PACS 42.65.Ky; 42.65.Yj; 42.65.Tg; 05.45.–a

Области существования и асимптотики комплексных периодических решений стационарного нелинейного уравнения Шредингера

А.С.Куратов, В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Определены области существования комплексных периодических частных решений стационарного нелинейного уравнения Шредингера. Показано, что если у решения этого класса существует хотя бы одна точка, в которой амплитуда не имеет локального экстремума и равна нулю, то его фаза постоянна. Рассмотрены асимптотики таких решений и описана простая процедура (замена одного набора «базисных» эллиптических функций другим), позволяющая по известному решению для нелинейности одного (фокусирующего либо дефокусирующего) типа построить решение, отвечающее случаю нелинейности другого (дефокусирующего либо фокусирующего) типа.

***Ключевые слова**: стационарное нелинейное уравнение Шредингера, комплексные периодические решения, области существования решений и их асимптотики.*

1. Введение

В последнее время понятие солитонов и кноидальных волн как стационарных уединенных и периодических решений нелинейных уравнений широко используется в разных областях физики, включая задачи распространения световых импульсов и пучков через нелинейно-оптические среды [1 – 10]. Хотя способ нахождения решений такого типа, основанный на методе обратной задачи рассеяния [11 – 22], для вполне интегрируемых уравнений разработан уже достаточно давно, интерес к частным аналитическим решениям, отвечающим конкретным физическим задачам, сохраняется [23 – 28]. В работе [29] нами был описан новый тип комплексных периодических решений стационарного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), реализующихся при коллинеарном параметрическом взаимодействии трех плоских монохроматических волн (мод) в среде с квадратичной нелинейностью [30]. При переходе к действительным переменным (квадратурным компонентам) решения этого нового (по отношению к известным частным решениям НУШ [6, 8, 23 – 28]) типа представляют собой невырожденные двухкомпонентные кноидальные волны, сформированные из двух ортогональных составляющих, совершающих сдвинутые по фазе на $\pi/2$ нелинейные колебания, жестко согласованные с колебаниями модуля их результирующего поля. В [29] записана система алгебраических уравнений, определяющая параметры таких решений через граничные условия, и в самом общем виде сформулированы требования, задающие области их существования. Было показано, что в ряде предельных случаев форма записи этих новых решений НУШ приводится к аналитическому виду, хорошо известному из работ по параметрическому преобразованию частоты [31, 32].

А.С.Куратов, В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 4 апреля 2007 г., после доработки – 10 августа 2007 г.

Ниже мы подробно остановимся на вопросе о существовании решений такого типа, рассмотрим их асимптотики, а также опишем формальную процедуру, обеспечивающую построение решения, отвечающего случаю нелинейности дефокусирующего типа, по известному решению для нелинейности фокусирующего типа, и наоборот. Последнее особенно важно именно для задачи параметрического преобразования частоты, решение которой, как было показано в [30], сводится к решению трех независимых НУШ с нелинейностью разного типа.

2. Нелинейность фокусирующего типа

Рассмотрим сначала случай нелинейности фокусирующего типа. При этом, следуя подходу работы [29], запишем НУШ в нормированном виде:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + 2(YY^* - \beta)Y = 0, \tag{1}$$

и, положив, что $Y(z) = X(z)\exp[\mathrm{i}\varphi(z)]$ является комплексной функцией координаты z, а $X(z)$ и $\varphi(z)$ – действительные аналитические функции, получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - X\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + 2\left(X^2 - \beta\right)X = 0, \tag{2а}$$

$$X\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{2б}$$

где β – константа. Отметим, что в отличие от [29] мы будем считать, что $X(z) \neq |Y(z)|$ и $X(z)$ может быть отрицательным. Проинтегрировав (2б), найдем

$$X^2\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(X^2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} = \text{const}. \tag{3}$$

Из (2б) и (3) следует, что если существует хотя бы одна точка $z = z_0$, для которой $X|_{z=z_0} = 0$ и $(\partial X/\partial z)|_{z=z_0} \neq 0$, то для всех остальных точек на оси z, в которых $X(z) \neq 0$, производная $\partial\varphi/\partial z \equiv 0$, и поэтому $\varphi = \text{const}$. Определив теперь нормированную интенсивность выражением $I(z) = X^2(z)$ и обозначив $X|_{z=0} = X_0$, $X^2|_{z=0} = X_0^2 = I_0$, $\varphi|_{z=0} = \varphi_0$ и $(\partial\varphi/\partial z)|_{z=0} = \varphi_0'$, с использованием (3) получим

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\varphi_0'^2 I_0^2}{X^3} + 2\left(X^2 - \beta\right)X = 0. \tag{4}$$

Использовав решение уравнения (4) и проинтегрировав (3), найдем

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{X^2(z')}. \tag{5}$$

Немного отклонившись от схемы решения, приведенной в [29], запишем решение (4) в виде

$$X(z) = \pm[I_0 + \Delta I \mathrm{sn}^2(\gamma z)]^{1/2}. \tag{6}$$

Здесь ΔI – разность между двумя экстремумами $I(z)$, которые реализуются в точках $z = 0$ и $z = 2K/\gamma$; γ – константа; $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; $0 \leqslant k \leqslant 1$ – модуль эллиптических функций Якоби $\mathrm{sn}(\gamma z)$, $\mathrm{cn}(\gamma z)$ и $\mathrm{dn}(\gamma z)$ [33]. Отметим, что замены $\mathrm{sn}(\gamma z) \to \mathrm{cn}(\gamma z)$ и $\mathrm{sn}(\gamma z) \to \mathrm{dn}(\gamma z)$ за счет соотношений $\mathrm{cn}^2(\gamma z) \equiv 1 - \mathrm{sn}^2(\gamma z)$ и $\mathrm{dn}^2(\gamma z) \equiv 1 - k^2\mathrm{sn}^2(\gamma z)$ [33] не меняют характер решения (6). Знаки «$\pm$» в (6) отражают инвариантность (4) по отношению к замене $X(z) \to -X(z)$ и определяют две разные ветви решений, которые далее мы будем называть положительными и отрицательными ветвями.

Продифференцировав (6) и подставив результат в (4), а также выразив $\mathrm{cn}^2(\gamma z)$ и $\mathrm{dn}^2(\gamma z)$ через $\mathrm{sn}^2(\gamma z)$ и приравняв коэффициенты при разных (от 0 до 3) степенях $\mathrm{sn}^2(\gamma z)$ нулю, получим алгебраическую систему уравнений относительно ΔI, γ и k [29]. Тогда интересующее нас решение исходной задачи (1)

$$\begin{aligned} Y(z) &= \pm[I_0 + \Delta I \mathrm{sn}^2(\gamma z)]^{1/2} \\ &\quad\times \exp\left\{\mathrm{i}\left[\varphi_0 + \varphi_0' I_0 \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + \Delta I \mathrm{sn}^2(\gamma z')}\right]\right\}, \\ \Delta I &= \beta - \frac{3I_0}{2} + \left[\left(\beta - \frac{I_0}{2}\right)^2 + \varphi_0'^2 I_0\right]^{1/2}, \\ \gamma^2 &= -\beta + \frac{3I_0}{2} + \left[\left(\beta - \frac{I_0}{2}\right)^2 + \varphi_0'^2 I_0\right]^{1/2}, \\ k^2 &= -\frac{\Delta I}{\gamma^2} \end{aligned} \tag{7}$$

существует лишь при

$$I_0 \geqslant \beta + \frac{\varphi_0'^2}{2}. \tag{8}$$

Заметим, что граница области (8), т. е. случай, когда $I_0 = \beta + \varphi_0'^2/2$, в терминологии работ [29, 30] соответствует «параметрическому просветлению», при котором интенсивность излучения по мере его распространения не меняется ($I(z) = I_0$) и

$$Y(z) = \pm\sqrt{I_0}\exp[\mathrm{i}(\varphi_0 + \varphi_0' z)]. \tag{9}$$

Необычным является характер асимптотик (7). При $\varphi_0'^2 \neq 0$ обе ветви решения не пересекаются, поскольку $X(z)$ на них не обращается в нуль. Однако при $\varphi_0'^2 = 0$ ситуация меняется. В этом случае область существования решения (7) разбивается на два интервала:

$$2\beta \geqslant I_0 \geqslant \beta, \tag{10а}$$

$$I_0 \geqslant 2\beta, \tag{10б}$$

причем, если выполнено условие (10а), то

$$\begin{aligned} Y(z) &= \pm\sqrt{I_0}\,\mathrm{dn}\left(\sqrt{I_0}\,z\right)\exp(\mathrm{i}\varphi_0), \\ k^2 &= \frac{2(I_0 - \beta)}{I_0} \end{aligned} \tag{11}$$

и $X(z)$ на обеих ветвях имеет разный, но постоянный знак, а если выполнено условие (10б), то это не так и

$$\begin{aligned} Y(z) &= \pm\sqrt{I_0}\,\mathrm{cn}\left\{[2(I_0 - \beta)]^{1/2} z\right\}\exp(\mathrm{i}\varphi_0), \\ k^2 &= \frac{I_0}{2(I_0 - \beta)}. \end{aligned} \tag{12}$$

При этом граница раздела $I_0 = 2\beta$ интервалов (10а) и (10б) соответствует уединенному решению

$$Y(z) = \pm\frac{\sqrt{2\beta}}{\cosh\left(\sqrt{2\beta}\,z\right)}\exp(\mathrm{i}\varphi_0). \tag{13}$$

Такая метаморфоза происходит из-за того, что, как только I_0 становится больше 2β, положительные и отрицательные ветви решения (7) начинают пересекаться, поскольку на оси z появляются точки с координатами

$$z_n = (2n+1)\frac{K\left(\{I_0/[2(I_0 - \beta)]\}^{1/2}\right)}{[2(I_0 - \beta)]}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{14}$$

в которых $X(z_n) = 0$ для обеих ветвей. Требование аналитичности функций $X(z)$ и $\varphi(z)$ обеспечивает последовательное «сшивание» в точках z_n кусков решений, принадлежащих двум разным ветвям, что и формирует два новых знакопеременных решения (12) с постоянной фазой.

3. Нелинейность дефокусирующего типа

При нелинейности дефокусирующего типа уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - 2\left(YY^* - \beta\right)Y = 0, \tag{15}$$

а уравнение (4) – в уравнение

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\varphi_0'^2 I_0^2}{X^3} - 2\left(X^2 - \beta\right)X = 0. \tag{16}$$

Решение (16) по-прежнему можно искать в виде (6). Используя описанную в предыдущем разделе процедуру, легко получить алгебраическую систему уравнений относительно ΔI, γ и k [29], решение которой и определяет возможные решения задачи (15).

В отличие от рассмотренного выше случая нелинейности фокусирующего типа, для (15) существует три разных типа решений. Первый из них,

$$Y(z) = \pm\sqrt{\Delta I}\,\mathrm{sn}\big[(2\beta - \Delta I)^{1/2} z\big]\exp(\mathrm{i}\varphi_0),$$
$$k^2 = \frac{\Delta I}{2\beta - \Delta I}, \tag{17}$$

для которого $X(z)$, как и в случае, описываемом выражением (12), меняет знак, соответствует ситуации, когда

$$I_0 = 0, \quad \beta \geqslant \Delta I \geqslant 0, \quad \varphi_0'^2 = 0, \tag{18}$$

и относится к хорошо известному классу темных кноидальных волн [34] с асимптотикой ($\Delta I \to \beta$) в форме стандартного решения для темного солитона

$$Y(z) = \pm\sqrt{\beta}\,\tanh\big(\sqrt{\beta}\,z\big)\exp(\mathrm{i}\varphi_0). \tag{19}$$

Как и в рассмотренном выше случае, смена знака $X(z)$ в (17) и (19) происходит за счет того, что положительные и отрицательные ветви решения (6) пересекаются в точках с координатами

$$z_n = 2n\,\frac{K\big([\Delta I/(2\beta - \Delta I)]^{1/2}\big)}{(2\beta - \Delta I)^{1/2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

и куски решений, принадлежащих двум разным ветвям, последовательно «сшиваются» в этих точках, что и формирует два знакопеременных решения (17) и (19) с постоянной фазой φ_0.

Второй тип решения,

$$Y(z) = \pm\sqrt{I_0}\exp\big[\mathrm{i}\big(\varphi_0 + \varphi_0' z\big)\big], \tag{21}$$

для которого $X(z)$ не меняет знак, реализуется при

$$I_0 = \frac{\beta - \varphi_0'^2}{2}, \quad \varphi_0'^2 \leqslant 2\beta \tag{22}$$

и представляет собой полный аналог решения типа параметрического просветления (см. выше и [29, 30]) для случая нелинейности дефокусирующего типа.

И наконец, еще один, третий тип решения, для которого $X(z)$ также не меняет знак,

$$Y(z) = \pm[I_0 + \Delta I\,\mathrm{sn}^2(\gamma z)]^{1/2}$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\left[\varphi_0 + \varphi_0' I_0\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + \Delta I\,\mathrm{sn}^2(\gamma z)}\right]\right\},$$
$$\Delta I = \beta - \frac{3I_0}{2} - \left[\left(\beta - \frac{I_0}{2}\right)^2 - \varphi_0'^2 I_0\right]^{1/2}, \tag{23}$$
$$\gamma^2 = \beta - \frac{3I_0}{2} + \left[\left(\beta - \frac{I_0}{2}\right)^2 - \varphi_0'^2 I_0\right]^{1/2},$$
$$k^2 = \frac{\Delta I}{\gamma^2},$$

реализуется при

$$2\big[\beta + \varphi_0'^2 - |\varphi_0'|\big(2\beta + \varphi_0'^2\big)^{1/2}\big] \geqslant I_0 \geqslant \beta - \frac{\varphi_0'^2}{2},$$
$$\varphi_0'^2 \geqslant \frac{2\beta}{3}. \tag{24}$$

Отметим здесь два весьма любопытных обстоятельства. Во-первых, в отличие от рассмотренного выше случая нелинейности фокусирующего типа, решения (17) и (19) являются здесь вполне самостоятельными и не могут быть получены как некие асимптотики решения (23). Хотя при

$$I_0 \to 2\big[\beta + \varphi_0'^2 - |\varphi_0'|\big(2\beta + \varphi_0'^2\big)^{1/2}\big] \tag{25}$$

решение (23) и становится апериодическим (уединенным),

$$Y(z) = \pm\big[I_0 + \Delta I\tanh^2(\gamma z)\big]^{1/2}$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\left[\varphi_0 + \varphi_0' I_0\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_0 + \Delta I\tanh^2(\gamma z)}\right]\right\}, \tag{26}$$
$$\Delta I = \gamma^2 = -2\beta - 3\varphi_0'^2 + 3|\varphi_0'|\big(2\beta + \varphi_0'^2\big)^{1/2},$$

оно кардинально отличается от темного солитона (19). Поскольку и в этом случае должно быть выполнено условие $\varphi_0'^2 \geqslant 2\beta/3$, функция $X(z)$ в (26) не меняет свой знак. И лишь в области

$$2\beta \geqslant \varphi_0'^2 \geqslant \frac{2\beta}{3} \tag{27}$$

при $I_0 \to \beta - \varphi_0'^2/2$ решения (23) и (21) совпадают.

Во-вторых, за счет того, что точка $z = 0$ является одной из тех точек z_n (20), в которых происходит «сшивание» кусков решений, принадлежащих двум разным ветвям (6), решения первого типа ((17) и (19)) оказываются определенными через граничное условие

$$\left.\frac{\partial X}{\partial z}\right|_{z=0} = \pm[\Delta I(2\beta - \Delta I)]^{1/2} \quad \text{при} \quad \beta \geqslant \Delta I \geqslant 0, \tag{28}$$

которое легко может быть пересчитано в граничное условие для X и I в сдвинутой на расстояние

$$\frac{z_1}{2} = \frac{K\big([\Delta I/(2\beta - \Delta I)]^{1/2}\big)}{(2\beta - \Delta I)^{1/2}}$$

по оси z точке. Как мы увидим ниже, это обстоятельство не является случайным.

4. Переход от одного типа нелинейности к другому

Предположим, что мы, зная решение уравнения (1) либо (15) (для нелинейностей фокусирующего либо дефокусирующего типа соответственно), записанное в форме

$$Y_1(z) = Y[\mathrm{sn}(z,k), \mathrm{cn}(z,k), \mathrm{dn}(z,k)], \tag{29}$$

хотим построить решение $Y_2(z)$ для нелинейности другого типа. В (29) и далее мы будем в явном виде записывать как первый (z), так и второй (k) аргументы эллиптических функций. Построить такое решение можно необычным способом, т. к. формальная замена $z \to \mathrm{i}z$

обеспечивает необходимое изменение знака первого члена в (1) и (15), что и позволяет перейти от одного случая к другому. Однако, для того чтобы у функций $\mathrm{sn}(z,k)$, $\mathrm{cn}(z,k)$ и $\mathrm{dn}(z,k)$ на комплексной плоскости при этом не появилось особых точек $z_{mn} = 2mK + \mathrm{i}(2n+1)K'$ [33], нам придется усложнить эту процедуру и провести ее в три последовательных этапа. Здесь $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $K' = K(k')$; $k' = (1-k^2)^{1/2}$.

Сначала мы определим еще одно решение $\tilde{Y}_1(z)$, полностью эквивалентное (29), сдвинув $Y(z)$ вдоль оси z на расстояние $K(k)$, т. е. проведя замену $z \to z + K(k)$. При этом [33]

$$\mathrm{sn}(z,k) \to \mathrm{sn}[z+K(k),k] = \frac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)},$$

$$\mathrm{cn}(z,k) \to \mathrm{cn}[z+K(k),k] = -k'\,\frac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}, \tag{30}$$

$$\mathrm{dn}(z,k) \to \mathrm{dn}[z+K(k),k] = \frac{k'}{\mathrm{dn}(z,k)}$$

и

$$Y_1(z) \to \tilde{Y}_1(z) = Y\left[\frac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}, -k'\,\frac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}, \frac{k'}{\mathrm{dn}(z,k)}\right]. \tag{31}$$

Перейдем теперь на комплексную плоскость, сделав замену $z \to \mathrm{i}z$. После чего получим [33]

$$\mathrm{sn}(z,k) \to \mathrm{sn}[\mathrm{i}z+K(k),k] = \frac{1}{\mathrm{dn}(z,k')},$$

$$\mathrm{cn}(z,k) \to \mathrm{cn}[\mathrm{i}z+K(k),k] = -\mathrm{i}k'\,\frac{\mathrm{sn}(z,k')}{\mathrm{dn}(z,k')}, \tag{32}$$

$$\mathrm{dn}(z,k) \to \mathrm{dn}[\mathrm{i}z+K(k),k] = k'\,\frac{\mathrm{cn}(z,k')}{\mathrm{dn}(z,k')}$$

и

$$Y_1(z) \to \tilde{Y}_2(z) =$$
$$= Y\left[\frac{1}{\mathrm{dn}(z,k')}, -\mathrm{i}k'\,\frac{\mathrm{sn}(z,k')}{\mathrm{dn}(z,k')}, k'\,\frac{\mathrm{cn}(z,k')}{\mathrm{dn}(z,k')}\right], \tag{33}$$

где $\tilde{Y}_2(z)$ удовлетворяет уже уравнению для другого типа нелинейности. Сдвинем теперь решение (33) вдоль мнимой оси этой плоскости, проведя замену $\mathrm{i}z \to \mathrm{i}[z+K(k')]$. Тогда [33]

$$\mathrm{sn}(z,k) \to \mathrm{sn}\{\mathrm{i}[z+K(k')]+K(k),k\} = \frac{1}{k}\,\mathrm{dn}(z,k'),$$

$$\mathrm{cn}(z,k) \to \mathrm{cn}\{\mathrm{i}[z+K(k')]+K(k),k\} = -\mathrm{i}\frac{k'}{k}\,\mathrm{cn}(z,k'), \tag{34}$$

$$\mathrm{dn}(z,k) \to \mathrm{dn}\{\mathrm{i}[z+K(k')]+K(k),k\} = -k'\,\mathrm{sn}(z,k')$$

и

$$Y_1(z) \to Y_2(z)$$
$$= Y\left[\frac{1}{k}\,\mathrm{dn}(z,k'), -\mathrm{i}\,\frac{k'}{k}\,\mathrm{cn}(z,k'), -k'\mathrm{sn}(z,k')\right]. \tag{35}$$

Собственно на этом задачу, сформулированную в начале этого раздела, можно считать уже выполненной, т. к. искомое решение $Y_2(z)$ для одного типа нелинейности в явном виде (35) выражено через решение $Y_1(z)$ для другого типа нелинейности. Как мы видим, процедура, обеспечивающая такой переход, просто сводится к формальной замене в уже известном решении одного набора «базисных» эллиптических функций

$$\{\mathrm{sn}(z,k), \mathrm{cn}(z,k), \mathrm{dn}(z,k)\}$$

другим набором

$$\left\{\frac{1}{k}\,\mathrm{dn}(z,k'), -\mathrm{i}\,\frac{k'}{k}\,\mathrm{cn}(z,k'), -k'\mathrm{sn}(z,k')\right\}.$$

Отметим, что решения $\tilde{Y}_{1,2}(z)$, отвечающие разным типам нелинейности, в отличие от решений $Y_{1,2}(z)$ не имеют на комплексной плоскости особых точек и полностью эквивалентны. Это значит, что для функций $\tilde{Y}_{1,2}(z)$ выполнены одни и те же граничные условия, соответствующие, правда, сдвинутой по отношению к решениям (7), (9), (11), (12), (17), (21) и (23) вдоль оси z на расстояние $K(k)$ точке. Поэтому уединенные решения (13), (19) и (26), к сожалению, определены в данном случае лишь асимптотически ($k \to 1$ и $K \to \infty$), т. е. через условия, записанные для бесконечно удаленной плоскости $z_0 \to -\infty$. Необходимый пересчет граничных условий легко может быть при этом проведен с использованием интеграла (3). Заметим также, что, хотя общее выражение (5) для фазы при переходе $\tilde{Y}_1(z) \to \tilde{Y}_2(z)$ не меняется, области существования решений $\tilde{Y}_{1,2}(z)$ могут различаться, т. к. замена $z \to \mathrm{i}z$ требует замены $\varphi_0'^2 \to -\varphi_0'^2$.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе определены области существования комплексных периодических частных решений стационарного НУШ, которые могут быть получены, например, при коллинеарном параметрическом взаимодействии трех плоских монохроматических волн (мод) в среде с квадратичной нелинейностью [30]. Показано, что если у такого решения существует хотя бы одна точка $z = z_0$, для которой $X|_{z=z_0} = 0$ и $(\partial X/\partial z)|_{z=z_0} \neq 0$, то для всех остальных точек на оси z, в которых $X(z) \neq 0$, производная фазы φ становится равной нулю, и поэтому фаза постоянна. Рассмотрены асимптотики таких решений и описана формальная процедура (замена одного набора «базисных» эллиптических функций другим), позволяющая по известному решению для нелинейности какого-то одного (фокусирующего либо дефокусирующего) типа построить решение, отвечающее нелинейности другого (дефокусирующего либо фокусирующего) типа. Аналогичные замены, обеспечивающие переход между задачами преобразования частоты вверх и вниз и кардинально меняющие формы записи решений этого класса, отвечают простому сдвигу таких решений вдоль оси z.

Подчеркнем, что за исключением нескольких асимптотик (11)–(13) и (17), (19) все приведенные выше решения при переходе к вещественным переменным (квадратурным компонентам) описывают невырожденные кноидальные волны, угол проецирования модуля результирующего поля которых, формирующий две их составляющие, в отличие от периодических решений так называемого Манаковского типа [34], совершает сложные нелинейные колебания. Отметим также, что любое из этих решений можно получить прямым интегрированием уравнений (1) и (15) с использованием стандартных для задачи параметрического преобразования частоты, но весьма громоздких процедур [31]. При этом используемая нами форма (6) этих решений может быть получена строго. Поскольку ряд точных аналитических решений задачи параметрического взаимодействия, сформулированной, правда, в форме системы связанных нелинейных уравнений, а не НУШ вида (1) и (15), ранее неоднократно обсуждался, ознакомиться с характером согласованных нелинейных колебаний модуля и фазы поля, отвечающих этим частным случаям, можно в соответствующих публикациях [32].

С учетом того, что НУШ, учитывающее каскад протекающих на кубической безынерционной нелинейности процессов, имеет достаточно универсальный характер, можно ожидать, что описанные выше периодические решения могут оказаться полезными и в других разделах физики. На наш взгляд, одним из перспективных с этой точки зрения приложений данных решений является задача распространения по оптическим волокнам цугов лазерных импульсов, модулированных по фазе информационным сигналом либо за счет так называемого чирпа.

1. Давыдов А.С. *Солитоны в молекулярных системах* (Киев: Наукова думка, 1984).
2. Давыдов А.С. *Высокотемпературная сверхпроводимость* (Киев: Наукова думка, 1990).
3. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996).
4. Kneubuhl F.K. *Oscillations and Waves* (Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1998).
5. Remoissenet M. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments* (Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1999).
6. Kamchatnov A.M. *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations: An Introductory Course* (Singapore: World Scientific, 2000).
7. *Spatial Solitons*. Ed. by S.Trillo, W.Torruellas (Berlin – Heidelber – New York: Springer-Verlag, 2001).
8. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003).
9. Кившарь Ю.С. *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
10. Dauxois T., Peyrard M. *Physics of Solitons* (New York: Cambridge University Press, 2006).
11. Захаров В.Е., Манаков С.В. *ТМФ*, **19** (3), 332 (1974); Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Функциональный анализ и его приложения*, **8** (3), 43 (1974).
12. Манаков С.В. *УМН*, **31** (5), 245 (1976).
13. Итс А.Р. *Вестник ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия*, **7**, (2), 39 (1976).
14. Hirota R., in *Lecture Notes in Mathematics* (Berlin: Springer-Verlag, 1976, vol. 515, p. 40 – 68).
15. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. *ДАН СССР*, **229** (1), 15 (1976); Кричевер И.М. *УМН*, **32** (6), 183 (1977).
16. Trubowitz E. *Commun. Pure Appl. Math.*, **30** (3), 321 (1977).
17. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980).
18. Чередник И.В. *ДАН СССР*, **252** (5), 1104 (1980).
19. Ma Y.C., Ablowitz M.J. *Stud. Appl. Math.*, **65** (2), 113 (1981).
20. Flaschka H., Newell A.C. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **3** (1-2), 203 (1981).
21. Белоколос Е.Д., Бобенко А.И., Матвеев В.Б., Энольский В.З. *УМН*, **41** (2), 3 (1986); Белоколос Е.Д., Энольский В.З. *Функциональный анализ и его приложения*, **21** (1), 70 (1987).
22. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987).
23. Tracy E.R., Chen H.H., Lee Y.C. *Phys. Rev. Lett.*, **53** (3), 218 (1984).
24. Chowdhury A.R., Paul S., Sen S. *Phys. Rev. D*, **32** (12), 3233 (1985).
25. Previato E. *Duke Math. J.*, **52** (2), 329 (1985).
26. Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **30** (10), 1249 (1987).
27. Mihalache D., Lederer F., Baboiu D.-M. *Phys. Rev. A*, **47** (4), 3285 (1993).
28. Korneev N., Rodriguez E. *Opt. Express*, **12** (15), 3297 (2004).
29. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37** (6), 561 (2007).
30. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37** (3), 266 (2007).
31. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127** (6), 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах. Проблемы нелинейной оптики 1961 – 1963* (М.: Изд-во ВИНИТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966).
32. Kobyakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54** (4), 3455 (1996); Liu Xueming, Zhang Hanyi, Zhang Mingde. *Opt. Express*, **10** (1), 83 (2002).
33. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
34. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60** (1), 1009 (1999); Выслоух В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **28** (7), 55 (1999).