

Влияние разности фаз коэффициентов связи встречных волн на релаксационные колебания в автомодуляционном режиме твердотельного кольцевого лазера

И.И.Золотоверх

Теоретически исследовано влияние разности фаз коэффициентов связи на релаксационные частоты в спектре интенсивности твердотельного кольцевого лазера, работающего в автомодуляционном режиме первого рода. Обнаружена сильная зависимость одной из частот релаксационных колебаний от разности фаз коэффициентов связи. Проведено аналитическое исследование устойчивости автомодуляционного режима.

Ключевые слова: релаксационные колебания, твердотельный кольцевой лазер, автомодуляционный режим генерации.

1. Введение

Квантовые и технические флуктуации могут привести к появлению в экспериментально измеряемых спектрах интенсивностей лазеров резонансных пиков [1]. П.А.Хандохин и Я.И.Ханин впервые поставили и исследовали вопрос о роли релаксационных частот в спектре интенсивности твердотельного кольцевого лазера (ТКЛ). Они нашли три релаксационных колебания в спектре ТКЛ, работающего в стационарном режиме генерации двух встречных волн с существенно неравными постоянными интенсивностями [2–5].

Позднее были исследованы релаксационные колебания в спектре интенсивности для одного из наиболее распространённых режимов генерации ТКЛ – автомодуляционного режима (АР) первого рода, для которого характерны противофазные синусоидальные автоколебания интенсивностей встречных волн. Анализ релаксационных колебаний важен для задач нелинейной динамики, в которых имеет место параметрическое взаимодействие автомодуляционных и релаксационных колебаний, а также при исследовании устойчивости АР и в задачах, связанных с повышением стабильности выходных характеристик излучения (см., напр., обзор [6] и ссылки в нём). Ранее релаксационные колебания в АР исследовались теоретически и экспериментально в работах [7–10]. Как известно, в АР спектр содержит две релаксационные частоты (основная ω_r и дополнительная ω_{r1}). При отсутствии частотной невзаимности резонатора выражения для релаксационных частот ω_r и ω_{r1} имеют вид [7]

$$\omega_r = \left(\frac{\omega_c}{Q} \frac{\eta}{T_1} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$$\omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_c}{Q} \frac{\eta}{T_1} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

И.И.Золотоверх. НИИ ядерной физики им. Д.В.Скобельцина МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: Zolotoverkh@yandex.ru

Поступила в редакцию 17 октября 2007 г., после доработки – 18 апреля 2008 г.

где ω_c – собственная частота; Q – добротность резонатора; η – превышение накачки над порогом; T_1 – время релаксации инверсной населённости.

Отношение частот ω_{r1}/ω_r , измеренное в эксперименте [7], находится в согласии с выражениями (1), (2), т. е. равно $1/\sqrt{2}$. Однако в работе [8] измеренное отношение ω_{r1}/ω_r отличалось от $1/\sqrt{2}$. Одной из возможных причин этого является различие поляризаций полей встречных волн [8, 9]. Здесь мы рассматриваем другой фактор, влияющий на отношение частот ω_{r1}/ω_r , – разность фаз коэффициентов связи.

2. Теоретический анализ релаксационных частот

Численное и аналитическое исследования проводились на основе стандартной модели ТКЛ [6], в которой используется следующая система уравнений для комплексных амплитуд $E_{1,2}$ полей встречных волн и пространственных гармоник N_0 , N_{\pm} инверсной населённости:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{1,2}}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma l}{T} N_0 - \frac{\omega_c}{Q} \right) E_{1,2} + \frac{1}{2} \left(i \tilde{m}_{1,2} + \frac{\sigma l}{T} N_{\pm} \right) E_{2,1}, \\ T_1 \frac{dN_0}{dt} &= N_{th}(1 + \eta) - N_0 [1 + a(|E_1|^2 + |E_2|^2)] \\ &\quad - N_+ a E_1 E_2^* - N_- a E_1^* E_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$T_1 \frac{dN_{\pm}}{dt} = -N_{\pm} [1 + a(|E_1|^2 + |E_2|^2)] - N_0 a E_1^* E_2,$$

$$N_- = N_+^*.$$

Здесь a – параметр насыщения; T – время обхода светом резонатора; σ – сечение вынужденного излучения для лазерного перехода; l – периметр резонатора; $\tilde{m}_{1,2} = m \times \exp(\pm i\theta_{1,2})$ – комплексные коэффициенты связи; m и $\theta_{1,2}$ – модуль и фазы коэффициентов связи.

$$N_{th} = \frac{T}{\sigma l} \left(\frac{\omega_c}{Q} - m \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| \right)$$

– пороговая инверсная населённость. В системе уравнений (3) полагается, что добротности резонатора и модули коэффициентов связи для встречных волн равны, частотная невзаимность резонатора отсутствует, а относительная отстройка частоты от центра линии усиления мала и ею пренебрегается.

Исследование релаксационных частот в АР проводится в настоящей работе методом, аналогичным использованному в [7]. Кратко опишем суть метода. Сначала переходим в исходной системе уравнений к новым переменным:

$$I_{1,2} = a|E_{1,2}|^2, \quad U = \operatorname{Re}(aE_1E_2^*), \quad V = \operatorname{Im}(aE_1E_2^*),$$

$$N_r = \operatorname{Re} N_+, \quad N_i = \operatorname{Im} N_+.$$

Рассматриваем малые возмущения относительно периодического решения:

$$i_{1,2} = I_{1,2} - I_{1,2}^0, \quad u = U - U^0, \quad v = V - V^0,$$

$$n_0 = N_0 - N_0^0, \quad n_r = N_r - N_r^0, \quad n_i = N_i - N_i^0.$$

Здесь верхний индекс 0 относится к решению, описывающему АР, малыми буквами обозначены возмущения. Для таких возмущений получим линейную систему дифференциальных уравнений с периодически зависящими от времени коэффициентами. Как и в [7], мы пренебрегаем коэффициентами, зависящими от времени. Это справедливо, если выполняется неравенство

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_m^2} \ll 1,$$

где ω_m – частота автомодуляции. Мы использовали следующее аналитическое выражение для ω_m , взятое из работы [11]:

$$\omega_m = m \left| \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|. \quad (4)$$

В результате получаем систему уравнений с не зависящими от времени коэффициентами. Решение её в общем случае может быть записано в виде

$$i_{1,2} = i_{1,2}^0 \exp(i\omega t), \quad u = u^0 \exp(i\omega t), \quad v = v^0 \exp(i\omega t),$$

$$n_0 = n_0^0 \exp(i\omega t), \quad n_r = n_r^0 \exp(i\omega t), \quad n_i = n_i^0 \exp(i\omega t), \quad (5)$$

где $i_{1,2}^0, u^0, v^0, n_0^0, n_r^0, n_i^0$ – не зависящие от времени коэффициенты. Подставив (5) в систему линейных дифференциальных уравнений, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Эта система оказывается достаточно громоздкой, чтобы её решать непосредственно. Поэтому сделаем дальнейшие упрощения. В [7] пренебрегалось всеми членами, пропорциональными $m(\omega_c/Q)^{-1}$, т. е. предполагалось, что

$$m \left(\frac{\omega_c}{Q} \right)^{-1} \ll 1. \quad (6)$$

Мы пренебрегаем только членами второго порядка малости, т. е. считаем, что справедливо неравенство

$$\left[m \left(\frac{\omega_c}{Q} \right)^{-1} \right]^2 \ll 1. \quad (7)$$

Для того чтобы полученная система имела решение, необходимо, чтобы ее определитель D был равен нулю:

$$D = D_0 + D_1 = 0, \quad (8)$$

где

$$D_0 = \omega_m^2 \left[\omega - \frac{(\omega_{r1}^0)^2}{\omega} \right] \left[\omega - \frac{(\omega_r^0)^2}{\omega} \right]; \quad (9)$$

$$D_1 = -2 \left(1 + \frac{\eta_{\text{eff}}}{2} \right) \frac{\omega_m^4}{\omega^2 T_1^2} \tan^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}; \quad (10)$$

$$\eta_{\text{eff}} = \eta - \frac{m}{\omega_c/Q} \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|; \quad (11)$$

$$\omega_r^0 = \left(\frac{\omega_c \eta_{\text{eff}}}{Q T_1} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

$$\omega_{r1}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_c \eta_{\text{eff}}}{Q T_1} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Определитель (8) отличается от полученного в [7] наличием дополнительного слагаемого (10).

Решим уравнение (8), определяющее релаксационные частоты, двумя способами. В первом случае мы пренебрежём слагаемым (10). Тогда решение уравнения (8) будет выражаться формулами (12), (13), аналогичными формулам (1), (2) из работы [7]. Отличие состоит в том, что в соотношениях (12), (13) вместо превышения накачки над порогом η входит эффективное превышение η_{eff} , определяемое формулой (11). Это может оказать существенное влияние на величины релаксационных частот в случае больших разностей фаз коэффициентов связи. При малой разности фаз ($\theta_1 - \theta_2 \rightarrow 0$) $\eta_{\text{eff}} \rightarrow \eta$ и оказываются справедливыми формулы (1), (2). При больших разностях фаз коэффициентов связи ($|\theta_1 - \theta_2| \rightarrow \pi$) возникают существенные отличия выражений для релаксационных частот от выражений (1), (2).

Во втором случае найдём точное аналитическое решение (8), не пренебрегая слагаемым (10). Уравнение (8) сводится к биквадратному уравнению четвёртой степени. Его решение имеет вид:

$$\omega_r^+ = \left[\frac{b + (b^2 - 4c)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (14)$$

$$\omega_{r1}^+ = \left[\frac{b - (b^2 - 4c)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (15)$$

где

$$b = \frac{3}{2} (\omega_r^0)^2, \quad (16)$$

$$c = \frac{1}{2} (\omega_r^0)^4 - 2 \left(1 + \frac{\eta_{\text{eff}}}{2} \right) \frac{\omega_m^2}{T_1^2} \tan^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \quad (17)$$

Полученные выражения описывают влияние разности фаз коэффициентов связи на релаксационные частоты.

Мы провели численное решение исходной системы уравнений (3) и сравнили результаты, полученные с использованием формул (14)–(17), с результатами численного моделирования при параметрах, характерных для кольцевых чип-лазеров на кристалле YAG:Nd [1]. На рис.1 представлены зависимости основной и дополнительной релаксационных частот от превышения накачки

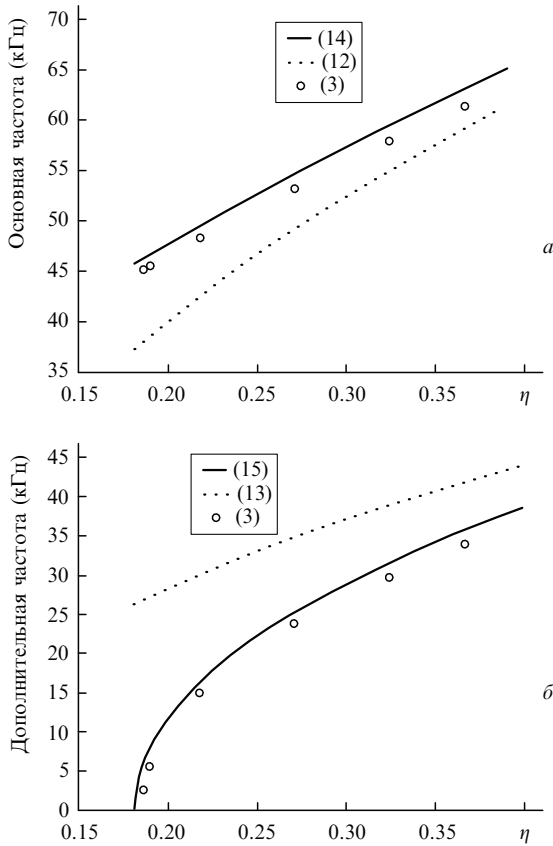


Рис.1. Зависимости основной (а) и дополнительной (б) релаксационных частот от превышения накачки над порогом η . Сплошные кривые – расчёт по формулам (14), (15), пунктирные кривые – по формулам (12), (13), точки – результаты численного решения системы уравнений (3).

над порогом η при $m/(2\pi) = 1000$ кГц, $\theta_1 = 2.74$ рад, $\theta_2 = 0$, $T_1 = 240$ мкс, $\omega_c/Q = 1.1 \times 10^8$ с⁻¹. При этих параметрах расчёт по формуле (4) даёт $m/(2\pi) = 200$ кГц.

На рис.1 показаны результаты численного решения системы уравнений (3) и расчётов на основе полученных аналитических выражений. Видно, что формулы (14), (15) хорошо аппроксимируют решение системы (3) при больших разностях фаз коэффициентов связи (при любых η), а формулы (12), (13) дают большие погрешности при малых превышениях накачки над порогом ($\eta \rightarrow 0$).

Из (14), (15) следует, что отношение ω_{r1}^r/ω_r^r определяется выражением

$$\frac{\omega_{r1}^r}{\omega_r^r} = \left[\frac{b - (b^2 - 4c)^{1/2}}{b + (b^2 - 4c)^{1/2}} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

На рис.2 приведена рассчитанная по формуле (18) зависимость величины $1 - \sqrt{2}\omega_{r1}^r/\omega_r^r$, характеризующая относительное отклонение ω_{r1}^r/ω_r^r от $1/\sqrt{2}$, от разности фаз коэффициентов связи при $\omega_m/(2\pi) = 200$ кГц, $\omega_r^0/(2\pi) = 60$ кГц, $T_1 = 240$ мкс, $\eta_{\text{eff}} = 0.3$. При $\theta_1 - \theta_2 \rightarrow \pi$ отношение релаксационных частот существенно отличается от $1/\sqrt{2}$. Таким образом, отличие отношения релаксационных частот от величины $1/\sqrt{2}$ может быть обусловлено влиянием разности фаз коэффициентов связи. Как показано в [9], другой причиной изменения отношения ω_{r1}^r/ω_r^r является различие поляризаций излучения встречных волн. В реальном лазере может иметь место совместное действие обоих факторов.

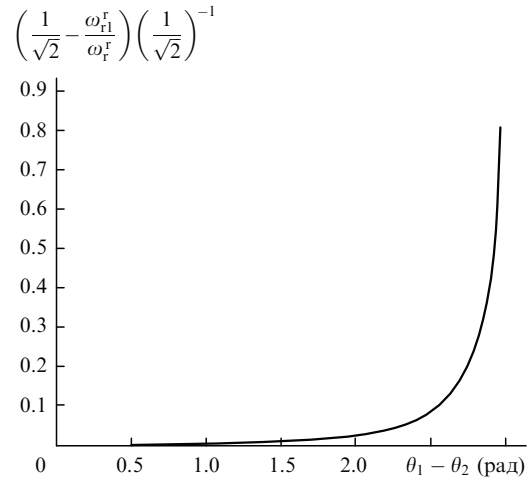


Рис.2. Зависимость величины $(1/\sqrt{2} - \omega_{r1}^r/\omega_r^r)(1/\sqrt{2})^{-1}$ от разности фаз коэффициентов связи $\theta_1 - \theta_2$.

3. Устойчивость АР

Анализ выражения (15) показывает, что при достаточно малых превышениях накачки над порогом дополнительная релаксационная частота ω_{r1}^r перестаёт существовать. Из рис.1,б видно, что при указанных выше параметрах лазера это происходит, когда $\eta \leq 0.18$. При этом величина $(\omega_{r1}^r)^2$ меняет знак с положительного на отрицательный. Физически это означает, что АР становится неустойчивым. Действительно, при отрицательных значениях квадрата релаксационной частоты появляются два мнимых корня характеристического уравнения (8) с противоположными знаками. Отрицательный мнимый корень соответствует инкременту нарастания возмущений (5). Это приводит к неустойчивости АР.

Найдём границу области устойчивости АР. Она соответствует равенству нулю релаксационной частоты (15): $\omega_{r1}^r = 0$. Отсюда следует равенство $c = 0$. Решая это уравнение относительно превышения накачки над порогом η и учитывая неравенство (7), определяем границу области устойчивости АР:

$$\eta_b = \frac{3\omega_m}{\omega_c/Q} \left| \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|. \quad (19)$$

При выполнении условия $\eta > \eta_b$ АР устойчив. Более того, как следует из найденных в [11] характеристик АР, это условие совпадает с условием существования АР при

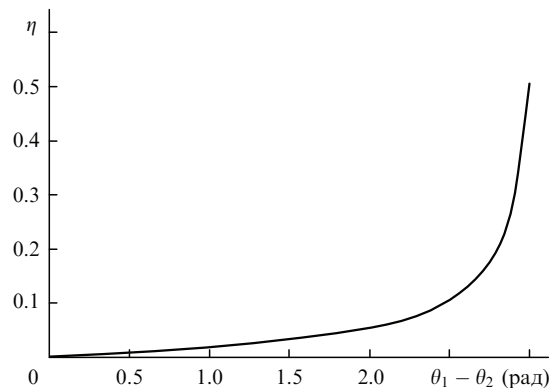


Рис.3. Граница области устойчивости и существования АР в плоскости параметров η , $\theta_1 - \theta_2$ при $\omega_m/(2\pi) = 200$ кГц, $\omega_c/Q = 1.1 \times 10^8$ с⁻¹.

учёте неравенства (7). Таким образом, условие $\eta = \eta_b$ определяет границу существования и устойчивости АР. В случае выполнения противоположного неравенства ($\eta < \eta_b$) существует стационарный режим стоячей волны с равными интенсивностями встречных волн. Неравенство $\eta < \eta_b$ совпадает с условием устойчивости режима стоячей волны, полученным в [12]. На рис.3 показана зависимость границы области устойчивости АР от разности фаз коэффициентов связи.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе проведено теоретическое исследование релаксационных колебаний в спектре интенсивности кольцевого лазера, работающего в АР. Полученные формулы для релаксационных частот обобщают известные ранее выражения на случай произвольных фаз коэффициентов связи. Проанализировано влияние разности фаз коэффициентов связи на релаксационные частоты. Исследована устойчивость АР. Рассмотрено влияние разности фаз коэффициентов связи на устойчивость АР. Найденные соотношения справедливы, если частота автомодуляции значительно больше основной релаксационной частоты. Погрешность результатов не превышает нескольких процентов, когда частота авто-

модуляции более чем в три раза превышает основную релаксационную частоту.

Автор выражает признательность Е.Г.Ларионцеву за обсуждение полученных результатов и В.Г.Дмитриеву за конструктивные критические замечания.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-02-00204).

1. McCumber D.V. *Phys. Rev.*, **141**, 306 (1966).
2. Хандохин П.А., Ханин Я.И. *Письма в ЖЭТФ*, **5**, 35 (1979).
3. Хандохин П.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **22**, 813 (1979).
4. Khandohin P.A., Khanin Ya.I. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**, 226 (1985).
5. Хандохин П.А., Ханин Я.И. *Квантовая электроника*, **15**, 1993 (1988).
6. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **36**, 192 (2006).
7. Zolotoverkh I.I., Kravtsov N.V., Lariontsev E.G., Makarov A.A., Firsov V.V. *Opt. Commun.*, **113**, 249 (1994).
8. Мамаев Ю.А., Миловский Н.Д., Туркин А.А., Хандохин П.А., Широков Е.Ю. *Квантовая электроника*, **27**, 228 (1999).
9. Золотоверх И.И., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Фирсов В.В., Чекина С.Н. *Квантовая электроника*, **37**, 953 (2007).
10. Наний О.Е., Палеев М.Г. *Квантовая электроника*, **20**, 699 (1993).
11. Золотоверх И.И., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **20**, 67 (1993).
12. Клочан Е.Л., Корниенко Л.С., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Шелаев А.Н. *ЖЭТФ*, **65**, 1344 (1973).