

# Алгоритмы восстановления сингулярного волнового фронта лазерного излучения: анализ и повышение точности

В.П.Аксенов, И.В.Измайлов, Ф.Ю.Канев, Ф.А.Стариков

*Рассмотрена возможность восстановления сингулярного волнового фронта лазерных пучков по локальным наклонам волнового фронта, измеренным датчиком Гартмана. Проведены оценки точности алгоритма восстановления, описанного Фридом, предложена его модификация, позволяющая увеличить достоверность реконструкции фазы. На основе алгоритма Фрида и его модификации построен комбинированный алгоритм, преимущества которого продемонстрированы в выполненных численных экспериментах.*

**Ключевые слова:** восстановление волнового фронта, реконструкция фазы, сингулярный волновой фронт.

## 1. Введение

Одно из ключевых направлений развития современных адаптивных оптических систем связано с коррекцией сцинтилляционных эффектов, возникающих в световом пучке при его распространении в неоднородной среде или отражении от шероховатой поверхности. Эффекты сцинтилляций приводят либо к снижению эффективности переноса световой энергии, либо к искажению информации, переносимой световым пучком. Так как одним из основных элементов адаптивных систем является датчик волнового фронта, отдельные исследователи и целые исследовательские группы стремятся к созданию датчиков, способных обеспечить необходимое пространственное разрешение и минимальную погрешность измерений.

Одной из проблем, решаемых при построении таких приборов, является разработка точных, экономичных с точки зрения вычислительных ресурсов и устойчивых к шумам алгоритмов восстановления волнового фронта с винтовыми дислокациями.

Особенности построения алгоритмов восстановления изложены в целом ряде теоретических статей [1–4], однако работ, посвященных результатам экспериментальных исследований сингулярного фазового распределения, опубликовано сравнительно немного. Так, авторы [5] исследовали фазовое распределение в различных дифракционных порядках специально синтезированной голограммы, предназначенной для генерации высших порядков лаггер-гауссовых мод лазерного пучка. Для измерений поперечного распределения фазы и локализации фазовых сингулярностей ими использовался интерферометр с высоким пространственным разрешением. Интерферометрический датчик волнового фронта применялся и в высокоскоростной адаптивной оптической системе с

жидкокристаллическим модулятором, предназначенным для компенсации фазовых искажений в условиях сильных сцинтилляций когерентного излучения в турбулентной атмосфере [6].

Несмотря на то что наиболее широкое применение в адаптивных оптических системах получил датчик Шэка – Гартмана, публикаций результатов экспериментальных исследований, связанных с использованием этого прибора для измерений сингулярного распределения фазы, практически нет. Кроме публикаций авторов настоящей статьи, отметим недавнюю работу [7], в которой определялись направления вектора Пойнтинга в световом пучке, несущем оптические вихри (фазовые сингулярности) различных порядков.

Результаты численных исследований восстановления сингулярной фазы с использованием алгоритма, разработанного Фридом, представлены в настоящей статье. Нами предложены также два новых алгоритма восстановления (модификация алгоритма Фрида и комбинированный алгоритм), позволяющие повысить точность методики. При оценке качества восстановления входными параметрами алгоритма являлись градиенты фазового профиля, полученные в результате дифференцирования заданных функций с известным расположением вихрей (данные представлены в разд.4), и наклоны волнового фронта, регистрируемые с помощью модели датчика Гартмана (разд.6).

Разработанные алгоритмы были включены в математическое обеспечение реального датчика, которым экспериментально регистрировалась фаза излучения, несущего оптические вихри [8].

## 2. Алгоритм Фрида и его модификация

Проведенный анализ алгоритмов восстановления сингулярного волнового фронта пучков по локальным наклонам показал [8], что наибольшую точность из разработанных к настоящему времени имеет алгоритм, предложенный Фридом. Алгоритм является экономичным с точки зрения вычислительных затрат и обладает высокой устойчивостью к шумам [4].

Алгоритм Фрида (комплексный экспоненциальный реконструктор со взвешиванием дисперсии) состоит из

В.П.Аксенов, Ф.Ю.Канев. Институт оптики атмосферы СО РАН, Россия, 635055 Томск, просп. Академический, 1; e-mail: avp@iao.ru, mna@iao.ru

И.В.Измайлов. Томский государственный университет, Россия, 634050 Томск, просп. Ленина, 36; e-mail: izmi@elefot.tsu.ru

Ф.А.Стариков. Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, Россия, Нижегородская обл., 607190 Саров, просп. Мира, 37

Поступила в редакцию 19 июня 2007 г., после доработки – 17 сентября 2007 г.

трех стадий: редукции, или упрощения; решения; реконструкции [4]. Он предназначен для работы на прямоугольной сетке размером  $(2^K + 1) \times (2^K + 1)$  ( $K$  – произвольное натуральное число) в геометрии Хаджина. При этом задача восстановления сведена к реконструкции распределения «фазоров» в поперечном сечении пучка – комплексных чисел с единичным модулем и аргументом, равным фазе оптического поля  $S(x, y)$ . При решении проводится преобразование дифференциальных «фазоров»  $\exp[i(S_{i-1,j} - S_{i,j})]$  и  $\exp[i(S_{i,j-1} - S_{i,j})]$ , где  $S_{i,j}$  – фаза поля, соответствующая узлу  $i, j$  расчетной сетки, либо точке с координатами  $x_i, y_i$ .

Напомним, что геометрией Фрида называют сеточное представление функций, в котором входные данные  $\nabla_{\perp} S$  ( $\nabla_{\perp} = \partial/\partial x + \partial/\partial y$ ) заданы в тех же узлах, в которых восстанавливается фаза  $S$ . Если узлы сеток для проекций  $\partial S/\partial x$  и  $\partial S/\partial y$  градиента фазы на поперечную плоскость пучка смещены по координатам  $x$  и  $y$  относительно узлов сетки для  $S$ , то говорят, что данные заданы в геометрии Хаджина.

Фраза «со взвешиванием дисперсии», входящая в название алгоритма, означает, что в нем учитываются различия дисперсий при измерениях отдельных дифференциальных «фазоров», а именно степень влияния дифференциальных «фазоров» на результат восстановления обратно пропорциональна их дисперсии. Эта особенность алгоритма Фрида позволяет:

- 1) применять его на сетке произвольного размера, а не только на сетке размером  $(2^K + 1) \times (2^K + 1)$  [8];
- 2) учитывать среднестатистическое неравенство погрешностей измерений градиента фазы в различных областях пучка (например, соответствующих субапертурам датчика Шэка – Гартмана), если проводится многократное измерение характеристик одного и того же пучка;
- 3) учитывать априорное представление о неравенстве погрешностей измерений градиента фазы в этих областях, если характеристики пучка измеряются однократно.

В алгоритме Фрида дифференциальные «фазоры» – это единичные векторы, для получения которых применяется операция нормировки комплексных чисел. Можно предположить, что амплитуды дифференциальных «фазоров» и «фазоров», получаемых при редукции и реконструкции, содержат информацию о погрешностях измерения разностей фаз в конкретном эксперименте. С учетом этого предположения была предпринята попытка модификации обсуждаемого алгоритма, которая состо-

яла в исключении операции нормировки комплексного вектора. Как показали численные исследования, модифицированный алгоритм обладает рядом преимуществ по сравнению с исходным [8]. Результаты, иллюстрирующие свойства алгоритмов, приводятся ниже.

### 3. Комбинированный алгоритм: алгоритм поиска вихрей и восстановления фазы

Известно, что качество работы алгоритмов восстановления фазы снижается с увеличением числа вихрей  $N$ , содержащихся в волновом фронте излучения. При этом характеристикой, влияющей на точность, является поверхностная плотность вихрей  $N/N_g$  (где  $N_g$  – число ячеек расчетной сетки). С увеличением плотности увеличивается средний по поперечному сечению модуль градиента фазы  $\nabla_{\perp} S$  и возникают погрешности интегрирования [8].

В предлагаемом в настоящей статье алгоритме используется информация о координатах особых точек, поэтому необходимо определение координат дислокаций в распределении фазы. Для решения задачи был разработан ряд методик (алгоритмов) локализации вихрей:

- 1) по распределению градиента фазы  $\nabla_{\perp} S$  в поперечной плоскости пучка –  $A(-\nabla_{\perp} S)$  [9];
- 2) по распределению фазы  $S$  в поперечной плоскости пучка –  $A(S) \equiv A(S_0)$ , где  $S_0$  – точное распределение фазы в этой плоскости;
- 3) по распределению фазы  $S_1$  либо  $S_2$ , полученному из данных  $\nabla_{\perp} S$  благодаря применению алгоритма Фрида либо его модификации, –  $A(S_1)$  либо  $A(S_2)$  [10]. Фактически  $A(S_1)$  и  $A(S_2)$  – это разновидности алгоритма  $A(S_0)$ , включающие в себя алгоритмы восстановления фазы.

С помощью алгоритмов  $A(S)$ ,  $A(S_1)$ ,  $A(S_2)$  при  $N/N_g = 9\%$  в среднем находят не менее 90% вихрей, а с помощью алгоритма  $A(-\nabla_{\perp} S)$  в этих же условиях – 45% вихрей. Относительно низкая точность в последнем случае объясняется тем, что при попадании седла и фокуса векторного поля в одну ячейку сетки дискретизации алгебраическое число особых точек векторного поля  $\nabla_{\perp} S$  в этой ячейке становится равным нулю, и определить их присутствие с помощью алгоритма  $A(-\nabla_{\perp} S)$  невозможно. Подобные реализации случайного поля возникают, например, при расположении вихрей одного знака в соседних ячейках (седло находится между вихрями (рис.1,а)). Очевидно, что вероятность возникновения таких ситуаций возрастает при увеличении поверхностной

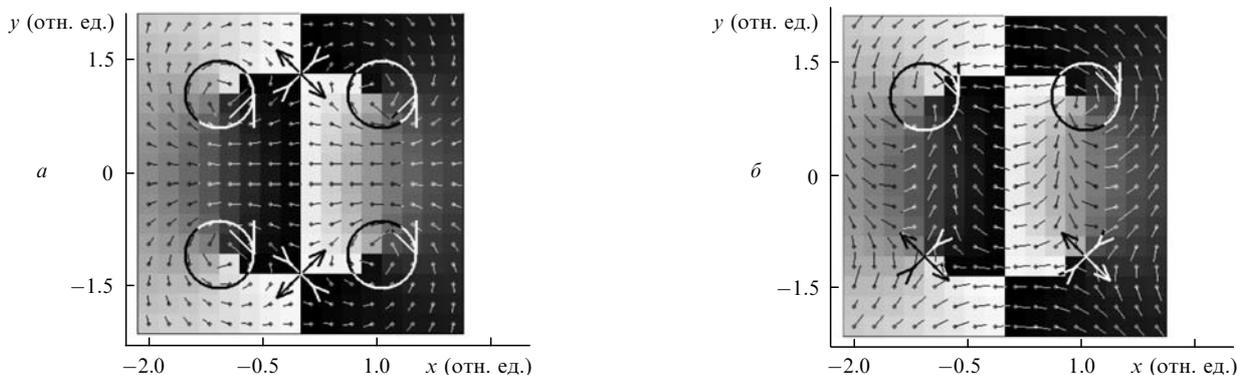


Рис. 1. Примеры констелляции (взаимного расположения и ориентации, от лат. con + stella – со + звезда) особых точек векторного поля  $\nabla_{\perp} S$  (а) и соответствующей констелляции особых точек векторного поля  $\mathbf{u} \equiv \{\text{Re} \exp[iS(x, y)], \text{Im}[iS(x, y)]\}$  (б) в поперечном сечении пучка. Оптическим вихрям соответствуют фокусы (⊙, ⊙) поля  $\nabla_{\perp} S$ , а в поле  $\mathbf{u}$  им отвечают фокусы (⊙) и седла (⊗). Градациями серого цвета отображено распределение фазы оптического поля. Отрезки с точками – векторы (точки соответствуют началу векторов).

плотности вихрей. В то же время при использовании распределения  $\exp(iS)$  (рис.1,*б*) в качестве входного параметра алгоритма детектирование вихрей одного знака происходит, даже если они расположены в одной и той же ячейке. За счет этого обеспечивается более высокий процент детектирования вихрей.

Анализ точности определения координат вихрей с помощью алгоритмов  $A(-\nabla_{\perp}S)$  и  $A(S)$  показывает, что погрешность иногда превышает половину размера ячейки расчетной сетки. Это свидетельствует о возможности ошибочно локализовать особую точку не в той ячейке, где она находится, а в соседней. В этом отношении алгоритм  $A(-\nabla_{\perp}S)$  имеет преимущество перед алгоритмом  $A(S)$ : средняя по поперечному сечению погрешность для одной реализации здесь не превышает 0.45 от размера ячейки, тогда как для  $A(S)$  эта погрешность может достигать 0.90. Следовательно, вероятность поместить вихрь в соседнюю ячейку расчетной сетки заметно выше при использовании алгоритма  $A(S)$ . Кроме того, в некоторых ситуациях алгоритмы  $A(S)$ ,  $A(S_1)$ ,  $A(S_2)$  детектируют несуществующие вихри.

Таким образом, можно сделать вывод, что каждому из перечисленных выше алгоритмов свойственны определенные недостатки, что не позволяет однозначно выбрать один из них.

Для увеличения доли регистрируемых дислокаций, повышения точности определения их координат и улучшения качества реконструкции сингулярной фазы был разработан комбинированный алгоритм (КА), в кото-

ром уменьшение влияния указанных выше негативных факторов было получено за счет вычитания из  $\nabla_{\perp}S$  составляющей градиента фазы  $S_v$ , обусловленной вихрями, положение и топологический заряд которых уже найдены. Фазу, вычисляемую с помощью КА, обозначим  $S_3$ .

#### 4. Восстановление фазы в геометриях Хаджина и Фрида

Результаты тестирования КА приведены на рис.2 вместе с данными, полученными с использованием алгоритма Фрида и модифицированного алгоритма Фрида. Показана зависимость среднего значения параметра Штреля  $\langle Sh \rangle$ , найденного при восстановлении фазы, и ошибки  $\sigma_{1-3} = \min_{\varphi} (\langle |[S_{1-3}(r) + \varphi - S_0(r)]| \rangle_r)$  ( $r = \{x, y\}$ , а  $\varphi$  варьируется от  $-\pi$  до  $\pi$ ) этого восстановления от числа дислокаций, введенных в волновой фронт пучка. Квадратные скобки обозначают операцию приведения заключенных в них значений в интервал  $[-\pi; \pi]$  путем прибавления или вычитания величин  $2\pi n$ , где  $n$  – целое число.

Из рис.2,*а, в* следует, что модифицированный алгоритм Фрида при средней поверхностной плотности вихрей  $N/N_g$  (5%,  $N = 55$ ) позволяет получить параметр Штреля на 2% больше, а ошибку на 30% меньше, чем алгоритм Фрида. При малой и высокой (свыше 9%, что соответствует  $N = 100$ ) плотности вихрей усредненные значения критерия приблизительно одинаковы для всех алгоритмов [8].

Очевидно, что КА сохраняет преимущества модифи-

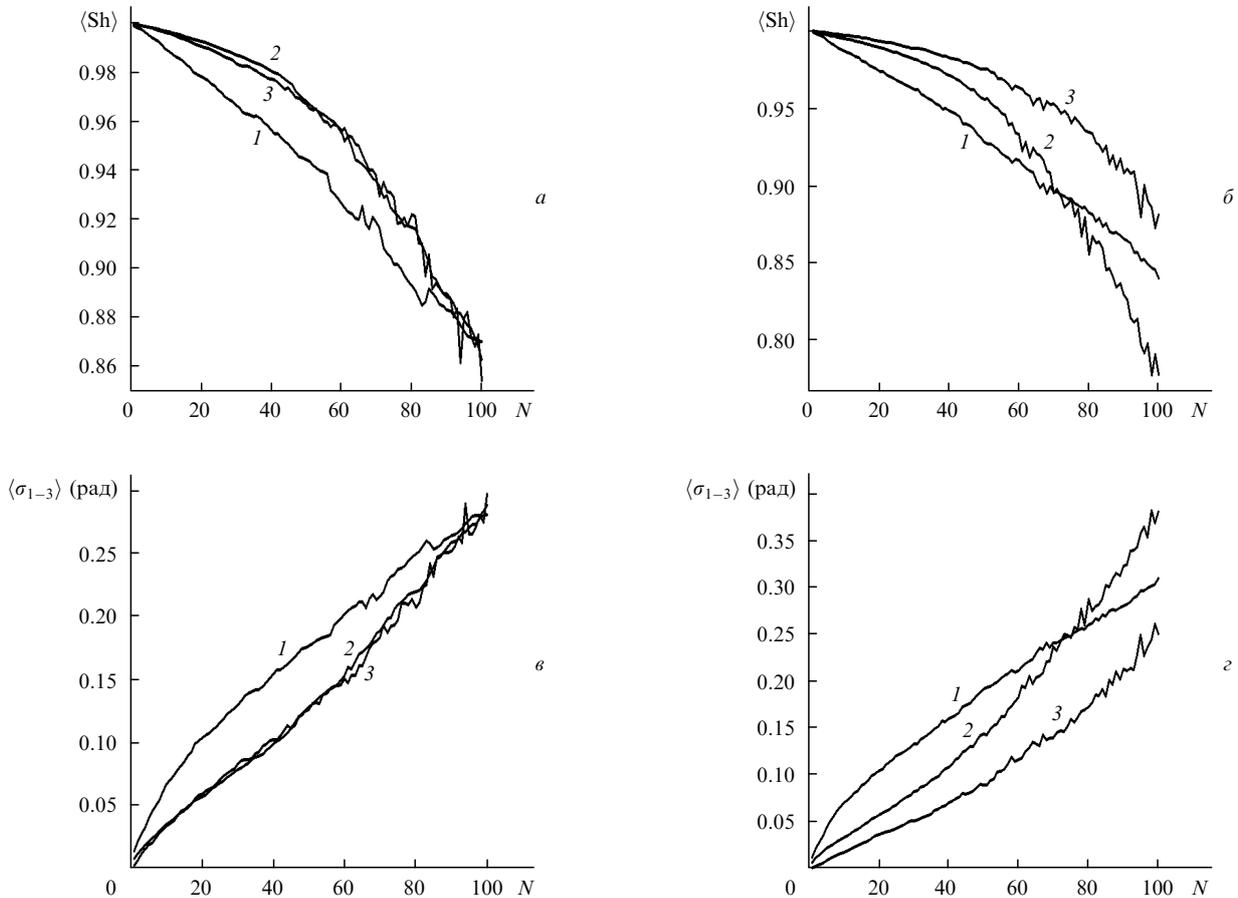


Рис.2. Зависимости среднего значения параметра Штреля (*а, б*) и усредненной ошибки восстановления фазы  $\langle \sigma_{1-3} \rangle$  (*в, г*) от числа вихрей в волновом фронте. Фаза восстановлена по данным  $\nabla_{\perp}S$  с помощью алгоритма Фрида (1), модифицированного алгоритма Фрида (2) и КА (3) в геометриях Хаджина (*а, в*) и Фрида (*б, г*). Усреднение выполнялось по 100 реализациям поля на сетке размером  $33 \times 33$ .

цированного алгоритма перед алгоритмом Фрида. Увеличение точности (по отношению к модифицированному алгоритму) не наблюдается из-за низкой эффективности процедуры поиска вихрей и уточнения их положения. Действительно, в геометрии Хаджина ячейку расчетной сетки ограничивают четыре точки на серединах ее сторон. В этих точках определены всего два значения производной фазы по координатам  $x$  и  $y$ , они содержат недостаточно информации о положении вихря. Следовательно, для получения более точных результатов необходима модернизация этой части алгоритма.

Из сравнения рис.2,б,г с рис.2,а,в следует, что при работе в несвойственной геометрии (в геометрии Фрида), точность алгоритма Фрида и его модификации ухудшается. При поверхностной плотности вихрей 9% ( $N = 100$ ) параметр Штреля уменьшается с 0.86 (рис.2,а) до 0.85 и 0.76 (рис.2,б, кривые 1, 2), средняя ошибка восстановления фазы возрастает с 0.275 (рис.2,в) до 0.275 и 0.375 рад (рис.2,г, кривые 1, 2). При этом второй алгоритм сначала работает лучше, а при числе вихрей, большем 65, – хуже первого. В то же время качество восстановления фазы с помощью КА даже несколько улучшается с ростом  $N$ : при  $N/N_g = 9\%$  вместо  $Sh = 0.86$  получаем  $Sh = 0.875$  и вместо ошибки 0.275 рад – ошибку, равную 0.25 рад. КА позволяет компенсировать неблагоприятное влияние геометрии Фрида на восстановление фазы. Он дает увеличение точности восстановления фазы по сравнению с модифицированным алгоритмом Фрида в 1.36 раза. Заметим, что рассматриваемая геометрия данных  $\nabla_{\perp} S$  соответствует конструкции датчика Шэка – Гартмана. Следовательно, в его программное обеспечение необходимо включить именно КА.

Выше предполагалось, что КА позволит увеличить число регистрируемых дислокаций и повысить точность определения их координат. Проверим, так ли это.

## 5. Результаты определения числа вихрей

Точность процедуры локализации особых точек иллюстрирует рис.3, где приводится зависимость числа дислокаций  $N_v$ , найденных с помощью алгоритмов, от числа дислокаций  $N$ , введенных в фазу. Представленные данные показывают существенное преимущество КА перед алгоритмом  $A(-\nabla_{\perp} S)$  при больших плотностях  $N/N_g$  (рис.3,а). Однако при малых значениях  $N/N_g$  из-за несогласованной работы алгоритмов  $A(-\nabla_{\perp} S)$  и  $A(S_2)$  в составе КА ситуация прямо противоположная. По-видимому, при малом числе вихрей осуществляемая в КА процедура сопоставления результатов работы алгоритмов  $A(-\nabla_{\perp} S)$  и  $A(S_2)$  (регистрация вихря только при условии, что он находится с помощью и алгоритма  $A(-\nabla_{\perp} S)$ , и алгоритма  $A(S_2)$ ) является нецелесообразной.

Различия в качестве работы алгоритмов  $A(S_2)$  в геометрии Хаджина и  $A(S_3)$  в геометриях Хаджина и Фрида (рис.3,б) вполне объясняются более высокой точностью восстановления фазы с помощью КА (см. рис.2). Отметим также наличие двух высоких пиков на кривых 3 рис.3. Их появление связано с самовозбуждением КА на двух из 10000 обработанных реализаций поля. Самовозбуждение КА выражается в заполнении каждой ячейки расчетной сетки вихрями. Выяснение причины такого неустойчивого поведения нуждается в дополнительном исследовании, а сама его возможность сдерживает применение КА на практике.

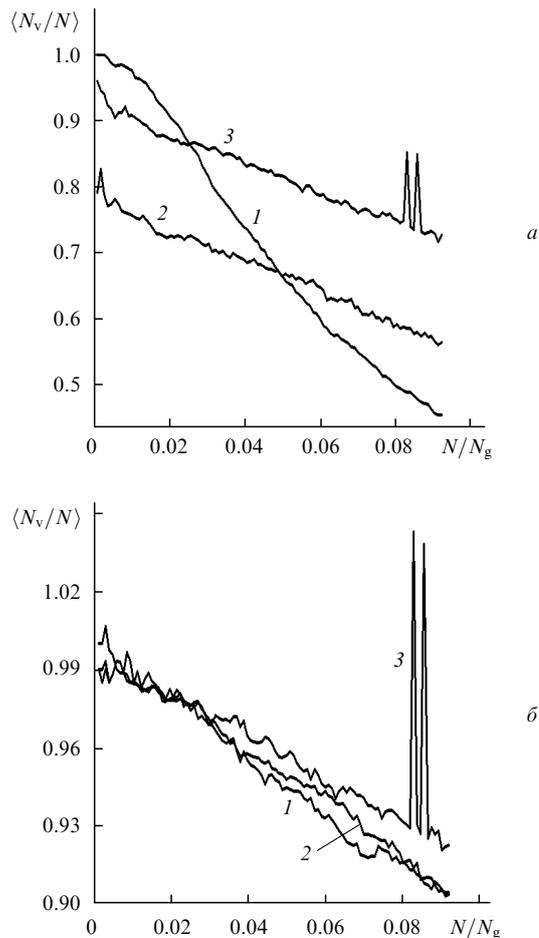


Рис.3. Число вихрей  $N_v$  (нормированное на заданное число вихрей  $N$  и усредненное по 100 реализациям), определяемое с использованием алгоритмов  $A(-\nabla_{\perp} S)$ ,  $A(S_2)$ ,  $A(S_3)$  и КА, как функция  $N/N_g$  для различных геометрий входных данных  $\nabla_{\perp} S$ . Кривые соответствуют алгоритмам  $A(-\nabla_{\perp} S)$  в геометрии Фрида (1), КА в геометриях Хаджина (2) и Фрида (3) (а) и алгоритмам  $A(S_2)$  в геометрии Хаджина (2),  $A(S_3)$  в геометриях Хаджина и Фрида (3) (б).

## 6. Исследования алгоритмов в модели датчика Гартмана

После приведенных выше теоретических оценок, рассмотрим возможность использования алгоритмов в условиях, когда их входными параметрами являются наклоны волнового фронта. Для проведения этих исследований алгоритм Фрида и его модификация, реализованные в виде динамически подключаемой библиотеки, были включены в программное обеспечение экспериментального прототипа датчика, с помощью которого устанавливалась фазовая поверхность, включающая одну особую точку. В проведенных лабораторных экспериментах доказана возможность использования алгоритмов в реальных условиях. В то же время исследование точности восстановления фазы удобнее проводить на основе численных методов, когда параметры задачи изменяются в широком диапазоне, а регистрация критериев, характеризующих точность, осуществляется достаточно просто.

Для выполнения подобных исследований была разработана численная модель, полностью соответствующая реальному прибору. В модели излучение проходит через массив микролинз, затем регистрируется поперечное рас-

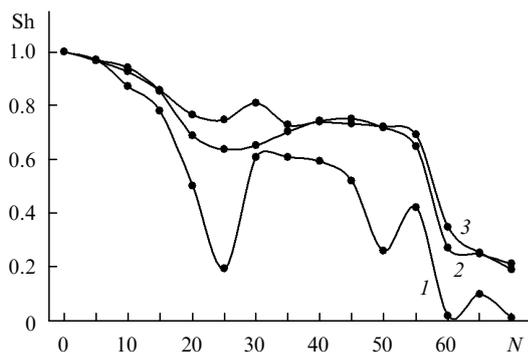


Рис.4. Зависимости параметра Штреля от числа дислокаций, введенных в фазовый профиль излучения. Результаты получены для модели датчика Гартмана, работающей на основе алгоритма Фрида (1), модифицированного алгоритма Фрида (2) и КА (3). Размерность раstra датчика составляет  $32 \times 32$ .

пределение интенсивности и вычисляются локальные наклоны волнового фронта; на основе этих измерений осуществляется восстановление фазового профиля.

Значения параметра Штреля, полученные при восстановлении волнового фронта вихревого пучка приведены на рис.4 и 5. Варьируемым параметром в численных экспериментах являлось число дислокаций в падающем на датчик излучении. Данные рис.4 регистрировались при размере массива микролинз (размерности раstra датчика)  $32 \times 32$ , а данные рис.5 – при размере массива  $16 \times 16$ .

Видно, что при большей размерности раstra датчика (рис.4) кривые, соответствующие модифицированному алгоритму Фрида и КА, практически совпадают. Различия наблюдаются лишь в диапазоне изменения числа дислокаций 20–35, где более высокие (на 8%–10%) значения Sh обеспечивает КА. Точность обоих алгоритмов уменьшается с увеличением числа особых точек.

Значительно более резкое уменьшение точности и, следовательно, меньшие значения параметра Штреля наблюдаются при использовании алгоритма Фрида. При

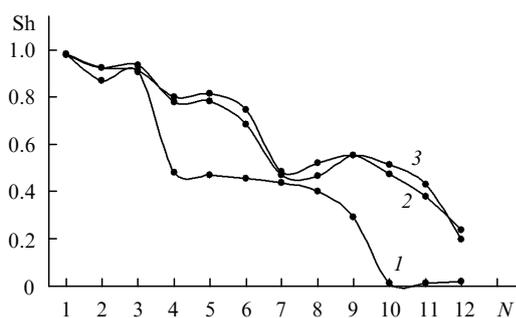


Рис.5. То же, что и на рис.4 при размерности раstra датчика  $16 \times 16$ .

$N = 25$  различие параметра Штреля достигает 50%, а в диапазоне  $N = 25 - 70$  оно составляет 10%–30%.

Отмеченные особенности проявляются и при использовании датчика с растром меньшей размерности (рис.5). Здесь модификация алгоритма Фрида и КА дают приблизительно одинаковые результаты, точность оригинального алгоритма Фрида на 15%–25% ниже.

## 7. Заключение

Таким образом, в работе выполнен анализ алгоритмов восстановления сингулярного волнового фронта. Предложена модификация алгоритма Фрида и КА. Проведено сравнительное исследование точности их работы при использовании в качестве входных данных градиентов фазы ( $-\nabla_{\perp} S$ ), определенных аналитически, и градиентов, полученных с помощью численной модели датчика Шэка–Гартмана.

Показано, что модифицированный алгоритм в среднем работает точнее исходного. При работе КА со входными данными  $-\nabla_{\perp} S$  в геометрии Хаджина сохраняются достоинства алгоритма Фрида и его модификации. В случае геометрии Фрида КА превосходит упомянутые аналоги. Это делает предпочтительным его использование при обработке данных, полученных с помощью датчика Шэка–Гартмана.

Дальнейшее совершенствование КА предполагает улучшение алгоритма уточнения положения вихрей и изменение стратегии выбора вихрей (из числа найденных) для коррекции вихревой компоненты градиента фазы, а также адаптацию КА для восстановления распределения фазы, включающей вихри высоких порядков.

Проведенные исследования были поддержаны грантом Президента РФ МК-4701.2006.9 и Международным научно-техническим центром (проект № 2631).

1. Arrasmitth W.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 1864 (1999).
2. Tyler G.A. *J. Opt. Soc. Am.*, **17** (10), 1828 (2000).
3. Aksenov V.P., Tikhomirova O.V. *J. Opt. Soc. Am.*, **19** (2), 345 (2002).
4. Fried D.L. *Opt. Commun.*, **200**, 43 (2001).
5. Rockstuhl C., Ivanovskyy A.A., Soskin M.S., Salt M.G., Herzig H.P., Dandliker R. *Opt. Commun.*, **242**, 163 (2004).
6. Baker K.L., Stappaerts E.A., Gavel D., Wilks S.C., Tucker J., Silva D.A., Olsen J., Olivier S.S., Young P.E., Kartz M.W., Flath L.M., Kruelevitch P., Crawford J., Azucena O. *Opt. Lett.*, **29**, 1781 (2004).
7. Leach J., Keen S., Padgett M., Saunter C., Love G.D. *Opt. Express*, **14** (25), 11919 (2006).
8. Aksenov V.P., Izmailov I.V., Kanev F.Yu., Starikov F.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **5894**, 68 (2005).
9. Аксёнов В.П., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Тихомирова О.В. *Оптика и спектроскопия*, **92** (3), 452 (2002).
10. Poizner B., Izmailov I., Kanev F., Aksenov V., Ustinov A. *Abstracts 11-th Joint Int. Symp. «Atmospheric and Ocean Optics. Atmospheric Physics»* (Tomsk, 2004, p. 90).