

Алгоритм восстановления распределения фазы поля при измерениях датчиком Гартмана

В.В.Кийко, В.И.Кислов, Е.Н.Офицеров

Описан новый метод восстановления волнового фронта, основанный на измерении распределений интенсивности пучка в двух поперечных сечениях и наклонов волнового фронта датчиком Гартмана в одном из этих сечений, позволяющий найти распределение фазы поля с учетом ее возможных скачков. Разработан итерационный алгоритм нахождения этого распределения и представлено математическое описание алгоритма, основанное на расчете поля в приближении Френеля. Проведены численные исследования предложенного алгоритма. Получены соотношения для оценки оптимальных параметров измерительной системы, в частности для расстояния между поперечными сечениями пучка и числа субапертур датчика Гартмана, в зависимости от модового состава лазерного излучения.

Ключевые слова: распределение фазы поля лазерного пучка, датчик Гартмана, волновой фронт, распределение интенсивности излучения.

1. Введение

Известен ряд работ, посвященных изучению свойств датчика Гартмана (ДГ) [1–4] и проблеме максимально эффективного восстановления пространственного распределения фазы лазерного излучения с его помощью [5–9]. Основное внимание в указанных работах уделяется минимизации ошибок при определении центров тяжести световых пятен гартманограммы [1, 4, 8], а также разработке точного и быстрого алгоритма восстановления фазового распределения излучения [1, 5, 9].

Точность восстановления волнового фронта по измерениям с помощью ДГ ограничивается дискретностью отсчетов. С использованием ДГ можно получить информацию о наклонах волнового фронта, т. е. о градиенте функции распределения фазы. Однако при этом теряется информация о возможных скачках (разрывах первого рода) фазы. Соответствующие ошибки остаются и при увеличении числа отсчетов ДГ. В результате погрешность в определении расходимости лазерного пучка при измерениях ДГ может достигать 20 % – 60 %.

Скачки фазы присущи лазерному излучению даже в случае идеальной оптической системы (с плоскосферической оптикой) [10]. К примеру, скачки фазы на π рад имеют все моды открытого резонатора, кроме моды TEM_{00} . Это связано с тем, что величина поля указанных мод может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При этом смена знака поля эквивалентна скачку фазы на π рад.

Отметим, что для восстановления волнового фронта при измерении ДГ требуется дополнительная информация о лазерном излучении, поскольку восстановление

фазы только по двум распределениям интенсивности в общем случае неоднозначно. К примеру, пусть распределение интенсивности в первом сечении по ходу пучка – четная функция координат $I_0(\rho) = I_0(-\rho)$ (ρ – координата точек в первом сечении). Воспользуемся приближением Френеля – Кирхгофа для описания распространения пучка. Учтем, что операция фазового сопряжения не меняет распределения интенсивности поля в обоих сечениях. Тогда несложно установить, что пучки с фазовыми распределениями $\varphi_0(\rho)$ и $-\varphi_0(-\rho) - \rho^2 k/z$ (k – волновое число, z – расстояние до второго сечения по ходу пучка) формируют одно и то же распределение интенсивности $I_z(\rho)$ во втором по ходу пучка сечении. Неоднозначность может быть исключена с помощью дополнительной информации о распределении фазы в одном из сечений, получаемой из измерений ДГ.

В настоящей работе предложен новый метод восстановления волнового фронта на основе измерений с помощью ДГ при использовании дополнительной информации о распределении интенсивности пучка в двух поперечных сечениях. Алгоритм позволяет найти распределение фазы с учетом ее возможных скачков.

2. Обоснование алгоритма и основные расчетные соотношения

Сравним для примера расчетное распределение интенсивности в фокусе оптической системы, полученное исходя из реального распределения поля на входе оптической системы, и распределение, полученное по результатам измерения ДГ с использованием модального алгоритма [6, 7]. На рис.1, 2 представлены распределения интенсивности в дальней зоне для мод TEM_{11} и TEM_{22} . При восстановлении распределения фазы с применением модального алгоритма расчетное распределение интенсивности в дальней зоне, как видно из рис.1,б и 2,б, существенно отличается от реального (рис.1,а и 2,а).

Алгоритмы восстановления распределения фазы [1, 6–8], основанные на измерениях локальных наклонов

В.В.Кийко, В.И.Кислов, Е.Н.Офицеров. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: hkww@ran.gpi.ru, oficerov@ran.gpi.ru

Поступила в редакцию 28 мая 2007 г., после доработки – 29 октября 2007 г.

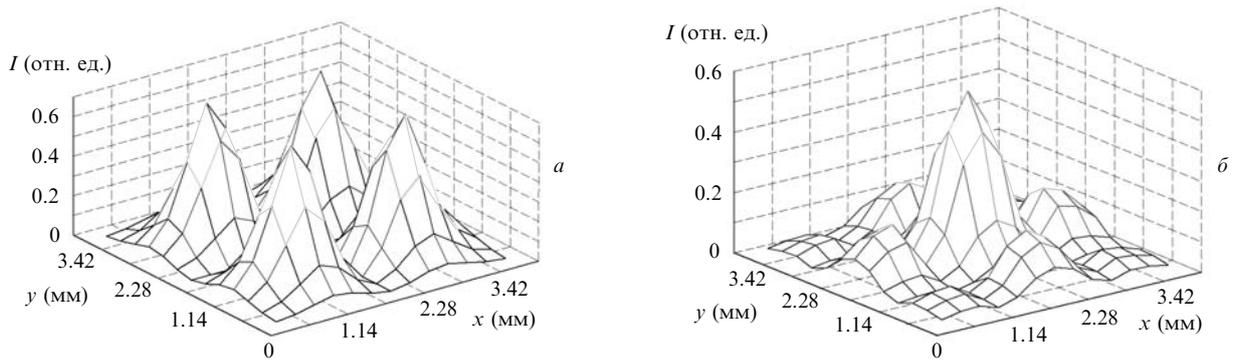


Рис.1. Распределение интенсивности I сфокусированного пучка моды TEM_{11} (а) и то же распределение, полученное с помощью традиционного алгоритма восстановления фазы (б).

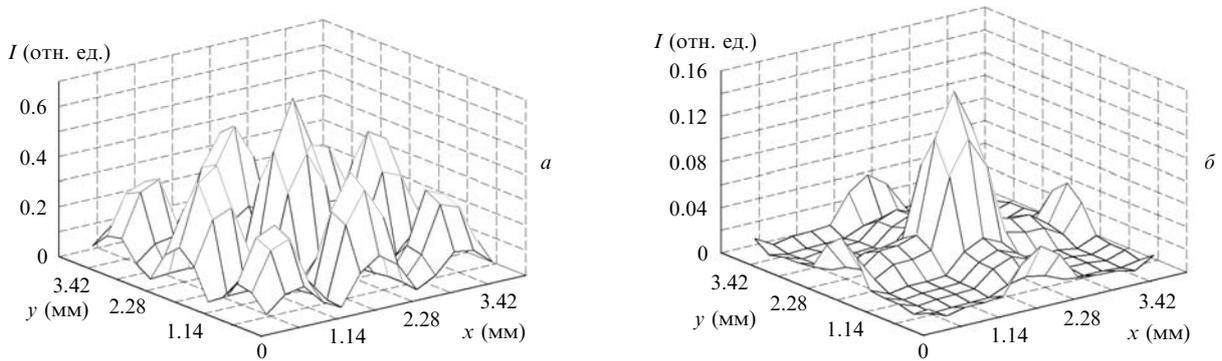


Рис.2. Распределение интенсивности I сфокусированного пучка моды TEM_{22} (а) и то же распределение, полученное с помощью традиционного алгоритма восстановления фазы (б).

волнового фронта, не могут учесть скачки в распределении фазы. Соответственно расчетный диаметр пучка в фокусе оптической системы, определенный на основе таких алгоритмов восстановления, оказывается в 1.5–2 раза меньше реального.

Рассмотрим возможность восстановления волнового фронта излучения по результатам измерения характеристик поля в двух поперечных сечениях пучка, расстояние между которыми равно z .

Пусть в сечении 1 по ходу пучка измеряется только распределение интенсивности пучка $I_0(\rho)$. Одновременно в сечении 2 измеряются распределение интенсивности $I_z(r)$ и, с помощью ДГ, угловые наклоны волнового фронта $\Theta_z(r)$. В приближении Френеля [11] связь между полями в рассматриваемых плоскостях может быть записана в виде

$$\int \int [I_0(\rho)]^{1/2} \exp[i\varphi_0(\rho)] K(\rho, r) d^2\rho = [I_z(r)]^{1/2} \exp[i\varphi_z(r)], \tag{1}$$

где $\varphi_0(\rho)$ и $\varphi_z(r)$ – распределения фазы поля в сечениях 1 и 2 соответственно; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны излучения;

$$K(\rho, r) = \frac{k}{2i\pi z} \exp \left[\frac{ik}{2z} (\rho - r)^2 + ikz \right]$$

– ядро интеграла Френеля. В соотношении (1) предполагается, что $\varphi_z(r)$ в сечении 2 восстановлено из угловых наклонов $\Theta_z(r) = \text{grad}(\varphi_z(r))/k$ волнового фронта излучения.

Справедливо также соотношение

$$\int \int [I_z(r)]^{1/2} \exp[i\varphi_z(r)] K^*(r, \rho) d^2r = [I_0(\rho)]^{1/2} \exp[i\varphi_0(\rho)]. \tag{2}$$

Здесь звездочка обозначает операцию комплексного сопряжения. В выражении (2) учитывается принцип обратимости хода лучей. Из (2) следует, что

$$\left| \int \int [I_z(r)]^{1/2} \exp[i\varphi_z(r)] K^*(r, \rho) d^2r \right| = [I_0(\rho)]^{1/2}. \tag{3}$$

Соотношение (3) справедливо в случае идеальных измерений. Как отмечалось выше, в реальных условиях при дискретных измерениях функция $\varphi_z(r)$ не всегда может быть восстановлена из $\Theta_z(r)$. Поэтому (3) может рассматриваться как уравнение для уточнения частично известного распределения фазы поля. При этом искомую функцию распределения фазы целесообразно представить в виде суммы:

$$\varphi_z(r) = \varphi_c(r) + \varphi_s(r), \tag{4}$$

где $\varphi_c(r)$ – непрерывная функция, которая может быть восстановлена исходя из наклонов волнового фронта по известным алгоритмам [6, 7]; $\varphi_s(r)$ – разрывная функция, учитывающая возможные скачки фазы и рассчитываемая с учетом распределений интенсивности $I_z(r)$, $I_0(\rho)$ по соотношению (3).

При решении задачи восстановления распределения фазы $\varphi_z(r)$ в сечении 2 распределения интенсивности $I_z(\rho)$,

$I_0(\mathbf{r})$ считаются известными из эксперимента, а фаза $\varphi_z(\boldsymbol{\rho})$ – известной частично, с точностью до возможных скачков.

Для решения уравнения (3) предлагается итерационный алгоритм, реализуемый в несколько шагов:

1. Распределение поля $[I_z(\mathbf{r})]^{1/2} \exp[i\varphi_z(\mathbf{r})]$ в сечении 2 корректируется с помощью фазовой добавки $\varphi_s(\mathbf{r})$, учитывающей возможные скачки фазы.

2. На основе (2) рассчитывается поле $[I_0(\boldsymbol{\rho})]^{1/2} \times \exp[i\varphi_0(\boldsymbol{\rho})]$ в сечении 1.

3. Рассчитанное на шаге 2 поле корректируется так, что новое поле получает измеренное распределение интенсивности $I_0(\boldsymbol{\rho})$, а распределение фазы остается таким же, как на шаге 2.

4. На основе (1) рассчитывается поле в сечении 2.

5. Вычисляется параметр, оценивающий степень схожести двух полей – рассчитанного на шаге 4 и использованного на шаге 1.

6. Если сравниваемые распределения полей достаточно схожи, то поиск решения прекращается и в качестве восстановленного распределения фазы принимается поле, полученное на шаге 4.

7. Если сравниваемые поля существенно различаются, то повторяется шаг 1. При этом в расчетах используется новое поле в сечении 2, которое имеет распределение фазы, рассчитанное на шаге 4; интенсивность этого поля равна измеренной интенсивности $I_z(\mathbf{r})$.

Далее в соотношениях (1)–(4) перейдем к дискретному представлению алгоритма с учетом параметров измерительной системы. Введем следующие обозначения: ρ_m, r_n – координаты центров субапертур, в пределах которых измеряются параметры лазерного пучка в сечениях 1 и 2 соответственно; $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$ – число субапертур.

После выполнения итерации $p = 1, 2, \dots, P$ (p – номер текущей итерации, P – номер последней итерации) становится известным распределение поля $U_z^{(p)}(\mathbf{r})$. Если итерационный процесс прекращается, то восстановленным распределением фазы является

$$\varphi_z(\mathbf{r}) = \arg U_z^{(p)}(\mathbf{r}). \quad (5)$$

При продолжении итерационного процесса на шаге $p + 1$ рассчитываются корректирующая фазовая добавка

$$\varphi_s^{(p+1)}(\mathbf{r}_n) = \arg U_z^{(p+1)}(\mathbf{r}_n) \quad (6)$$

и поле $U_0^{(p+1)}$ в сечении 1

$$U_0^{(p+1)}(\boldsymbol{\rho}_m) = \sum_{n=1}^N f_n^{(p+1)} [I_z(\mathbf{r}_n)]^{1/2} K_{nm}(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\rho}_m), \quad (7)$$

где

$$f_n^{(p+1)} = \exp [i\varphi_s^{(p+1)}(\mathbf{r}_n)];$$

$$K_{nm}(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\rho}_m) = -\frac{ik}{2\pi z} \int_{S_z(n)} \exp(-ikz) \times$$

$$\times \exp \left[-ik\boldsymbol{\Theta}_z(\mathbf{r}_n)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \frac{ik}{2\pi z} (\mathbf{r} + \mathbf{r}_n - \boldsymbol{\rho}_m)^2 \right] d^2\mathbf{r};$$

$\boldsymbol{\Theta}_z(\mathbf{r}_n)$ – измеренный вектор угловых наклонов; $S_z(n)$ – площадь субапертуры с центром ρ_n в сечении 2. В соотно-

шении (7) предполагается, что аппроксимация распределения фазы $\varphi_z^{(p+1)}$ в пределах n -й субапертуры является линейной:

$$\varphi_z^{(p+1)}(\mathbf{r}) = \varphi_s^{(p+1)}(\mathbf{r}_n) + k\boldsymbol{\Theta}_z(\mathbf{r}_n)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (8)$$

На следующем шаге рассчитывается поле $U_z^{(p+1)}$ в сечении 2:

$$U_z^{(p+1)}(\mathbf{r}_m) = \sum_{m=1}^M g_m^{(p+1)} [I_0(\boldsymbol{\rho}_m)]^{1/2} L_{nm}(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\rho}_m), \quad (9)$$

где

$$g_m^{(p+1)} = \arg U_0^{(p+1)}(\boldsymbol{\rho}_m);$$

$$L_{nm}(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\rho}_m) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{S_0(m)} \exp(ikz) \exp \left[\frac{ik}{2z} (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{r}_n) \right]^2 d^2\mathbf{r};$$

$S_0(m)$ – площадь субапертуры с центром r_m в сечении 1. Далее итерационный процесс может быть остановлен или продолжен с учетом (5) и (6) соответственно.

Необходимо уточнить первый шаг итерационного процесса. На этом шаге фазовая добавка $\varphi_s^{(1)}(\mathbf{r}_n)$ задается как случайная величина с шириной области значений не меньше π рад. Дальнейшие расчеты ведутся по формулам (7)–(9) для $p = 0$.

Критерием качества восстановления волнового фронта является малость среднего квадрата разности фаз, рассчитанного в двух соседних итерациях (p и $p + 1$):

$$\sigma_p^2 = \sum_{n=1}^N [I_z(\mathbf{r}_n)]^{1/2} [\varphi_z^{(p+1)}(\mathbf{r}_n) - \varphi_z^{(p)}(\mathbf{r}_n)]^2 / \sum_{n=1}^N [I_z(\mathbf{r}_n)]^{1/2}. \quad (10)$$

При увеличении числа итераций значение σ_p^2 должно приближаться к нулю.

Погрешность восстановления распределения фазы при использовании рассматриваемого итерационного алгоритма связана с переходом от интегрирования в (1)–(3) к суммированию в (6)–(9). При этом на каждый локальный максимум распределений интенсивности $I_0(\boldsymbol{\rho})$ и $I_z(\mathbf{r})$ должно приходиться не менее трех точек измерения. Для того чтобы было восстановлено распределение фазы лазерной моды ТЕМ_{kl}, необходимо выполнение условия

$$\min(\sqrt{N}; \sqrt{M}) \geq 3[(k+1)(l+1)]^{1/2}, \quad (11)$$

где N и M – число субапертур в сечениях 1 и 2 соответственно. В соотношении (10) учитывается, что число локальных максимумов распределения интенсивности для моды ТЕМ_{kl} равно $(k+1)(l+1)$.

Кроме того, корректное восстановление фазы возможно только при условии, что субпучки (соответствующие субапертурам в сечениях 1 и 2) при распространении от одного сечения до второго обмениваются энергией. Это требование удовлетворяется, если уширение субпучка за счет дифракции на краях субапертуры превышает полуширину пучка, т. е.

$$\frac{\lambda}{a\sqrt{N}} z \geq 2a, \text{ или } z \geq \frac{a^2}{\lambda} \frac{2}{\sqrt{N}}, \quad (12)$$

где a – размер субапертуры.

Соотношения (5)–(10) дают полное описание рассматриваемого алгоритма. Точность и эффективность предлагаемого итерационного алгоритма были исследованы численно.

3. Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент был организован следующим образом. Вначале задавались распределения интенсивности поля $I_z(\mathbf{r})$ и $\varphi_z(\mathbf{r})$ в сечении 2. Затем рассчитывались распределение поля $U_0(\rho)$ и интенсивность $I_0(\rho) = |U_0(\rho)|^2$ в сечении 1. Далее, как и в реальном процессе измерений и восстановления распределения фазы, принималось, что известны дискретные значения интенсивности $I_0(\rho)$, $I_z(\mathbf{r})$ пучка в двух сечениях и дискретные значения наклонов волнового фронта $\Theta_z(t) = k^{-1} \times d[\varphi_c(\mathbf{r})]/d\mathbf{r}$ в одном из сечений. Качество восстановления волнового фронта оценивалось по величине $S_p = (\sigma_p^2)^{1/2}$, характеризующей отклонение восстановленного волнового фронта от истинного.

В вычислительном эксперименте варьировались $I_z(\mathbf{r})$, $\varphi_z(\mathbf{r})$, расстояние z между сечениями, число отсчетов в ДГ и распределение интенсивности излучения в сечении 1. Центры субапертур находились в узлах квадратной сетки, при этом число измерений в обоих сечениях было одним и тем же ($N = M$). Распределение поля в сечении 2 задавалось в следующем виде:

$$U_z(\mathbf{r}) = A_{kl}(\mathbf{r}) \exp[i\varphi_c(\mathbf{r})], \quad (13)$$

$$A_{kl}(\mathbf{r}) = \exp\left(-2 \frac{x^2 + y^2}{b^2}\right) H_k\left(\frac{x}{b}\right) H_l\left(\frac{y}{b}\right), \quad (14)$$

где $H_{k(l)}(x, y/b)$ – полиномы Эрмита порядка $k, l = 0, 1, 2, \dots$; $\mathbf{r} = (x, y)$; $2a = 4$ мм – размер квадратной апертуры ДГ; $b = (0.7 - 1)a$; $\lambda = 1064$ нм. Функция распределения фазы $\varphi_c(\mathbf{r})$ принималась в форме многочлена от (x, y) с амплитудой изменения до ~ 10 рад. Скачки фазы $\varphi_s(\mathbf{r})$ при этом связаны только с изменением знака функции $A_{kl}(\mathbf{r})$ в зависимости от \mathbf{r} , $\varphi_s(\mathbf{r}) = \text{arg}(A_{kl}(\mathbf{r}))$. Отдельные результаты расчетов представлены на рис.3–5. Восстановленные распределения интенсивности мод TEM_{11} и TEM_{22} совпадают с приведенными на рис.1,а и 2,а соответственно. На рис.3,а, б, 4,б и 5,б представлена восстановленная функция $\varphi_s(\mathbf{r})$. Как показывают численные расчеты и рис.3–5, восстановленные параметры лазерного пучка находятся в согласии с заданными.

В вычислительном эксперименте изучалась зависимость S_p от числа отсчетов ДГ, вида функции $U_z(\mathbf{r})$ и числа итераций при различных зависимостях $\varphi_z(\mathbf{r})$. Из анализа результатов расчета S_p и рис.6 видно, что с ростом числа итераций ошибка восстановления начинает флуктуировать около некоторого остаточного среднего уровня. Необходимое для выхода на этот уровень число итераций P составляет ~ 100 . Величина остаточной ошибки при этом зависит также от индексов k и l : она становится меньше с ростом числа итераций и больше с ростом индексов k и l .

Полученные результаты подтверждают справедливость оценочного соотношения (11). Необходимо отметить также, что скорость сходимости алгоритма существенно зависит от начального распределения $\varphi_z^{(1)}(\mathbf{r})$. Для увеличения скорости сходимости в качестве $\varphi_z^{(1)}(\mathbf{r})$ целесообразно использовать случайную функцию со среднестатистическим значением, равным «сглаженной» функции распределения фазы, которая может быть получена

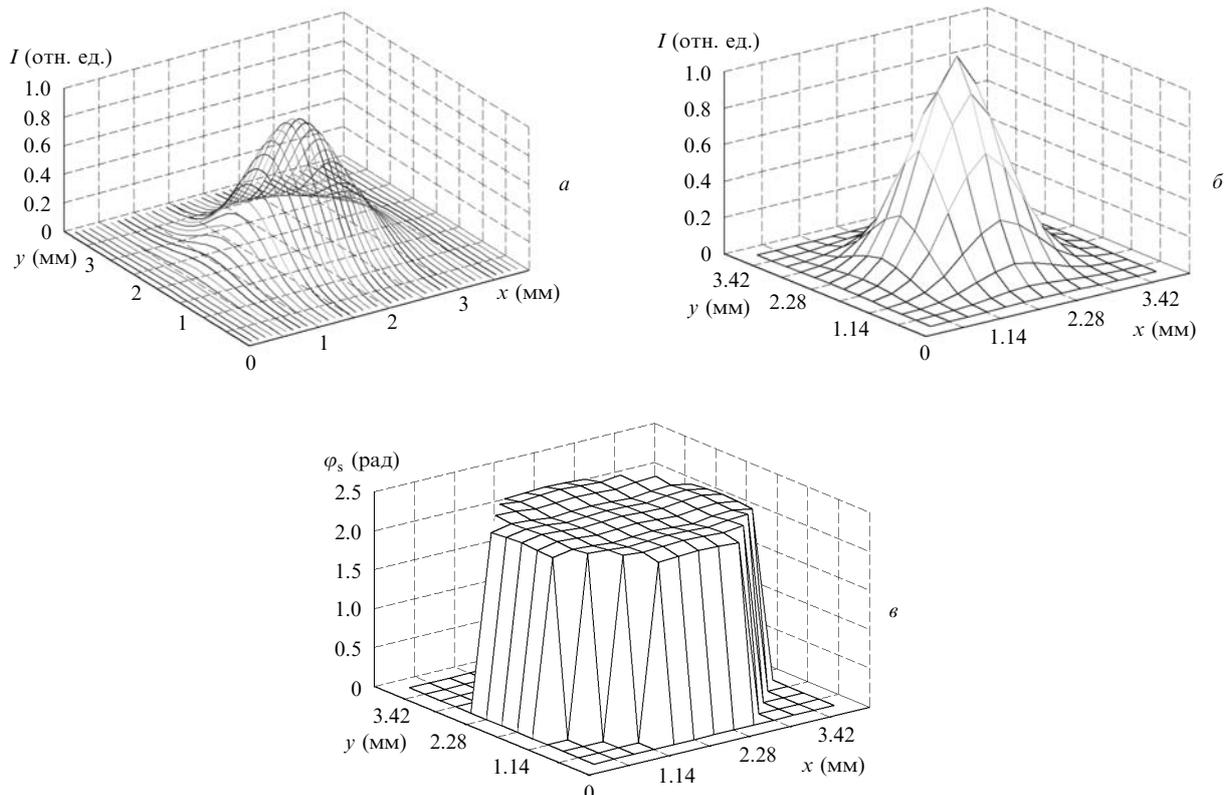


Рис.3. Заданное (а) и восстановленное (б) распределения интенсивности моды TEM_{00} , а также восстановленное распределение фазы поля φ_s моды TEM_{00} (в).

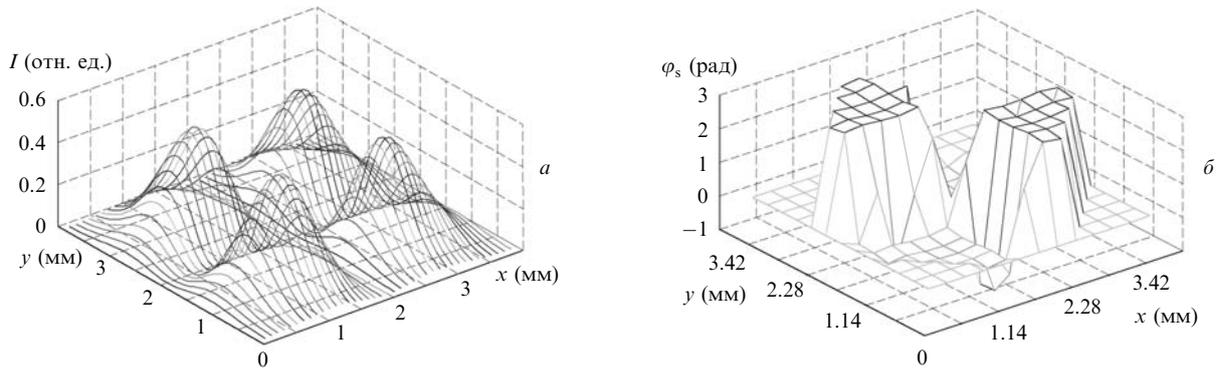


Рис.4. Заданное (а) и восстановленное (б) распределения интенсивности моды TEM_{11} .

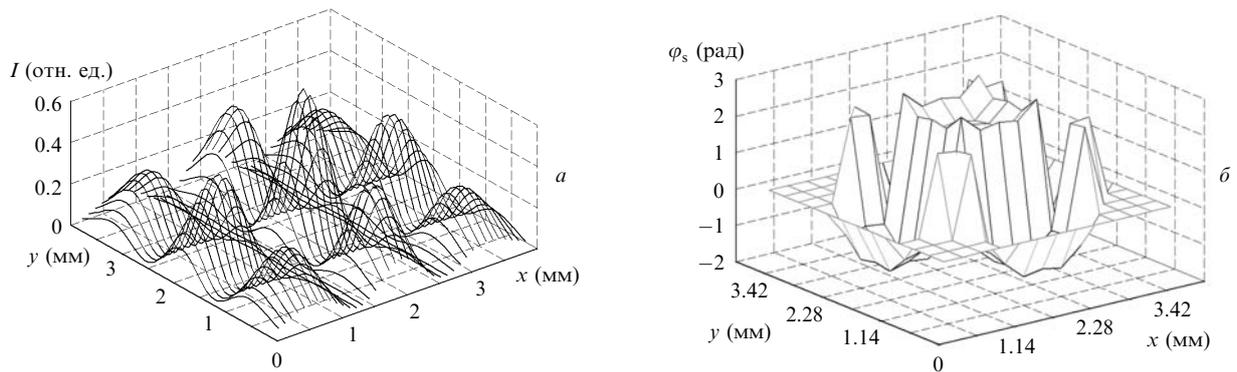


Рис.5. Заданное (а) и восстановленное (б) распределения интенсивности моды TEM_{22} .

при восстановлении фазы одним из известных алгоритмов [1, 6, 7].

Также исследовалась зависимость среднего уровня S_p от нормированного расстояния W , где $W = z\lambda/a^2$ (рис.7). Как и следовало ожидать, при малых $W = 2/\sqrt{N}$ ошибка восстановления существенно больше остаточного среднего уровня, который достигается при $W \approx 0.3$. Этот результат согласуется с соотношением (12).

Целесообразно продемонстрировать динамику восстановления распределения фазы поля лазерного излучения. Распределения фазы $\varphi_s(r)$ при $n = 13$ на примере лазерной моды TEM_{22} представлены на рис.8 (число итераций 10 и 100) и на рис.5,б для $P = 1000$.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что разработанный в данной работе алгоритм учитывает особенности лазерного пучка, связанные с возможными скачками фазы, и обеспечивает достаточное

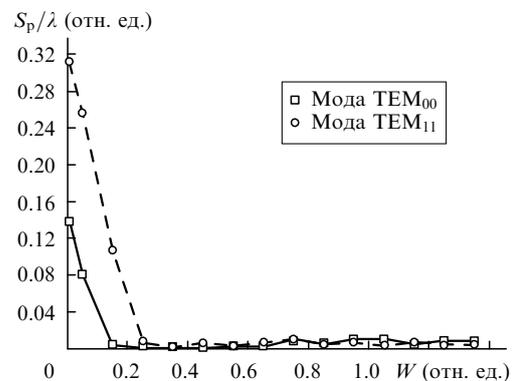


Рис.7. Зависимость S_p от $W = z\lambda/a^2$ при $P = 1000$.

для практического использования качество восстановления волнового фронта.

4. Выводы

Предложен новый метод восстановления волнового фронта на основе измерений наклонов волнового фронта датчиком Гартмана с использованием информации о распределении интенсивности пучка в двух поперечных сечениях. Основное отличие представленного алгоритма от ранее разработанных заключается в учете возможных скачков фазы поля. Предложен итерационный алгоритм нахождения распределения фазы поля, основанный на расчете поля в приближении Френеля. Проведены численные исследования предложенного алгоритма, которые позволили получить соотношения для оценки оптимальных параметров измерительной системы, в частности для расстояния между поперечными сечениями пучка

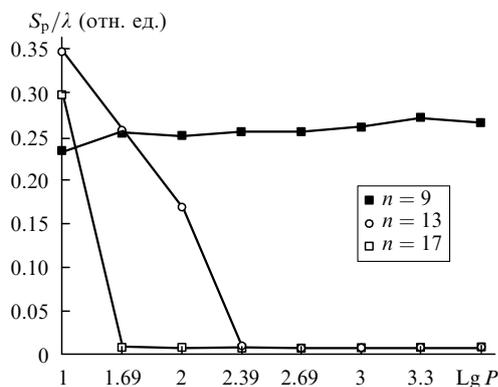


Рис.6. Зависимость S_p от числа P итераций для моды TEM_{22} при нескольких значениях числа отсчетов n ($z = 0.25$).

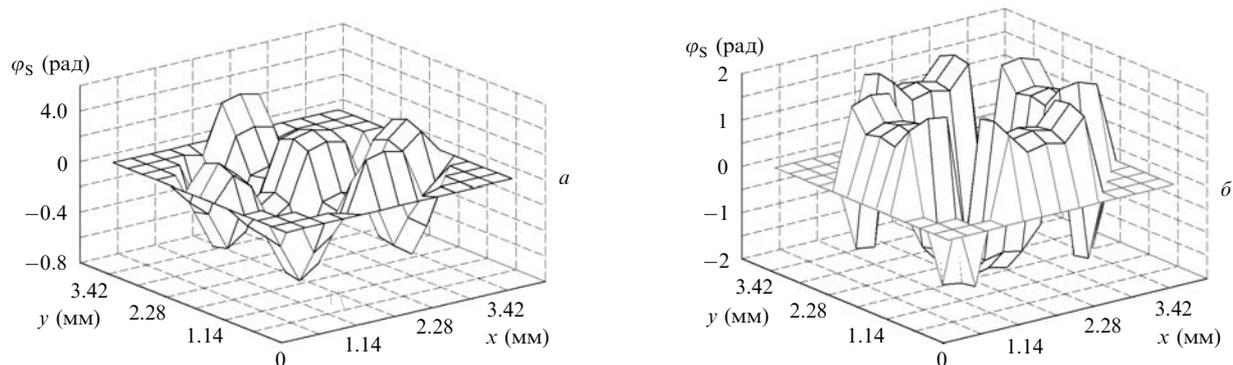


Рис.8. Восстановленное распределения фазы поля лазерного пучка φ_S моды TEM_{22} в случае $P = 10$ (а) и 100 (б).

и числа субапертур ДГ, в зависимости от модового состава лазерного излучения. В сравнении с ранее известными алгоритмами, которые позволяют определить расходимость излучения с ошибкой до 20 % – 60 %, предложенный алгоритм лишен систематической ошибки и с увеличением числа апертур ДГ, позволяет восстановить реальное поле с заданной точностью.

- Hartmann J. Z. *Instrumentenk.*, **20**, 47 (1900).
- Platt B., Shack R. *Opt. Sci. Cent. Newsl.*, **5** (1), 15 (1971).
- Neal D.R., Alford W.J., Gruetzner J.K., Warren M.E. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2870**, 72 (1996).
- Schafer B., Mann K. *Rev. Sci. Instrum.*, **71**, 2663 (2000).
- Laude V., Olovier S., Dirson C., Huignard J.P. *Opt. Lett.*, **24**, 1796 (1999).
- Cubalchini R. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 972 (1979).
- Noll R.J. *J. Opt. Soc. Am.*, **68**, 139 (1978).
- Widiker J.J., Harris S.R., Duncan B.D. *Appl. Opt.*, **45**, 2 (2006).
- Schafer B., Mann K. *Appl. Opt.*, **41**, 15 (2002).
- Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990).
- Born M., Wolf E. *Principles of Optics* (Cambridge: Cambridge U. Press, 1985).