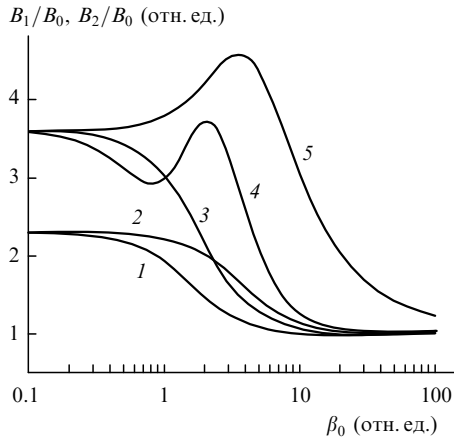


Рис.2. Зависимости  $B_1/B_0$  (1–3) и  $B_2/B_0$  (4, 5) от параметра  $\beta_0$  при  $\Omega = 0.3$  (1, 4), 10 (2, 5) и 1 (3).

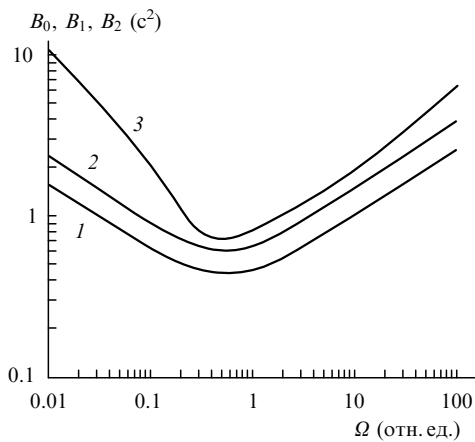


Рис.3. Зависимости дисперсий флуктуаций ОУМ  $B_0$  (1),  $B_1$  (2) и  $B_2$  (3) от дифракционного параметра Френеля  $\Omega$  при  $\beta_0 = 1$  и длине волны лазерного излучения  $\lambda = 1.06$  мкм.

$$\frac{B_1}{B_0} = 2.3, \quad \frac{B_2}{B_0} = 3.6 \quad (\beta_0^2 \ll 1), \quad (46)$$

$$\frac{B_1}{B_0} = 1, \quad \frac{B_2}{B_0} = 1 \quad (\beta_0^{-3/5} \ll \Omega \ll 1, \quad \beta_0^2 \gg 1). \quad (47)$$

Из (46), (47) следует, что при увеличении длины трассы или силы атмосферной турбулентности, когда  $\beta_0 \rightarrow \infty$ , исходное значение ОУМ не оказывает влияния на флуктуации ОУМ, по крайней мере для пучков, дифракционный параметр  $\Omega$  которых ограничен условием  $\beta_0^{-3/5} \ll \Omega \ll 1$ . Это подтверждается и приведенными на рис.2 результатами расчетов отношений  $B_1/B_0$  и  $B_2/B_0$  при распространении лазерного пучка в условиях произвольной турбулентности. Из рис.2 следует также, что дисперсия флуктуаций ОУМ пучка с  $l = 2$  ( $B_2$ ) с запаздыванием по сравнению с дисперсией  $B_1$  выходит на свою асимптотику. Отметим, что в предельном случае  $\beta_0 \rightarrow \infty$  основной вклад в оценку  $B_1, B_2, B_0$  вносит один и тот же член в подынтегральных выражениях, включающий в себя степенную зависимость  $\propto \kappa^{2/3}$ . Можно показать, что интегральное представление  $B_l$  будет содержать под интегралом такой же член. Поэтому, не проводя конкретных вычислений, можно записать

$$\frac{B_l}{B_0} \rightarrow 1, \quad \text{когда } \beta_0 \rightarrow \infty.$$

На рис.3 показаны результаты расчетов  $B_l$  как функции дифракционного параметра  $\Omega$  при  $\beta_0 = 1$ . Из рис.3 следует, что минимум флуктуаций ОУМ достигается вблизи  $\Omega = 1$ , т. е. для наиболее узких в дифракционном смысле лазерных пучков. Переход в ближнюю или дальнюю зону дифракции сопровождается увеличением флуктуаций.

## 6. Заключение

Таким образом, исследовано изменение ОУМ вихревого лазерного пучка под действием неоднородностей диэлектрической проницаемости атмосферы. Получено интегральное представление ОУМ лазерного пучка. Построены интегральные соотношения для среднего и среднего квадрата ОУМ. Показано, что статистическое среднее значение ОУМ совпадает с ОУМ в однородной среде. Рассчитаны зависимости дисперсии флуктуации ОУМ от силы атмосферной турбулентности и дифракционных параметров пучка. Показано, что при переходе от режима слабой к режиму сильной турбулентности по мере распространения лазерного пучка происходит изменение темпа роста флуктуаций ОУМ. Установлено, что при возрастании силы атмосферной турбулентности предельная зависимость дисперсии ОУМ от условий турбулентности унифицируется, и дисперсия совпадает с дисперсией для пучка с нулевым исходным ОУМ независимо от начального ОУМ. Установлено также, что в режимах слабой и сильной турбулентности относительная дисперсия флуктуаций ОУМ лазерного пучка, имеющего меньший индекс  $l$ , превышает относительную дисперсию флуктуаций ОУМ в пучке с большим индексом, а для турбулентности средней силы возникает обратная ситуация. Предполагается, что изменение знака неравенства связано с неустойчивостью и распадом оптических вихрей высокого порядка. Показано, что флуктуации ОУМ достигают своего минимума для узких в дифракционном смысле лазерных пучков.

1. Allen L., Barnett S.M., Padgett M.J. *Optical Angular Momentum* (Bristol, Philadelphia: Institute of Physics, 2003).
2. Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. *Phys. Rev. A*, **45**, 8185 (1992).
3. Ashkin A. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **6** (6), 841 (2000).
4. Calajda P., Ormos P. *Appl. Phys. Lett.*, **78**, 249 (2001).
5. Molina-Terriza G., Torres J.P., Torner L. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 013601 (2002).
6. Gibson G., Courtial J., Padgett M.J., Vasnetsov M., Pas'ko V., Barnett S.M., Franke-Arnold S. *Opt. Express*, **12**, 5448 (2004).
7. Vasnetsov M., Staliunas K. (Eds) *Optical Vortices* (New York: Nova Science, 1999).
8. Бекшаев А.Я., Васнецов М.В., Денисенко В.Г., Соскин М.С. *Письма в ЖЭТФ*, **75**, 127 (2002).
9. Abramochkin E.G., Volostnikov V.G. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, S157 (2004).
10. Padgett M., Courtial J., Allen L. *Phys. Today*, № 5, 36 (2004).
11. Paterson C. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 153901 (2005).
12. Кляцкин В.И., Кон А.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **15** (9), 1381 (1972).
13. Berry M. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **3487**, 6 (1998).
14. Рыгов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля* (М.: Наука, 1978).
15. Градштейн И.С., Рыжик И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
16. Dennis M. *Opt. Lett.*, **31**, 1325 (2006).