

# Распространение света в одномерном фотонном кристалле: анализ методом функции Флоке – Блоха

Д.Х.Нурлигареев, В.А.Сычугов

*Рассмотрена задача о распространении света в слоистой периодической среде со ступенчатым профилем показателя преломления. Точное решение этой задачи представлено в виде неоднородной волны, для которой в аналитической форме записано распределение амплитуды поля и определена форма её волновых поверхностей. Получен коэффициент отражения плоской волны, падающей из однородной среды на границу полубесконечной слоистой периодической среды и возбуждающей в ней волну Флоке – Блоха. Найдены критические условия, в которых волна Флоке – Блоха неограничена в полубесконечной слоистой среде и экспоненциально затухает в прилегающей к ней однородной среде. Записаны дисперсионные уравнения и распределения полей поверхностных волн (мод), локализованных вблизи границы полубесконечной слоистой среды, определены условия их возникновения и установлены границы допустимых значений показателя преломления прилегающей среды в зависимости от параметров слоистой периодической среды. Получены дисперсионные соотношения для поверхностных мод полубесконечной слоистой периодической среды (ограниченной системы связанных волноводов) при изменении толщины приграничного слоя.*

**Ключевые слова:** слоистая периодическая среда, связанные волноводы, фотонный кристалл, волны Флоке – Блоха.

## 1. Введение

Среда, свойства которой постоянны на каждой плоскости, перпендикулярной фиксированному направлению, называется слоистой средой. Задача о распространении света в слоистой среде известна давно. В качестве примера можно привести выполненную более 150 лет назад работу Стокса [1], посвящённую изучению рассеяния света в среде из  $N$ -слоев, а также работу Рэлея, связанную с изучением явления отражения света в кристаллах [2]. Достаточно подробно история данного вопроса изложена в обзоре [3]. В оптике большое значение имеют многослойные системы, состоящие из тонких плоскопараллельных плёнок. Методы их нанесения хорошо отработаны, а состав и толщина отдельных слоёв могут контролироваться с высокой точностью [4, 5]. Простейшим примером практической реализации такой системы является обычное многослойное диэлектрическое интерференционное зеркало, которое при определённых условиях может быть использовано для фильтрации выделенных участков спектра излучения [6]. Другим примером является многослойная структура, составленная из большого числа связанных планарных волноводов [7], либо решётка канальных волноводов, сформированная в планарной волноводной плёнке, лежащей на подложке с меньшим показателем преломления. Интерес к проблеме распространения, усиления и генерации света в системе туннельно-связанных волноводов объясняется, пре-

жде всего, практической потребностью в улучшении мощности и качества излучения волоконных и полупроводниковых лазеров [8, 9].

Система туннельно-связанных волноводов называется однородной, если она образована одинаковыми эквидистантно расположенными волноводами, константы распространения света в которых не зависят от продольных и поперечных координат. Ранее в работах [10–16] было изучено распространение света в однородных системах канальных волноводов. В частности отмечалось, что однородная система связанных волноводов может рассматриваться как одномерный фотонный кристалл, распространение света в котором удобно описывать волнами Флоке – Блоха [16]. Если период структуры сравним с длиной волны оптического излучения, то в фотонном кристалле возникают так называемые фотонные запрещённые зоны – области частот или углов падения, в которых запрещено распространение излучения в глубь структуры. При отсутствии поглощения возникновение запрещённых зон обусловлено когерентной интерференцией волн, многократно отражающихся на межслойных границах.

Относительно недавно было показано [17, 18], что одномерные периодические структуры (фотонные кристаллы) могут обеспечивать полное отражение излучения в заданном частотном диапазоне для всех углов падения и состояний поляризации. Этим объясняется вновь возникший и нарастающий интерес к изучению распространения оптического излучения в одномерных периодических структурах [19–25]. Обычно для описания такого распространения используют подход Флоке – Блоха, теорию связанных волн или метод матриц переноса. Среди этих методов стандартная теория связанных мод [26] является наиболее физически наглядной и в ограниченном ряде случаев даёт простые аналитические результа-

Д.Х.Нурлигареев, В.А.Сычугов. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: jamil@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 14 июня 2007 г., после доработки – 26 сентября 2007 г.

ты. К сожалению, эта теория содержит ряд допущений [26–28], часто приводящих к некорректным результатам.

Строгая теория связанных мод [29, 30], учитывающая все дифракционные волны в периодических структурах, приводит к системе уравнений, состоящей из бесконечного числа дифференциальных уравнений второго порядка и решаемой численно с сохранением ограниченного числа дифракционных волн. В этом смысле она является аналогом подхода, в котором используются волны Флоке – Блоха, и в настоящее время хорошо разработана для решения специфических задач, а не для выявления закономерностей распространения волн в периодических структурах.

Представленный в работах [31, 32] и базирующийся на теории Блоха [33] матричный метод для одномерных периодических структур является точным. В частности, использование данного метода позволяет изучать оптические поверхностные волны в ограниченных многослойных структурах с периодическим распределением показателя преломления [34, 35]. Изучение поверхностных волн в пространственно-ограниченных многослойных структурах важно как для определения необходимых свойств поверхности, обеспечивающих устранение возможных потерь, связанных с излучением в поверхностные моды [24, 36, 37], так и при их использовании в качестве сенсоров [38–40].

К сожалению, использование комплексных матриц чаще всего предполагает выполнение численных расчётов и не даёт наглядного физического представления об изучаемых процессах [41, 42]. Этим объясняется то, что общие формулы для распределений полей и уравнения на собственные значения для поперечных электрических (ТЕ) и магнитных (ТМ) мод приводятся лишь для частных случаев симметричной слоистой периодической среды [43], а полные дисперсионные кривые для поверхностных электромагнитных мод известны лишь для случая, когда туннельная связь волноводных слоёв структуры реализуется без учёта изменения параметров первого

## 2. Волна Флоке – Блоха в неограниченной слоистой периодической среде

Для описания процессов распространения света в однородной системе связанных волноводов представим её (см. рис.1,а) как одномерную слоистую периодическую среду, составленную из чередующихся слоёв  $f$ - и  $s$ -типа толщиной  $h$  и  $s$  с показателями преломления  $n_f$  и  $n_s$  и профилем показателя преломления

$$n(x) = \begin{cases} n_f, & Am < x < Am + h, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ n_s, & Am + h < x < A(m + 1), \quad A = h + s. \end{cases} \quad (1)$$

Для ТЕ-волны с частотой  $\omega$ , поляризованной вдоль оси  $y$  и распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , распределение поля можно записать в виде

$$E(x, z, t) = E(x, z)\exp(i\omega t) = E(x)\exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (2)$$

где  $\beta$  – постоянная распространения волны в направлении  $z$ ;  $t$  – время. Внутри слоёв системы функция  $E(x)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - E(x)[\beta^2 - k_0^2 n^2(x)] = 0, \quad (3)$$

где  $k_0 = \omega/c$  – волновой вектор излучения в вакууме. Рассматривая слоистую периодическую среду как одномерный кристалл, образованный повторением ячейки из  $f$ - и  $s$ -слоёв, можно представить распределение электрического поля внутри каждого однородного слоя  $m$ -й ячейки кристалла в виде суммы падающей и отражённой плоских волн с комплексными амплитудами  $a_m, b_m$  и  $c_m, d_m$  в  $f$ - и  $s$ -слоях ячейки соответственно (согласно концепции Бриллюэна эти волны называются парциальными волнами):

$$E(x, z) = \begin{cases} \{a_m \exp[-ik_f(x - mA)] + b_m \exp[ik_f(x - mA)]\} \exp(-i\beta z), & Am < x < Am + h, \\ \kappa_f = [k_0^2 n_f^2 - \beta^2]^{1/2}, \\ \{c_m \exp[-ik_s(x - mA)] + d_m \exp[ik_s(x - mA)]\} \exp(-i\beta z), & Am + h < x < A(m + 1), \\ \kappa_s = (k_0^2 n_s^2 - \beta^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (4)$$

слоя (ячейки) периодической среды [44]. В этом случае используются численные методы. Например, в [45] приведены дисперсионные соотношения для поверхностных мод при изменении параметров первой ячейки, вычисленные методом сверхячеек (supercell method).

С этой точки зрения для описания распространения электромагнитных волн в одномерных фотонных кристаллах желательна разработка аналитической теории, обеспечивающей более точные результаты, чем стандартная теория связанных мод, в случае высокого контраста показателя преломления. В связи с этим в настоящей работе построено теоретическое описание распространения света в одномерном кристалле без использования формализма комплексных матриц. Цель работы – показать, что в простейшем случае периодической среды, состоящей из пары чередующихся слоёв прозрачных материалов с различными показателями преломления, можно получить точное решение волнового уравнения в явном аналитическом виде.

где  $\kappa_f$  и  $\kappa_s$  – постоянные распространения плоских волн в направлении оси  $x$  для  $f$ - и  $s$ -слоёв среды соответственно. При выполнении условий  $n_f > n_s > 0$  и  $k_0 n_f > \beta > 0$  постоянная распространения  $\kappa_f$  может принимать лишь действительные значения, а  $\kappa_s$  – как действительные (в случае радиационной связи  $f$ -слоёв через  $s$ -слои среды, когда  $k_0 n_s > \beta$ ), так и мнимые (в случае туннельной связи, при  $k_0 n_s < \beta$ ). В случае туннельной связи удобно использовать постоянную затухания  $\gamma_s$ , такую, что  $\kappa_s = i\gamma_s$ ,  $\gamma_s > 0$ . Комплексные амплитуды  $a_m, b_m, c_m$  и  $d_m$  плоских волн связаны условиями непрерывности на границах слоёв; при  $x = Am$

$$a_m + b_m = c_{m-1} \exp(-ik_s A) + d_{m-1} (\exp ik_s A), \quad (5a)$$

$$\kappa_f (a_m - b_m) = \kappa_s [c_{m-1} \exp(-ik_s A) - d_{m-1} (\exp ik_s A)],$$

при  $x = Am + h$

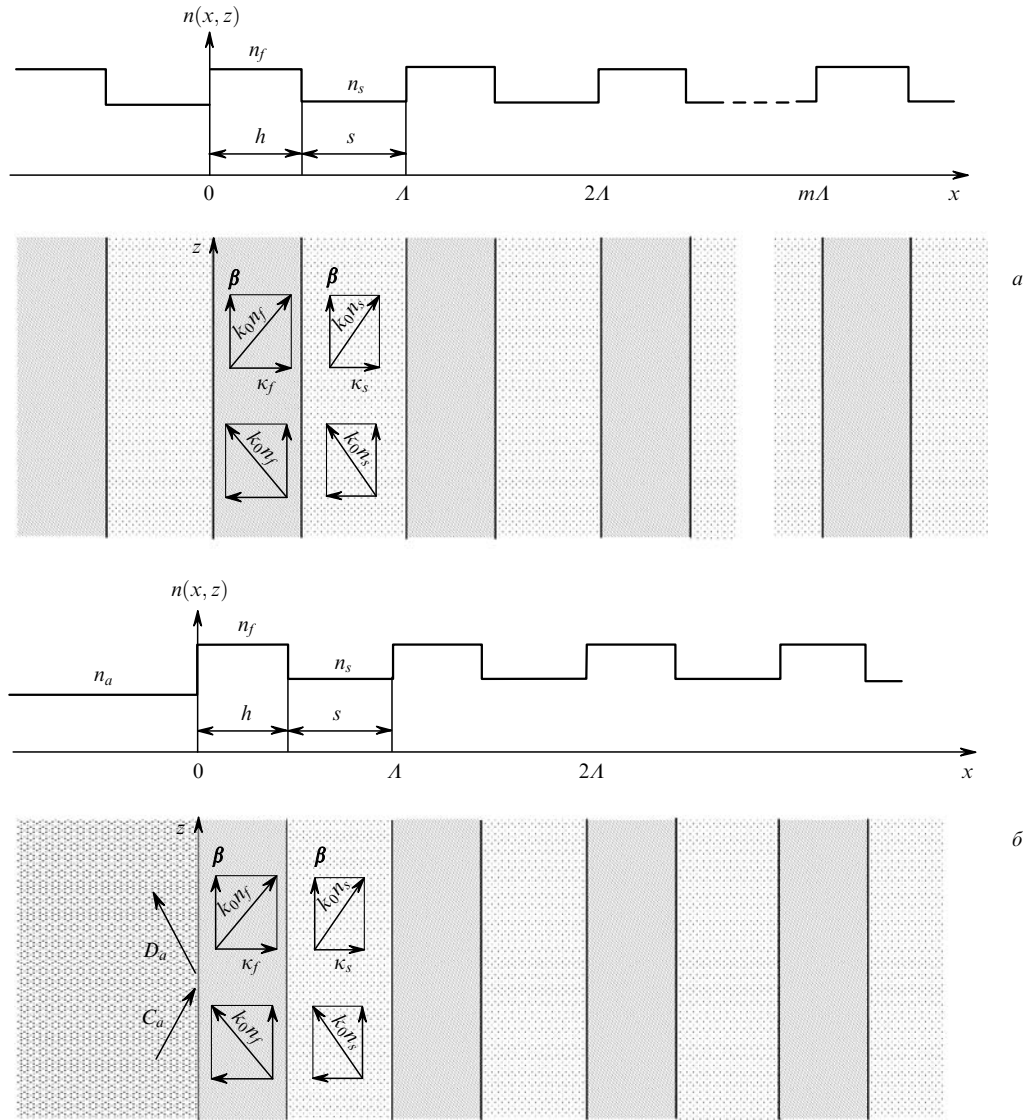


Рис.1. Схематическое представление неограниченной (а) и полубесконечной (б) слоистой периодической среды.

$$a_m \exp(-i\kappa_f h) + b_m \exp(i\kappa_f h) = c_m \exp(-i\kappa_s h) + d_m \exp(i\kappa_s h), \quad \times \sin(\kappa_f h) \sin(\kappa_s s), \quad \beta < k_0 n_s, \quad (7a)$$

$$\kappa_f [a_m \exp(-i\kappa_f h) - b_m \exp(i\kappa_f h)] \quad (5b)$$

$$= \kappa_s [c_m \exp(-i\kappa_s h) - d_m \exp(i\kappa_s h)].$$

$$\cos K\Lambda = \cos(\kappa_f h) \cosh(\gamma_s s) + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_s}{\kappa_f} - \frac{\kappa_f}{\gamma_s} \right)$$

$$\times \sin(\kappa_f h) \sinh(\gamma_s s), \quad k_0 n_s < \beta < k_0 n_f. \quad (7b)$$

Для периодической среды, согласно теореме Флоке (Блоха) [33], распространение света может быть представлено в форме волны Флоке – Блоха (блоховской волны)

$$E(x, z, t) = E_K(x) \exp(-iKx) \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (6)$$

$$E_K(x + \Lambda m) = E_K(x), \quad m = 0, \pm 1, \dots,$$

где  $E_K(x)$  является зависящей от константы  $K$  периодической функцией с периодом, равным периоду  $\Lambda$  структуры. Константа  $K$ , известная как блоховское волновое число, может быть найдена из дисперсионного соотношения [27, 28]

$$\cos K\Lambda = \cos(\kappa_f h) \cos(\kappa_s s) - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa_s}{\kappa_f} + \frac{\kappa_f}{\kappa_s} \right)$$

В тех случаях, когда, согласно уравнениям (7a) и (7b), выполняется неравенство  $|\cos K\Lambda| < 1$ , получаемая величина  $K$  является действительной и отвечает волнам, распространяющимся без затухания. Если правая часть уравнений (7a) и (7b) по модулю превышает единицу, величина  $K$  становится комплексной, и мы имеем дело с затухающими волнами.

Следует обратить внимание на то, что волна, описываемая выражением (6), является неоднородной волной, и в данном случае важна не только информация о распределении амплитуды поля волны в ячейке периодической среды, но и о форме волновой поверхности. Вместе с тем в известных нам работах авторы ограничиваются вычислением фазы  $K\Lambda$  волны, определяющей границы зон периодической среды, а волновой фронт волны не рассчи-

тывается. Для вычисления волнового фронта необходимо провести дополнительные исследования.

Воспользуемся условием периодичности (6), справедливым для волн Флоке – Блоха, и перепишем уравнения (5а) в виде

$$\exp(-iK\Lambda)(a_m + b_m) = c_m \exp(-i\kappa_s \Lambda) + d_m \exp(i\kappa_s \Lambda), \quad (8)$$

$$\kappa_f \exp(-iK\Lambda)(a_m - b_m) = \kappa_s [c_m \exp(-i\kappa_s \Lambda) - d_m \exp(i\kappa_s \Lambda)].$$

Рассматривая совместно уравнения (5б) и (8), при  $\kappa_f \neq 0$ ,  $\kappa_s \neq 0$  можно получить два уравнения для связи комплексных амплитуд  $a_m$  и  $b_m$  парциальных волн внутри  $f$ -слоя,

$$\begin{aligned} &(\kappa_s + \kappa_f)a_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s - K\Lambda) \\ &= (\kappa_s - \kappa_f)b_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s + K\Lambda) \exp(i\kappa_f h), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &(\kappa_s - \kappa_f)a_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s - K\Lambda) \\ &= (\kappa_s + \kappa_f)b_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s + K\Lambda) \exp(i\kappa_f h), \end{aligned}$$

и два аналогичных уравнения для связи комплексных амплитуд  $c_m$  и  $d_m$  парциальных волн внутри  $s$ -слоя:

$$\begin{aligned} &(\kappa_s + \kappa_f)c_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s - K\Lambda) \\ &= (\kappa_s - \kappa_f)d_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s - K\Lambda) \exp[i\kappa_s(s + 2h)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &(\kappa_s - \kappa_f)c_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s + K\Lambda) \\ &= (\kappa_s + \kappa_f)d_m \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s + K\Lambda) \exp[i\kappa_s(s + 2h)]. \end{aligned}$$

Случай, когда все синусы, записанные в уравнениях (9), (10), одновременно равны нулю, является особым и требует отдельного рассмотрения. В остальных случаях, как и следовало ожидать, требование одновременного выполнения условий (9) либо (10) приводит к дисперсионному условию (7). Кроме того, из (9) и (10) видно, что отношения комплексных амплитуд и фазовых сдвигов для волн внутри каждого слоя не зависят от номера  $m$  ячейки среды. Уравнения (5б) и (8) позволяют выразить амплитуды  $c_m$  и  $d_m$  через  $a_m$  и  $b_m$  и затем, используя уравнения связи (9), получить следующие аналитические выражения для комплексных амплитуд парциальных плоских волн в  $f$ - и  $s$ -слоях периодической среды:

$$\begin{aligned} a_m &= A \exp(i\phi_0) \exp(i\kappa_f h/2) \exp(-iK\Lambda m), \quad m = 0, \pm 1, \dots, \\ b_m &= B \exp(i\phi_0) \exp(-i\kappa_f h/2) \exp(-iK\Lambda m), \\ c_m &= C \exp(i\phi_0) \exp[i\kappa_s(s + 2h)/2] \exp[-iK\Lambda(2m + 1)/2], \\ d_m &= D \exp(i\phi_0) \exp[-i\kappa_s(s + 2h)/2] \exp[-iK\Lambda(2m + 1)/2], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\phi_0$  – начальная фаза волны. Амплитудные коэффициенты  $A, B, C, D$ , которые в случае действительных  $\kappa_f, \kappa_s$  и

$K$  являются действительными величинами, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s + K\Lambda) \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s + K\Lambda), \\ B &= A_0 \frac{\kappa_s - \kappa_f}{\kappa_s + \kappa_f} \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s + K\Lambda) \\ &\quad \times \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s - K\Lambda), \end{aligned} \quad (12)$$

$$C = A_0 \frac{\kappa_s + \kappa_f}{2\kappa_s} \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s + K\Lambda) \sin \kappa_f h,$$

$$D = A_0 \frac{\kappa_s - \kappa_f}{2\kappa_s} \sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s + K\Lambda) \sin \kappa_f h,$$

где  $A_0$  – произвольная константа, играющая роль амплитуды Флоке – Блоха.

Здесь также уместно привести соотношения для квадратов амплитудных коэффициентов  $A, B$  и  $C, D$ , следующие из выражений (9)–(12):

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\cos \kappa_s s - \cos(\kappa_f h - K\Lambda)}{\cos \kappa_s s - \cos(\kappa_f h + K\Lambda)}, \quad (13)$$

$$\frac{D^2}{C^2} = \frac{\cos \kappa_f h - \cos(\kappa_s s - K\Lambda)}{\cos \kappa_f h - \cos(\kappa_s s + K\Lambda)}.$$

Если для рассматриваемой волны Флоке – Блоха усреднённое по времени значение поперечной составляющей потока энергии (направленной вдоль оси  $x$ ) представить как разность потоков соответствующих парциальных волн в  $f$ - и  $s$ -слоях, то из условия непрерывности этой составляющей потока на межслойных границах

$$\kappa_f A^2 \left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right) = \kappa_s C^2 \left(1 - \frac{D^2}{C^2}\right) \quad (14)$$

и соотношений (13) нетрудно также получить соотношение для квадратов амплитудных коэффициентов  $A$  и  $C$ :

$$\frac{C^2}{A^2} = \frac{\kappa_f \sin \kappa_f h \cos \kappa_f h - \cos(\kappa_s s + K\Lambda)}{\kappa_s \sin \kappa_s s \cos \kappa_s s - \cos(\kappa_f h + K\Lambda)}. \quad (15)$$

Из выражений (4), (9)–(12) следует, что амплитудные коэффициенты отражения  $r_{ab}, r_{cd}$  и  $r_{ba}, r_{dc}$  парциальных волн на верхних и нижних границах соответственно связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r_{ab} &= |r_{ab}| \exp(i\phi_{ab}) = \frac{1}{r_{ba}^*} = \frac{\exp(i\phi_{ba})}{|r_{ba}|} = \frac{b_m \exp(i\kappa_f h)}{a_m \exp(-i\kappa_f h)} \\ &= \frac{\kappa_s - \kappa_f}{\kappa_s + \kappa_f} \frac{\sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s - K\Lambda)}{\sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s + K\Lambda)} \exp(i\kappa_f h), \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} r_{cd} &= |r_{cd}| \exp(i\phi_{cd}) = \frac{1}{r_{dc}^*} = \frac{\exp(i\phi_{dc})}{|r_{dc}|} = \frac{d_m \exp[i\kappa_s(s + h)]}{c_m \exp[-i\kappa_s(s + h)]} \\ &= \frac{\kappa_s - \kappa_f}{\kappa_s + \kappa_f} \frac{\sin \frac{1}{2}(\kappa_f h - \kappa_s s + K\Lambda)}{\sin \frac{1}{2}(\kappa_f h + \kappa_s s + K\Lambda)} \exp(i\kappa_s s). \end{aligned} \quad (16b)$$

Из (16) видно, что произведение модулей коэффициентов отражения на верхней и нижней границах каждого слоя равно единице. Кроме того, фазовый сдвиг, возникающий при отражении парциальной волны на границе слоя, определяется (с точностью до слагаемого  $2\pi m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ) фазовой толщиной слоя, равной  $\kappa_f h$  в случае  $f$ -слоя и  $\kappa_s s$  в случае  $s$ -слоя. Воспользовавшись данным обстоятельством, можно записать условия поперечного резонанса для парциальных волн в  $f$ - и  $s$ -слоях среды:

$$\begin{aligned} 2\kappa_f h &= \phi_{ab} + \phi_{ba} + 2\pi m_f = 2\phi_{ab} + 2\pi m_f \\ &= 2\phi_{ba} + 2\pi m_f, \quad m_f = 0, 1, \dots, \\ 2\kappa_s s &= \phi_{cd} + \phi_{dc} + 2\pi m_s = 2\phi_{cd} + 2\pi m_s \\ &= 2\phi_{dc} + 2\pi m_s, \quad m_s = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая наличие фазового сдвига, определяемого для комплексных амплитуд парциальных волн фазовой толщиной каждого слоя, удобно при представлении распределения поля в рассматриваемой  $m$ -й ячейке структуры использовать локальные координаты  $\xi_f = x - h/2 - Am$  и  $\xi_s = x - s/2 - h - Am$ , отсчитываемые от середин соответствующих слоёв:

$$E(x, z) = \begin{cases} [A \exp(-i\kappa_f \xi_f) + B \exp(i\kappa_f \xi_f)] \exp[i(\phi_0 - KAm - \beta z)] = E_f(\xi_f) \exp[-i\phi_f(\xi_f)] \exp[i(\phi_0 - KAm - \beta z)], \\ E_f(\xi_f) = [A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\kappa_f \xi_f)]^{1/2}, \quad -h/2 < \xi_f < h/2, \\ \phi_f(\xi_f) = \arctan \left[ \frac{A-B}{A+B} \tan(\kappa_f \xi_f) \right], \quad -s/2 < \xi_s < s/2, \\ [C \exp(-i\kappa_s \xi_s) + D \exp(i\kappa_s \xi_s)] \exp\{i[\phi_0 - K\Lambda(m+1/2) - \beta z]\} = E_s(\xi_s) \exp[-i\phi_s(\xi_s)] \exp\{i[\phi_0 - K\Lambda(m+1/2) - \beta z]\}, \\ E_s(\xi_s) = [C^2 + D^2 + 2CD \cos(2\kappa_s \xi_s)]^{1/2}, \quad \phi_s(\xi_s) = \arctan \left[ \frac{C-D}{C+D} \tan(\kappa_s \xi_s) \right]. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь функции  $E_f(\xi_f)$ ,  $E_s(\xi_s)$  описывают распределение амплитуды поля волны Флоке – Блоха в  $f$ - и  $s$ -слоях  $m$ -й ячейки, а функции  $\phi_f(\xi_f)$ ,  $\phi_s(\xi_s)$  – форму волновых поверхностей. Поверхности постоянной амплитуды, задаваемые условиями

$$E_f(\xi_f) = \text{const}, \quad E_s(\xi_s) = \text{const}, \quad (19)$$

и поверхности постоянной фазы

$$\beta z + \phi_f(\xi_f) + K\Lambda m = \text{const}, \quad (20)$$

$$\beta z + \phi_s(\xi_s) + K\Lambda(m+1/2) = \text{const}$$

не совпадают, т. е. волна Флоке – Блоха является неоднородной волной.

Уравнения (2)–(4) в совокупности с (9)–(20) полностью определяют волну Флоке – Блоха, свободно распространяющуюся в неограниченной слоистой периодической среде.

Для описания распространения света в неограниченной однородной системе туннельно-связанных волноводов необходимо рассмотреть случай, когда  $\kappa_s$  является мнимой величиной. При мнимой  $\kappa_s = i\gamma_s$  и действительных  $\kappa_f$ ,  $K$  коэффициенты  $A$  и  $B$  согласно уравнениям (12) по-прежнему являются действительными:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_0}{2} [\cosh(\gamma_s s) - \cos(\kappa_f h + K\Lambda)], \\ B &= \frac{A_0}{4} \left( \frac{\kappa_f}{\gamma_s} + \frac{\gamma_s}{\kappa_f} \right) \sin(\kappa_f h) \sinh(\gamma_s s), \end{aligned} \quad (21a)$$

а коэффициенты  $C$  и  $D$  становятся комплексными:

$$\begin{aligned} C &= D^* = \frac{A_0 \sin \kappa_f h}{2\gamma_s} \left\{ \left[ \kappa_f \sinh \frac{\gamma_s s}{2} \cos \frac{\kappa_f h + K\Lambda}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \gamma_s \sin \frac{\kappa_f h + K\Lambda}{2} \cosh \frac{\gamma_s s}{2} \right] + i \left[ \gamma_s \sinh \frac{\gamma_s s}{2} \cos \frac{\kappa_f h + K\Lambda}{2} \right. \right. \\ &\left. \left. - \kappa_f \sin \frac{\kappa_f h + K\Lambda}{2} \cosh \frac{\gamma_s s}{2} \right] \right\} = \bar{C} \exp(i\phi_c), \end{aligned} \quad (21б)$$

где

$$\bar{C} = \frac{A_0 \sin(\kappa_f h)}{2\gamma_s} \left\{ \frac{1}{2} (\kappa_f^2 + \gamma_s^2) [\cosh(\gamma_s s) - \cos(\kappa_f h + K\Lambda)] \right\}^{1/2};$$

$$\begin{aligned} \phi_c &= \arctan \left[ \left( \gamma_s \tanh \frac{\gamma_s s}{2} - \kappa_f \tan \frac{\kappa_f h + K\Lambda}{2} \right) \right. \\ &\left. \times \left( \kappa_f \tanh \frac{\gamma_s s}{2} + \gamma_s \tan \frac{\kappa_f h + K\Lambda}{2} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

В данном случае при записи распределения поля в  $m$ -й ячейке структуры можно использовать локальные коор-

динаты  $\xi_f = x - h/2 - Am$  и  $\xi_s = x - s/2 - h - Am$ , отсчитываемые от середин соответствующих слоёв. При этом распределение амплитуды поля в  $f$ -слое описывается теми же функциями, что и в (18). Распределение амплитуды поля в  $s$ -слое можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E(x, z) &= \bar{C} [\exp(\gamma_s \xi_s + i\phi_c) + \exp(-\gamma_s \xi_s - i\phi_c)] \\ &\times \exp\{i[\phi_0 - K\Lambda(m+1/2) - \beta z]\} = E_s(\xi_s) \\ &\times \exp[i\phi_s(\xi_s)] \exp\{i[\phi_0 - K\Lambda(m+1/2) - \beta z]\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$E_s(\xi_s) = \bar{C} \{2[\cosh(2\gamma_s \xi_s) + \cos(2\phi_c)]\}^{1/2},$$

$$\phi_s(\xi_s) = \arctan[\tan \phi_c \tanh(\gamma_s \xi_s)].$$

### 3. Отражение плоской волны на границе полубесконечной слоистой периодической среды

Рассмотрим (см. рис.1,б) полубесконечную однородную среду с показателем преломления  $n_a$ , граничащую с полубесконечной слоистой периодической средой, составленной из чередующихся слоёв типа  $f$  и  $s$  с показателями преломления  $n_f$  и  $n_s$  (для определённости в дальнейшем будем считать, что выполняются условия  $n_f > n_s > n_a$ ). Профиль показателя преломления этой среды

$$n(x) = \begin{cases} n_f, & \Lambda m < x < \Lambda m + h, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ n_s, & \Lambda m + h < x < \Lambda(m+1), \quad \Lambda = h + s, \\ n_a, & x < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Согласно рассматриваемой модели, в однородной области  $x < 0$  при постоянной распространения  $\beta < k_0 n_a$  решение уравнения (3) можно представить как сумму падающей и отражённой однородных плоских волн

$$E(x, z, t) = E(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] = [\tilde{C}_a \exp(-i\kappa_a x) + \tilde{D}_a \exp(i\kappa_a x)] \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (24)$$

с комплексными амплитудами  $\tilde{C}_a = C_a \exp(i\phi_c)$ ,  $\tilde{D}_a = D_a \exp(i\phi_d)$  (где  $C_a$ ,  $D_a$ ,  $\phi_c$ ,  $\phi_d$  – действительные величины) и поперечной постоянной распространения  $\kappa_a = (k_0^2 n_a^2 - \beta^2)^{1/2}$ . При  $\beta > k n_a$  решение уравнения (3) является неоднородной волной

$$E(x, z, t) = \tilde{F}_a \exp(\gamma_a x) \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad \tilde{F}_a = F_a \exp(i\phi_f), \quad (25)$$

амплитуда которой максимальна на границе  $x = 0$  и экспоненциально спадает по мере удаления от неё с коэффициентом затухания  $\gamma_a = (\beta^2 - k_0^2 n_a^2)^{1/2}$ . Связь коэффициентов  $C_a$ ,  $D_a$  (или  $F_a$ ) с амплитудными коэффициентами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  волны Флоке – Блоха, возбуждаемой в слоистой периодической среде, устанавливается из условий непрерывности на границе  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} A \exp(i\kappa_f h/2) + B \exp(-i\kappa_f h/2) &= C_a \exp(i\phi_c) + D_a \exp(i\phi_d), \\ -i\kappa_f [A \exp(i\kappa_f h/2) - B \exp(-i\kappa_f h/2)] &= -i\kappa_a [C_a \exp(i\phi_c) - D_a \exp(i\phi_d)]. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} 4\kappa_a^2 C_a^2 &= (\kappa_a + \kappa_f)^2 A^2 + (\kappa_a - \kappa_f)^2 B^2 \\ &+ 2AB(\kappa_a^2 - \kappa_f^2) \cos(\kappa_f h), \\ 4\kappa_a^2 D_a^2 &= (\kappa_a - \kappa_f)^2 A^2 + (\kappa_a + \kappa_f)^2 B^2 \\ &+ 2AB(\kappa_a^2 - \kappa_f^2) \cos(\kappa_f h). \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (28) согласуются с условием непрерывности на границе  $x = 0$  поперечной составляющей оптического потока  $\kappa_a(C_a^2 - D_a^2) = \kappa_f(A^2 - B^2)$ . Тогда модуль коэффициента отражения плоской волны на границе полубесконечной слоистой периодической среды

$$|r_a| = \frac{D_a}{C_a} = \left[ \frac{(\kappa_a - \kappa_f)^2 A^2 + (\kappa_a + \kappa_f)^2 B^2 + 2AB(\kappa_a^2 - \kappa_f^2) \cos \kappa_f h}{(\kappa_a + \kappa_f)^2 A^2 + (\kappa_a - \kappa_f)^2 B^2 + 2AB(\kappa_a^2 - \kappa_f^2) \cos \kappa_f h} \right]^{1/2}. \quad (29)$$

При  $\cos(\kappa_f h/2) \neq 0$  фазовые коэффициенты  $\phi_c$ ,  $\phi_d$  таковы:

$$\begin{aligned} \phi_c &= \arctan \left[ \frac{(\kappa_a + \kappa_f)A - (\kappa_a - \kappa_f)B}{(\kappa_a + \kappa_f)A + (\kappa_a - \kappa_f)B} \tan(\kappa_f h/2) \right], \\ \phi_d &= \arctan \left[ \frac{(\kappa_a - \kappa_f)A - (\kappa_a + \kappa_f)B}{(\kappa_a - \kappa_f)A + (\kappa_a + \kappa_f)B} \tan(\kappa_f h/2) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Разность коэффициентов  $\phi_d$  и  $\phi_c$  определяет величину фазового сдвига плоской волны при её отражении на границе полубесконечной слоистой периодической среды. В случае полного отражения, при  $A^2 = B^2$ , согласно (29), (30)  $\tilde{C}_a = \tilde{D}_a^*$ .

В особо интересных с точки зрения практической реализации случаях, когда  $\kappa_a = \kappa_f$  ( $n_a = n_f$ ) или  $\kappa_a = \kappa_s$  ( $n_a = n_s$ ), величина фазового сдвига определяется фазовой толщиной  $\kappa_f h$  или  $\kappa_s s$  соответственно. При этом с учётом (13) коэффициент отражения

$$r_a = \begin{cases} \left( \frac{B^2}{A^2} \right)^{1/2} \exp(i\kappa_f h) = \left[ \frac{\cos \kappa_s s - \cos(\kappa_f h - K\Lambda)}{\cos \kappa_s s - \cos(\kappa_f h + K\Lambda)} \right]^{1/2} \exp(i\kappa_f h), & n_a = n_f, \\ \left( \frac{D^2}{C^2} \right)^{1/2} \exp(i\kappa_s s) = \left[ \frac{\cos \kappa_f h - \cos(\kappa_s s - K\Lambda)}{\cos \kappa_f h - \cos(\kappa_s s + K\Lambda)} \right]^{1/2} \exp(i\kappa_s s), & n_a = n_f. \end{cases} \quad (31)$$

Начальную фазу волны Флоке – Блоха здесь, не ограничивая общности рассуждений, мы приняли равной нулю ( $\phi_0 = 0$ ). В случае действительных  $\kappa_f$ ,  $\kappa_s$ ,  $\kappa_a$  граничные условия (26) удобно представить в виде системы уравнений, в которую входят только действительные величины:

$$\begin{aligned} (A + B) \cos(\kappa_f h/2) &= C_a \cos \phi_c + D_a \cos \phi_d, \\ \kappa_f (A + B) \sin(\kappa_f h/2) &= \kappa_a (C_a \sin \phi_c - D_a \sin \phi_d), \\ (A - B) \sin(\kappa_f h/2) &= C_a \sin \phi_c + D_a \sin \phi_d, \\ \kappa_f (A - B) \cos(\kappa_f h/2) &= \kappa_a (C_a \cos \phi_c - D_a \cos \phi_d). \end{aligned} \quad (27)$$

Решая систему (27), нетрудно получить для определения амплитудных коэффициентов  $C_a$  и  $D_a$  падающей и отражённой волн в однородной среде следующие уравнения:

#### 4. Критическая волна Флоке – Блоха в полубесконечной слоистой периодической среде

Рассмотрим критический случай, когда поле волны занимает всю полубесконечную слоистую периодическую среду и экспоненциально затухает в однородной полубесконечной среде. В области  $x < 0$  поле представлено распределением (25), и среднее по времени от проекции вектора Пойнтинга на ось  $x$  равно нулю. В этой ситуации волна Флоке – Блоха (критическая волна) переносит энергию лишь вдоль оси  $z$ , и квадраты амплитудных коэффициентов парциальных волн в слоях периодической среды попарно равны:  $A^2 = B^2$ ,  $C^2 = D^2$ . Согласно (13) это возможно, например, когда блоховский волновой вектор располагается на краю запрещённой зоны:

$$KA = \pi l, \quad (32)$$

где  $l = 0, 1, \dots$  – порядок запрещённой зоны. При  $A = B$  и действительных  $\kappa_f, \kappa_s$  распределение амплитуды поля в  $f$ -слоях согласно (18) задаётся симметричной функцией  $2A \cos(\kappa_f \xi_f)$ , а при  $A = -B$  – антисимметричной функцией  $2A \sin(\kappa_f \xi_f)$ . Аналогичным образом симметричное (антисимметричное) распределение амплитуды поля в  $s$ -слоях при  $C = D$  ( $C = -D$ ) задаётся симметричной функцией  $2C \cos(\kappa_s \xi_s)$  (антисимметричной функцией  $2C \sin(\kappa_s \xi_s)$ ). В случае  $\kappa_s = i\gamma_s$  для нахождения распределения амплитуды поля в  $f$ - и  $s$ -слоях достаточно сделать замену  $\sin(\kappa_s \xi_s) \rightarrow i \sinh(\gamma_s \xi_s)$ ,  $\cos(\kappa_s \xi_s) \rightarrow \cosh(\gamma_s \xi_s)$ . При выборе возможных комбинаций симметричных и антисимметричных распределений в  $f$ - и  $s$ -слоях ячейки среды следует учитывать порядок рассматриваемой запрещённой зоны. Поле в соседних ячейках должно быть синфазным при чётных  $l$  и противофазным при нечётных  $l$ .

Запишем граничные условия на плоскости  $x = 0$ , используя соотношения (4), (11), (25) и считая, что  $\phi_f = 0$ :

$$[A \exp(i\kappa_f h/2) + B \exp(-i\kappa_f h/2)] \exp(i\phi_0) = F_a, \quad (33)$$

$$-i\kappa_f [A \exp(i\kappa_f h/2) - B \exp(-i\kappa_f h/2)] \exp(i\phi_0) = \gamma_a F_a.$$

В случае симметричного ( $A = B$ ) или антисимметричного ( $A = -B$ ) распределения поля в  $f$ -слоях периодической слоистой среды, выбирая соответственно  $\phi_0 = 0$  или  $-\pi/2$ , при  $\sin(\kappa_f h) \neq 0$  находим из (33)

$$\gamma_a = \kappa_f \tan(\kappa_f h/2), \quad F_a = 2A \cos(\kappa_f h/2), \quad A = B, \quad (34)$$

$$\gamma_a = -\kappa_f \cot(\kappa_f h/2), \quad F_a = 2A \sin(\kappa_f h/2), \quad A = -B.$$

Двум границам каждой из  $l$  запрещённых зон соответствуют два собственных различных значения,  $\kappa_f = \kappa_{l+}$  и  $\kappa_f = \kappa_{l-}$ , определяемых условием (32); равенства (34) выполняются соответственно при  $n_a = n_{l+}$  и  $n_a = n_{l-}$ :

$$n_a = \left[ n_f^2 - \frac{\kappa_f^2}{k_0^2 \cos^2(\kappa_f h/2)} \right]^{1/2}, \quad A = B, \quad (35)$$

$$n_a = \left[ n_f^2 - \frac{\kappa_f^2}{k_0^2 \sin^2(\kappa_f h/2)} \right]^{1/2}, \quad A = -B,$$

где для поперечного волнового вектора  $\kappa_f$  выбираются собственные значения  $\kappa_{l+}$  или  $\kappa_{l-}$ . При этом эффективный показатель преломления  $n^* = \beta/k_0$  волны Флоке–Блоха, распространяющейся в полубесконечной слоистой среде вдоль её слоёв, в соответствии с уравнениями (34), (35) принимает следующие значения:

$$n^* = [n_f^2 \sin^2(\kappa_f h/2) + n_{l+}^2 \cos^2(\kappa_f h/2)]^{1/2}, \quad A = B, \quad (36)$$

$$n^* = [n_f^2 \cos^2(\kappa_f h/2) + n_{l-}^2 \sin^2(\kappa_f h/2)]^{1/2}, \quad A = -B.$$

Обозначим их при  $\kappa_f = \kappa_{l+}$  и  $\kappa_f = \kappa_{l-}$  как  $n_{l+}^*$  и  $n_{l-}^*$  соответственно. Следует подчеркнуть, что для рассмотренной волны амплитудные коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  неизменны во всех ячейках слоистой периодической среды, и экспоненциальное спадание амплитуды поля наблюдается только в однодородной области при  $x < 0$ .

## 5. Поверхностная волна на границе полубесконечной слоистой периодической среды

Рассмотрим области значений  $\kappa_f$ , при которых выполняется условие  $|\cos KA| > 1$  и блоховский волновой вектор согласно (7) становится комплексным:

$$K = l(\pi/\Lambda) - iK_i, \quad l = 0, 1, \dots \quad (37)$$

С этими областями комплексных значений блоховского волнового вектора связаны фотонные запрещённые зоны, порядок которых определяет параметр  $l$  (он может принимать любые целочисленные неотрицательные значения). В бесконечной периодической среде существование волн с комплексными значениями блоховского волнового вектора запрещено. Если слоистая периодическая среда является полубесконечной, экспоненциально затухающие волны существуют вблизи её границы.

При действительных  $\kappa_f, \kappa_s$  (случай радиационно-связанных слоёв периодической среды) подстановкой (37) в (12) для амплитудных коэффициентов  $A$  и  $B$  (здесь и далее  $K_i > 0$ ) можно получить следующее выражение:

$$A = \frac{A_0}{2} [\cos(\kappa_s s) - (-1)^l \cos(\kappa_f h) \cosh(K_i A)] - i(-1)^l \sin(\kappa_f h) \sinh(K_i A) = |A| \exp(i\phi_a),$$

$$|A| = \frac{A_0}{2} \left\{ \cos^2(\kappa_s s) + \frac{1}{2} [\cosh(2K_i A) + \cos(2\kappa_f h)] - 2(-1)^l \cos(\kappa_f h) \cos(\kappa_s s) \cosh(K_i A) \right\}^{1/2}, \quad (38)$$

$$\phi_a = \arctan \left\{ \sin(\kappa_f h) \sinh(K_i A) \times [\cos(\kappa_f h) \cosh(K_i A) - (-1)^l \cos(\kappa_s s)]^{-1} \right\},$$

$$B = \frac{A_0}{4} \left( \frac{\kappa_f}{\kappa_s} - \frac{\kappa_s}{\kappa_f} \right) \sin(\kappa_f h) \sin(\kappa_s s) = |B| \exp(i\phi_b),$$

$$\phi_b = 0 \quad (B > 0), \quad \phi_b = \pi \quad (B < 0),$$

где  $B, \phi_a, \phi_b$  – действительные величины, а  $A$  – комплексная величина, причём, как следует из (13) и (37),  $|A| = |B|$  и  $|C| = |D|$ . Это позволяет представить амплитудные коэффициенты следующим образом:

$$C = \bar{C} \exp(i\phi_c), \quad D = -\bar{C} \exp(i\phi_d),$$

$$\bar{C} = A_0 \sin(\kappa_f h) \frac{\kappa_s + \kappa_f}{2\kappa_s} \left\{ \frac{1}{2} [\cosh(K_i A) - (-1)^l \times \cos(\kappa_f h + \kappa_s s)] \right\}^{1/2} = -A_0 \sin(\kappa_f h) \frac{\kappa_s - \kappa_f}{2\kappa_s} \times \left\{ \frac{1}{2} [\cosh(K_i A) - (-1)^l \cos(\kappa_f h - \kappa_s s)] \right\}^{1/2}, \quad (39)$$

$$\phi_c = -\arctan \left( \tanh \frac{K_i A}{2} \cot \frac{\kappa_f h + \kappa_s s + \pi l}{2} \right),$$

$$\phi_d = -\arctan \left( \tanh \frac{K_i A}{2} \cot \frac{\kappa_f h - \kappa_s s + \pi l}{2} \right).$$

Применив к распределению (4) соотношения (11), (38), (39), запишем распределение амплитуды поля  $E(x)$  в  $f$ - и  $s$ -слоях  $m$ -й ячейки слоистой среды в виде

$$E(x) = \begin{cases} 2(-1)^m |A| \exp(-K_i A m) \cos[(\phi_b - \phi_a)/2 + \kappa_f \xi_f] \exp\{i[\phi_0 + (\phi_a + \phi_b)/2]\}, \\ \xi_f = x - h/2 - A m, \quad A m < x < A m + h, \quad m = 0, 1, \dots, \\ 2(-1)^m \bar{C} \exp[(-K_i A)(m + 1/2)] \sin[(\phi_d - \phi_c)/2 + \kappa_s \xi_s] \exp\{i[\phi_0 + (\phi_c + \phi_d - \pi l)/2]\}, \\ \xi_s = x - h - s/2 - A m, \quad A m + h < x < A(m + 1). \end{cases} \quad (40)$$

Подстановка (40) в граничные условия (33) при  $x = 0$  приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \kappa_f \tan[(\kappa_f h + \phi_a)/2], \quad B = |B|, \\ \gamma_a &= -\kappa_f \cot[(\kappa_f h + \phi_a)/2], \quad B = -|B|, \\ F_a &= 2(-1)^m |A| \cos[(\kappa_f h + \phi_a - \phi_b)/2], \end{aligned} \quad (41)$$

которые выполняются внутри каждой из  $l$  запрещённых зон при значениях  $\kappa_f$ , лежащих от  $\kappa_{L-}$  до  $\kappa_{L+}$ . Равенства (41) выполняются лишь при тех значениях показателя преломления однородной среды, которые удовлетворяют условиям, следующим из равенств (41):

$$\begin{aligned} n_a &= \left\{ n_f^2 - \frac{\kappa_f^2}{k_0^2 \cos^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2]} \right\}^{1/2}, \quad B = |B|, \\ n_a &= \left\{ n_f^2 - \frac{\kappa_f^2}{k_0^2 \sin^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2]} \right\}^{1/2}, \quad B = -|B|. \end{aligned} \quad (42)$$

Допустимые значения показателя преломления  $n_a$ , при которых возможны поверхностные волны, локализованные вблизи границы слоистой среды, находятся в пределах от  $n_{L+}$  до  $n_{L-}$ , а значения эффективного показателя преломления  $n_a^*$  – от  $n_{L+}^*$  до  $n_{L-}^*$ :

$$\begin{aligned} n^* &= \{ n_f^2 \sin^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] \\ &\quad + n_a^2 \cos^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] \}^{1/2}, \quad B = |B|, \\ n^* &= [ n_f^2 \cos^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] \\ &\quad + n_a^2 \sin^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] \}^{1/2}, \quad B = -|B|. \end{aligned} \quad (43)$$

Используя связь  $n^{*2} = n_f^2 - \kappa_f^2/k_0^2$ , выполняющуюся для  $\kappa_f$  и  $n^* = \beta/k_0$  в  $f$ -слое, запишем дисперсионные уравнения для поверхностных волн на границе полубесконечной периодической слоистой среды:

$$\begin{aligned} \kappa_f^2 &= k_0^2 (n_f^2 - n_a^2) \cos^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2], \quad B = |B|, \\ \kappa_f^2 &= k_0^2 (n_f^2 - n_a^2) \sin^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] B = -|B|. \end{aligned} \quad (44)$$

При действительных  $\kappa_f$  и мнимых  $\kappa_s = i\gamma_s$  (случай туннельно-связанных волноводных слоёв периодической среды) подстановкой (37) в (12) для амплитудных коэффициентов  $A$  и  $B$  можно получить

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_0}{2} [\cosh(\gamma_s s) - (-1)^l \cos(\kappa_f h) \cosh(K_i A) \\ &\quad - i(-1)^l \sin(\kappa_f h) \sinh(K_i A)] = |A| \exp(i\phi_a), \\ |A| &= \frac{A_0}{2} \left\{ \cosh^2(\gamma_s s) + \frac{1}{2} [\cosh(2K_i A) + \cos(2\kappa_f h)] \right. \\ &\quad \left. - 2(-1)^l \cos(\kappa_f h) \cosh(\gamma_s s) \cosh(K_i A) \right\}^{1/2}, \\ \phi_a &= \arctan\{ \sin(\kappa_f h) \sinh(K_i A) \\ &\quad \times [\cos(\kappa_f h) \cosh(K_i A) - (-1)^l \cosh(\gamma_s s)]^{-1} \}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$B = \frac{A_0}{4} \left( \frac{\kappa_f}{\gamma_s} + \frac{\gamma_s}{\kappa_f} \right) \sin(\kappa_f h) \sinh(\gamma_s s) = |B| \exp(i\phi_b),$$

$$\phi_b = 0 \quad (B > 0), \quad \phi_b = \pi \quad (B < 0),$$

где  $B$ ,  $\phi_a$ ,  $\phi_b$  – по-прежнему действительные величины, а  $A$  – комплексная, и  $|A| = |B|$ . Амплитудные коэффициенты  $C$ ,  $D$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} C &= \bar{C} \exp(i\phi_c), \quad \bar{C} = \frac{A_0 \sin(\kappa_f h)}{2\gamma_s} \\ &\quad \times \{ [\cosh(\gamma_s s - K_i A) - (-1)^l \cos(\kappa_f h)] (\gamma_s^2 + \kappa_f^2)/2 \}^{1/2}, \\ \phi_c &= \arctan \frac{\gamma_s \tanh[(\gamma_s s - K_i A)/2] - \kappa_f \tan[(\kappa_f h + \pi l)/2]}{\kappa_f \tanh[(\gamma_s s - K_i A)/2] + \gamma_s \tan[(\kappa_f h + \pi l)/2]}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$D = \bar{D} \exp(i\phi_d), \quad \bar{D} = \frac{A_0 \sin(\kappa_f h)}{2\gamma_s}$$

$$\times \{ [\cosh(\gamma_s s + K_i A) - (-1)^l \cos(\kappa_f h)] (\gamma_s^2 + \kappa_f^2)/2 \}^{1/2},$$

$$\phi_d = -\arctan \frac{\gamma_s \tanh[(\gamma_s s + K_i A)/2] - \kappa_f \tan[(\kappa_f h + \pi l)/2]}{\kappa_f \tanh[(\gamma_s s + K_i A)/2] + \gamma_s \tan[(\kappa_f h + \pi l)/2]}.$$

Теперь запишем распределение поля в  $m$ -й ячейке структуры, используя локальные координаты  $\xi_f = x - h/2 - A m$  и  $\xi_s = x - s/2 - h - A m$ , отсчитываемые от середин соответствующих слоёв:

$$\begin{aligned} E(x, z) &= 2(-1)^m |A| \exp(-K_i A m) \cos[(\phi_b - \phi_a)/2 + \kappa_f \xi_f] \\ &\quad \times \exp\{i[\phi_0 + (\phi_a + \phi_b)/2 - \beta z]\}, \quad -h/2 < \xi_f < h/2, \\ E(x, z) &= (-1)^m |E_s(\xi_s)| \exp[i\phi_s(\xi_s)] \exp[-K_i A(m + 1/2)] \\ &\quad \times \exp\{i[\phi_0 + (\phi_c + \phi_d)/2 - \pi l/2 - \beta z]\}, \quad -s/2 < \xi_s < s/2, \end{aligned} \quad (47)$$

$$E_s(\xi_s) = [\bar{C}^2 \exp(2\gamma_s \xi_s) + \bar{D}^2 \exp(-2\gamma_s \xi_s) + 2\bar{C}\bar{D} \cos(\phi_c - \phi_d)]^{1/2},$$

$$\phi_s(\xi_s) = \arctan \left[ \frac{\bar{C} \exp(\gamma_s \xi_s) - \bar{D} \exp(-\gamma_s \xi_s)}{\bar{C} \exp(\gamma_s \xi_s) + \bar{D} \exp(-\gamma_s \xi_s)} \tan \frac{\phi_c - \phi_d}{2} \right].$$

Используя (25), (33) и (47), нетрудно убедиться в справедливости уравнений (41)–(44) и в данном случае туннельно-связанных волноводных слоёв. Единственное отличие состоит в том, что коэффициент  $A$  и фазы  $\phi_a$ ,  $\phi_b$  вычисляются не из (38), а из (45).

При изменении  $\delta h$  ширины  $f$ -слоя  $h$  в нулевой ячейке слоистой среды диапазон допустимых значений  $n_a$  показателя преломления однородной среды можно расширить; при этом условие возникновения поверхностных волн выглядит следующим образом:



$$\gamma_a = \kappa_f \tan[\phi_a/2 + \kappa_f(h/2 + \delta h)], \quad B = |B|, \quad (48)$$

$$\gamma_a = -\kappa_f \cot[\phi_a/2 + \kappa_f(h/2 + \delta h)], \quad B = -|B|.$$

В этом случае, как и в случае (42), выбираются значения поперечного волнового вектора соответствующие запрещённой зоне порядка  $l$ , т.е. в диапазоне  $\kappa_{l+} - \kappa_{l-}$ . При этом значения  $n^*$  эффективного показателя преломления остаются в прежних пределах – от  $n_{l+}^*$  до  $n_{l-}^*$ :

$$n^* = \{ [n_f^2 \sin^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] + n_a^2 \cos^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] \}^{1/2}, \quad B = |B|, \quad (49)$$

$$n^* = \{ [n_f^2 \cos^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] + n_a^2 \sin^2[(\kappa_f h + \phi_a)/2] \}^{1/2}, \quad B = -|B|.$$

Тем не менее диапазон допустимых значений показателя преломления однородной среды, при которых возможны поверхностные волны, вследствие изменения  $\delta h$  изменяется согласно условиям, следующим из равенств (48):

$$n_a = \left\{ n_f^2 - \frac{\kappa_f^2}{k_0^2 \cos^2[\phi_a/2 + \kappa_f(h/2 + \delta h)]} \right\}^{1/2}, \quad B = |B|, \quad (50)$$

$$n_a = \left\{ n_f^2 - \frac{\kappa_f^2}{k_0^2 \sin^2[\phi_a/2 + \kappa_f(h/2 + \delta h)]} \right\}^{1/2}, \quad B = -|B|.$$

Дисперсионные уравнения для поверхностных волн на границе полубесконечной периодической слоистой среды при изменении толщины приграничного слоя имеют следующий вид:

$$\kappa_f^2 = k_0^2 (n_f^2 - n_a^2) \cos^2[\phi_a/2 + \kappa_f(h/2 + \delta h)], \quad B = |B|, \quad (51)$$

$$\kappa_f^2 = k_0^2 (n_f^2 - n_a^2) \sin^2[\phi_a/2 + \kappa_f(h/2 + \delta h)], \quad B = -|B|.$$

Для иллюстрации использования полученных в данной работе результатов мы рассчитали фазовый фронт (рис.2,а) и поперечное распределение амплитуды поля (рис.2,б) волны Флоке–Блоха при  $n^* = 1.45975$ , распространяющейся в неограниченной слоистой периодической среде с параметрами  $h = 1.1$  мкм,  $s = 1.3$  мкм,  $n_f = 1.465$  и  $n_s = 1.46$ , соответствующими параметрам структуры, исследованной в работе [15]. Форма фронта волны не является плоской даже в пределах однородных слоёв периодической среды, т.е. имеет место не только преломление фронта волны на межслойных границах, но также искривление волновых поверхностей. Распределение амплитуды поля приведено на рис.3 для случая критической волны Флоке–Блоха, распространяющейся в полубесконечной слоистой периодической среде (рис.3,а), и поверхностной волны (рис.3,б). На рис.4 представлена зависимость квадрата модуля коэффициента отражения плоской волны, падающей из однородной среды с  $n_a = n_s$ , рассчитанная по формуле (31). Из рис.4 видно, что в данном случае периодическая слоистая среда может быть

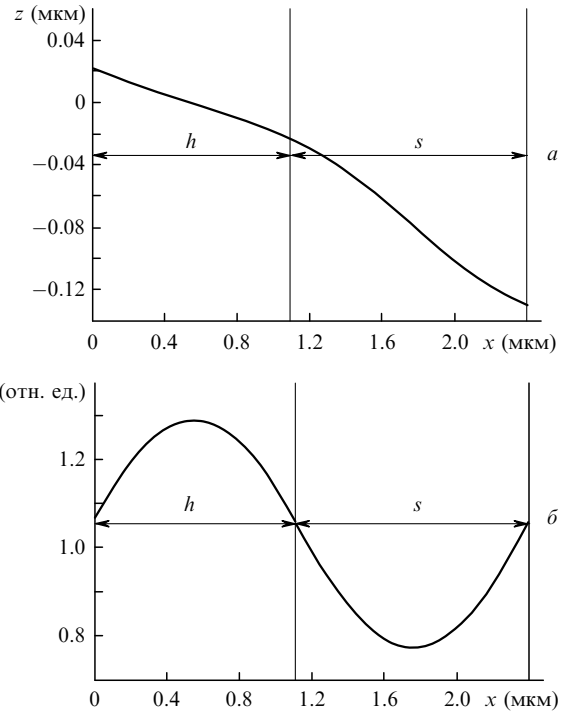


Рис.2. Фазовый фронт (а) и поперечное распределение амплитуды поля (б) волны Флоке–Блоха, распространяющейся в неограниченной слоистой периодической среде с параметрами  $h = 1.1$  мкм,  $s = 1.3$  мкм,  $n_f = 1.465$ ,  $n_s = 1.46$ ,  $n^* = 1.45975$ .

охарактеризована как одномерный фотонный кристалл, в котором границы фотонных запрещённых зон отвечают значениям поперечного волнового вектора  $\kappa_a$  падающей волны, равным  $\kappa_{l-}$  и  $\kappa_{l+}$ .

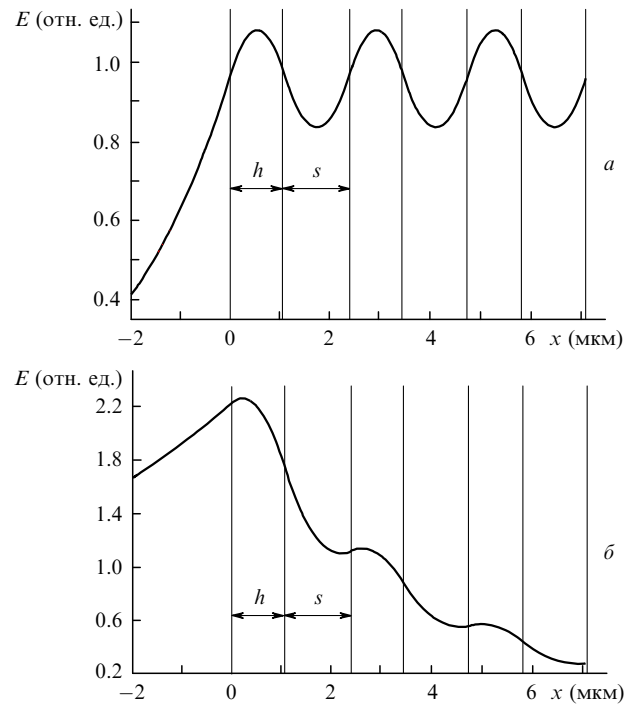


Рис.3. Поперечные распределения амплитуды поля критической волны Флоке–Блоха в полубесконечной слоистой периодической среде с параметрами  $h = 1.1$  мкм,  $s = 1.3$  мкм,  $n_f = 1.465$ ,  $n_s = 1.46$ ,  $n_a = 1.46188$ ,  $n^* = 1.46251$  (а) и поверхностной волны в среде с параметрами  $h = 1.1$  мкм,  $s = 1.3$  мкм,  $n_f = 1.465$ ,  $n_s = 1.46$ ,  $n_a = 1.46271$ ,  $n^* = 1.46278$  (б).

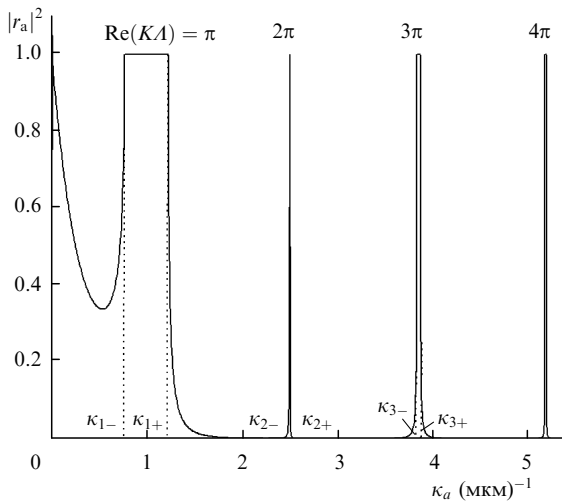


Рис.4. Зависимости квадрата модуля коэффициента отражения  $r_a$  от поперечной составляющей  $\kappa_a$  волнового вектора плоской волны, падающей на границу полубесконечной слоистой периодической среды с параметрами  $h = 1.1$  мкм,  $s = 1.3$  мкм,  $n_f = 1.465$ ,  $n_s = 1.46$ ,  $n_a = 1.46$ .

## 6. Заключение

Таким образом, в настоящей работе получено точное решение волнового уравнения для случая распространения света в слоистой периодической среде со ступенчатым профилем показателя преломления. Решение представлено в форме неоднородной волны (Флоке–Блоха), для которой в аналитическом виде записано распределение амплитуды поля и определена форма её волновых поверхностей. Рассмотрены случаи радиационной и туннельной связи между слоями среды. Полученные нами решения, позволили найти коэффициент отражения плоской волны, падающей из однородной среды на границу полубесконечной слоистой периодической среды и возбуждающей в ней волну Флоке–Блоха. Выделена и рассмотрена критическая волна Флоке–Блоха как промежуточный случай между случаями свободной распространяющейся и затухающей в полубесконечной периодической среде волнами Флоке–Блоха. Найдены условия возникновения критической волны Флоке–Блоха. Записаны дисперсионные уравнения и распределение поля для поверхностных волн (мод), локализованных вблизи границы полубесконечной слоистой среды, определены условия их возникновения, установлены границы допустимых значений показателя преломления прилегающей среды в зависимости от параметров слоистой периодической среды. Получены дисперсионные соотношения для поверхностных мод полубесконечной слоистой периодической среды (ограниченной системы связанных волноводов) при вариации толщины приграничного слоя.

Авторы благодарят РФФИ (грант № 07-02-00064) за финансовую поддержку работы.

1. Stokes G. *Proceedings of the Royal Society of London*, **11**, 545 (1862).
2. Lord Rayleigh. *Philosophical Magazine*, **26**, 256 (1888).
3. Элаши Ш. *Труды ИИЭР*, **64** (12), 22 (1976).

4. Qin L.H., Zheng Y.D., Zhang R. *Appl. Phys. A*, **55**, 297 (1992).
5. Hattori N., Tsurumachi N., Kavato S., Nakatsuka H. *Phys. Rev. B*, **50**, 4220 (1994).
6. Misra K.D., Mishra R.K. *Оптика и спектроскопия*, **97** (3), 475 (2004).
7. Lit J.W.Y., Li Y.F., Hewak D.W. *Can. J. Phys.*, **66**, 914 (1988).
8. Beach R.J., Feit M.D., Page R.H., Brasure L.D., Wilcox R., Payne S.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19** (7), 1521 (2002).
9. Botez D., Naportovich A.P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 975 (1994).
10. Pertsch T., Zentgraf T., Streppel U., Brauer A., Peschel U., Lederer F. *Proc. ECIO'01* (Paderborn, Germany, 2001, p. 21).
11. Гончаров А.А., Свидзинский К.К., Сычугов В.А., Усиевич Б.А. *Квантовая электроника*, **33** (4), 342 (2003).
12. Goncharov A.A., Svidzinsky R.R., Sychugov V.A., Usievich B.A. *Laser Phys.*, **13** (8), 1017 (2003).
13. Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Голант К.М. *Квантовая электроника*, **35** (10), 554 (2005).
14. Нурлигареев Д.Х., Усиевич Б.А., Сычугов В.А., Голант К.М. *Квантовая электроника*, **36** (7), 653 (2006).
15. Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Голант К.М. *Оптика и спектроскопия*, **101** (5), 999 (2006).
16. Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Голант К.М. *Квантовая электроника*, **37** (6), 580 (2007).
17. Winn J.N., Fink Y., Fan S., Joannopoulos J.D. *Opt. Lett.*, **23** (20), 1573 (1998).
18. Chigrin D.N., Lavrinenko A.V., Yarotsky D.A., Gaponenko S.V. *Appl. Phys. A*, **68**, 25 (1999).
19. Lekner J. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **2**, 349 (2000).
20. Bria D., Djafari-Rouhani B., El Boudouti E.H., Mir A., Akjouj A., Nougouai A. *J. Appl. Phys.*, **91**, 2569 (2002).
21. Lee H., Yao T. *J. Appl. Phys.*, **93**, 819 (2003).
22. Settimi A., Severini S., Mattiucci N., Sibilia C., Gentini M., D'Aguanano G., Bertolotti M., Scalora M., Bloemer M., Bowden C.M. *Phys. Rev. E*, **68**, 026614 (2003).
23. Morozov G.V., Sprung D.W.L., Martorell J. *Phys. Rev. E*, **69**, 016612 (2004).
24. Hoenders B.J., Bertolotti M. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **6182**, 61821F (2006).
25. Martorell J., Sprung D.W.L., Morozov G.V. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **8**, 630 (2006).
26. Ярич А., Юх П. *Оптические волны в кристаллах* (М.: Мир, 1987, гл. 6).
27. Kogelnik H. *Bell. Syst. Tech. J.*, **48** (9), 2909 (1969).
28. Yeh P. *Optical Waves in Layered Media* (New York: John Wiley, 1988, Ch. 8).
29. Gaylord T.K., Moharam M.G. *Proc. IEEE*, **73**, 894 (1985).
30. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 1068 (1995).
31. Yeh P., Yariv A., Hong C.S. *J. Opt. Soc. Am.*, **67** (4), 423 (1977).
32. Yariv A. *Quantum Electronics* (New York: Wiley, 1977).
33. Bloch F. *Z. Phys.*, **52**, 555 (1928).
34. Ng W., Yeh P., Chen P.C., Yariv A. *Appl. Phys. Lett.*, **32**, 370 (1978).
35. Yeh P., Yariv A., Cho A.Y. *Appl. Phys. Lett.*, **32**, 104 (1978).
36. Meade R.D., Brommer K.D., Rappe A. M., Joannopoulos J.D. *Phys. Rev. B*, **44**, 10961 (1991).
37. Ramirez-Duverger A.S., Gaspar-Armenta J., Garcia-Llamas R. *Opt. Commun.*, **277**, 302 (2007).
38. Robertson W.M. *J. Lightwave Technol.*, **17** (11), 2013 (1999).
39. Robertson W.M., May M.S. *Appl. Phys. Lett.*, **74** (13), 1800 (1999).
40. Swinn M., Robertson W.M. *Sensors and Actuators B.*, **105**, 360 (2005).
41. Walpita L.M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**, 595 (1985).
42. Revely J.F. *Appl. Opt.*, **20**, 3158 (1981).
43. Li Y.F., Lit J.W.Y. *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1050 (1988).
44. Saldana X.I., Gonzalez de la Cruz G. *J. Opt. Soc. Am. A*, **8**, 36 (1991).
45. Ramos-Mendieta F., Halevi P. *Opt. Soc. Am. B*, **14** (2), 370 (1997).