

Использование интерферометров Юнга – Майкельсона и Брауна – Твисса для определения геометрических параметров неплоских шероховатых объектов

В.И.Мандросов

Обосновывается возможность использования интерферометров Юнга – Майкельсона и Брауна – Твисса для определения угловых размеров и параметров формы поверхности удаленных пассивно рассеивающих и самосветящихся неплоских шероховатых объектов по распространяющемуся от них оптическому излучению. Анализ основан на свойствах приближенных поперечных функций когерентности поля V_i и V'_i и интенсивности V_{ii} , V'_{ii} , формируемых путем временного усреднения произведений полей и интенсивностей, взятых в двух точках приемной апертуры (штрихом обозначены самосветящиеся объекты). Время усреднения выбирается много большим времени когерентности излучения, идущего от объекта. Показано, что при длине когерентности излучения, существенно меньшей глубины видимой области объекта, функции V_i и V'_i пропорциональны фурье-образу распределения интенсивности в изображении удаленного объекта, что является обобщением теоремы Ван Циттерта – Цернике на случай неплоского объекта, а функции V_{ii} , V'_{ii} пропорциональны квадратам модуля фурье-образа этого распределения. Показано также, что путем регистрации функций V_i и V'_i на интерферометре Юнга – Майкельсона определяются только угловые размеры видимой области объектов, в то время как регистрация функций V_{ii} , V'_{ii} на интерферометре Брауна – Твисса позволяет находить и эти размеры, и радиус кривизны поверхности объектов.

Ключевые слова: когерентность, интерферометры Юнга – Майкельсона и Брауна – Твисса, корреляционные свойства полей, формируемых пассивно рассеивающими и самосветящимися объектами, теорема Ван Циттерта – Цернике для неплоских объектов.

1. Введение

Известно, что использование интерферометров Юнга – Майкельсона и Брауна – Твисса для получения информации об удаленных шероховатых объектах основано на анализе статистических характеристик случайных пятнистых (спекл) структур, которые формируются в результате интерференции пучков света, идущих от различных участков поверхности объекта [1 – 5], причем анализ этой информации проводится, как правило, в предположении, что объекты являются плоскими и самосветящимися. В результате число определяемых параметров самосветящихся объектов ограничено. Например, из геометрических параметров этих объектов определялись лишь угловые размеры, тогда как форма поверхности не исследовалась. Не исследовалась также возможность определения с помощью этих интерферометров параметров пассивно рассеивающих объектов. В связи с этим возникает необходимость анализа статистических характеристик пятнистых структур в случае пассивно рассеивающих и самосветящихся объектов произвольной, в том числе и неплоской, формы. К их числу относятся, например, поперечная функция когерентности (корреляционная функция) $B_f(\rho_1, \rho_2, t) = \langle E(\rho_1, t) \times E^*(\rho_2, t) \rangle_f$ поля $E(\rho, t)$, сформированного пассивно рассеивающим шероховатым неплоским объектом [5, 6], и поперечная функция когерентности $B'_f(\rho_1, \rho_2, t) =$

$\langle E'(\rho_1, t) E'^*(\rho_2, t) \rangle_f$ поля $E'(\rho, t)$, сформированного самосветящимся шероховатым неплоским объектом, который в литературе часто называют протяженным источником [1 – 4]. Здесь ρ_1 и ρ_2 – радиус-векторы, располагающиеся в плоскости приемной апертуры; штрихом обозначена принадлежность физических величин к самосветящемуся объекту, а скобками $\langle \rangle_f$ – операция усреднения по ансамблю полей E и E' .

В работах [1 – 4] проведен анализ поперечной функции когерентности $B'_f(\rho_1, \rho_2, t)$ поля $E'(\rho_2, t)$, сформированного в среднем плоским самосветящимся объектом, представляющим собой протяженный планарный узкополосный источник. Анализ основан на предположении о том, что вблизи поверхности источника излучаемое им поле $V'_s(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} – радиус-вектор точки этой поверхности, дельта-коррелировано. Это означает, что корреляционная функция излучаемого поля $J'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle V'_s(\mathbf{r}_1) V'^*_s(\mathbf{r}_2) \rangle_f = \rho'_\phi I'_s(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где $I'_s(\mathbf{r}_1) = |V'_s(\mathbf{r}_1)|^2$ – распределение интенсивности на этой поверхности; $\rho'_\phi \approx \lambda_0$ – постоянный по всей поверхности объекта радиус корреляции поля V'_s . При данном предположении функция $B'_f(\rho_1, \rho_2, t)$ пропорциональна фурье-образу распределения интенсивности на поверхности объекта $I'_s(\mathbf{r}) = |V'_s(\mathbf{r})|^2$. Это и есть известная из литературы теорема Ван Циттерта – Цернике. Функция $B'_f(\rho_1, \rho_2, t)$ достаточно часто аппроксимируется приближенной поперечной функцией когерентности $B'_f(\rho_1, \rho_2) = \langle E'(\rho_1, t) E'^*(\rho_2, t) \rangle_t$, где $\langle A(t) \rangle_t = T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} A(t) dt$ – временное усреднение функции $A(t)$; T – время обработки (усреднения) принимаемого поля $E'(\rho, t)$, выбираемое из условия $T \gg \tau_c$; τ_c – время когерентности формирующего поле E' излучения; t_0 – начальный момент усреднения [3]. При использовании функции B'_f предполагается, что $B'_f(\rho_1, \rho_2) \approx B'_{fm}(\rho_1, \rho_2)$,

В.И.Мандросов. Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9; e-mail: mandrosov@mail.ru

Поступила в редакцию 21 ноября 2007 г., после доработки – 9 января 2008 г.

где B'_{fm} – функция корреляции поля E' , сформированного на одной частоте ω_0 . Это означает, что $\langle B'_i(\rho_1, \rho_2) \rangle_t = B'_i(\rho_1, \rho_2)$ и что точность этой аппроксимации высока: $\eta^i = \langle |B'_i - B'_i|^2 \rangle_t / |B'_i|^2 \ll 1$. Однако в литературе это условие не обосновывалось. Отметим также, что анализ функции B'_i базируется на ничем не обоснованном предположении, что спектр излучения представляет собой случайный дельта-коррелированный процесс. Наиболее последовательно подобный спектральный подход к анализу функции когерентности B'_i поля E' , сформированного идущим от плоского протяженного теплового источника излучением, представлен в работе [3].

В настоящей работе применен несектральный подход к анализу функции когерентности B_i и B'_i , основанный на использовании введенной в работах [7, 8] временной корреляционной функции $B_u(\tau) = \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_t$, где $u(t)$ – функция модуляции излучения, формирующего поля E и E' , при условии, что функция $u(t)$ меняется медленнее, чем $\exp(i\omega_0 t)$, где ω_0 – центральная (несущая) частота излучения. При этом время усреднения, предлагаемое для формирования функции $B_u(\tau)$, выбиралось исходя из условия $T \gg \tau_c$. При этом предполагается, что $B_u(\tau) \approx B(\tau) = \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_u$, где $\langle \rangle_u$ – операция усреднения по различным реализациям функции $u(t)$. Введенная в работах [7, 8] функция $B_u(\tau)$ использовалась для анализа статистических характеристик интенсивности $I(\rho, t) = |E(\rho, t)|^2$, усредненной за время T , существенно превышающее время когерентности $\tau_c \bar{I}(\rho) = B_i(\rho, \rho) = T^{-1} \times \int_{t_0}^{t_0+T} I(\rho, t) dt$. Далее представлены методы получения информации об удаленных шероховатых неплоских объектах с помощью интерферометров Юнга – Майкельсона и Брауна – Твисса, основанные на использовании функций B_i и B'_i и несектральном подходе к их анализу. Вначале вводятся статистические модели полей $E(\rho, t)$ и $E'(\rho, t)$. Далее показывается, что функции $B_i(\rho_1, \rho_2)$ и $B'_i(\rho_1, \rho_2)$ при длине когерентности излучения L_c , существенно меньшей глубины видимой области объекта L_s , пропорциональны фурье-образу распределения интенсивности в изображении удаленного объекта, что является обобщением теоремы Ван Циттерга – Цернике на случай неплоского объекта. Затем на примере интерферометра Юнга – Майкельсона описана схема, позволяющая регистрировать и измерять функции B_i и B'_i , по которым, в свою очередь, можно определить угловые размеры удаленных объектов.

Во френелевском приближении анализируются не встречавшиеся ранее в литературе приближенные поперечные функции когерентности $B_{ii}(\rho_1, t, \rho_2, t) = \langle I(\rho_1, t) \times I(\rho_2, t) \rangle_t - \bar{I}(\rho_1, t) \bar{I}(\rho_2, t)$ и $B'_{ii}(\rho_1, t, \rho_2, t) = \langle I'(\rho_1, t) I'(\rho_2, t) \rangle_t - \bar{I}'(\rho_1, t) \bar{I}'(\rho_2, t)$, где $I(\rho) = |E(\rho, t)|^2$ и $I'(\rho) = |E'(\rho, t)|^2$. Показано, что при $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$ ($\lambda_0 = 2\pi c \times \omega_0^{-1}$ – центральная длина волны излучения, c – скорость света) эти функции с высокой точностью пропорциональны квадрату модуля фурье-образа распределения интенсивности в изображении удаленного неплоского объекта. Предложен вариант интерферометра Брауна – Твисса, позволяющий регистрировать функции B_{ii} и B'_{ii} , а затем использовать их для определения как угловых размеров удаленного неплоского шероховатого объекта, так и параметров формы его поверхности. Известные варианты этого интерферометра позволяли определять только угловой размер объекта.

В Приложении 1 в предположении, что время усреднения, предлагаемое для формирования функции $B_u(\tau)$,

удовлетворяет условию $T \gg \tau_c$, проведена оценка точности выполнения соотношения $B_u(\tau) \approx B(\tau) = \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_u$. В Приложении 2 представлен расчет точности аппроксимации функции B_i функцией B_{fm} , где B_{fm} – функция корреляции поля E , сформированного на одной частоте ω_0 . Показано, что при глубине видимой области объекта $L_s \gg L_c$ выполняется условие $\eta_i \approx L_s/L_c \ll 1$.

2. Статистические модели полей, сформированных шероховатыми пассивно рассеивающими объектами и самосветящимися неплоскими объектами

Рассмотрим статистические модели полей, сформированных шероховатыми пассивно рассеивающими и самосветящимися неплоскими объектами. Поле, рассеянное объектом при его зондировании источником с диаграммой направленности $D(r_\Sigma)$ (r_Σ – радиус-вектор поверхности исследуемого объекта) и центральной частотой излучения ω_0 , в кирхгофовском приближении имеет следующий вид [5] (рис. 1):

$$E(\rho, t) \approx \frac{i\omega_0}{r_c c} \int \int E_s(r_\Sigma) \exp \left[i\omega_0 \left(t - \frac{|r_\Sigma - \rho_s| + |r_\Sigma - \rho|}{c} \right) \right] \times u \left(t - \frac{|r_\Sigma - \rho_s| + |r_\Sigma - \rho|}{c} \right) dr_\Sigma, \quad (1)$$

где ρ_s – радиус-вектор центра апертуры источника зондирующего излучения; $u(t)$ – некоторая функция модуляции; $E_s(r_\Sigma) = AD(r_\Sigma)k(r_\Sigma)$; A – амплитуда поля зондирующего источника на поверхности объекта; $k(r_\Sigma)$ – распределение френелевских коэффициентов отражения, т. е. распределение отраженного поля вдоль средней поверхности объекта; $r_c = |r_c|$ – расстояние до объекта; r_c – радиус-вектор ближайшей к центру приемной апертуры точки объекта.

Самосветящийся объект будем представлять в виде протяженного источника с неплоской и шероховатой поверхностью, на которой густо расположены точечные источники. Похожая модель протяженного источника была предложена в работе [9]. В соответствии с этой моделью поле $E'(\rho, t)$, сформированное этим объектом, можно представить в следующем виде:

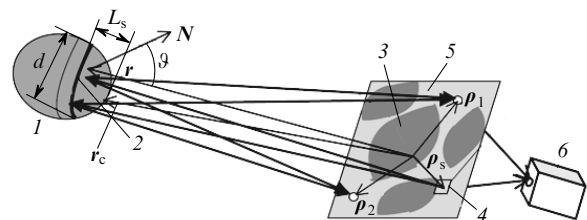


Рис.1. Измерение с помощью интерферометра Юнга – Майкельсона приближенных поперечных функций когерентности $B_i = \langle E_1 E_2^* \rangle_t$ и $B'_i = \langle E'_1 E'^*_2 \rangle_t$, принимаемых полей $E(\rho, t)$ и $E'(\rho, t)$ ($E_i = E(\rho_i, t)$ и $E'_i = E'(\rho_i, t)$, ρ – радиус-вектор в плоскости приемной апертуры; лучи, идущие от источника к объекту, рассеянные объектом и прошедшие через две диафрагмы в приемной апертуре, обозначены жирными стрелками):

1 – шероховатый объект; 2 – граница видимой области объекта; 3 – спекл-картина принимаемого поля; 4 – апертура источника; 5 – приемная апертура; 6 – блок формирования функций B_i и B'_i .

$$E(\boldsymbol{\rho}, t) \approx \frac{i\omega_0}{r_c c} \int \int E_s(\mathbf{r}_\Sigma) \exp \left[i\omega_0 \left(t - \frac{|\mathbf{r}_\Sigma - \boldsymbol{\rho}|}{c} \right) \right] \times u \left(\mathbf{r}_\Sigma, t - \frac{|\mathbf{r}_\Sigma - \boldsymbol{\rho}|}{c} \right) d\mathbf{r}_\Sigma, \quad (1')$$

где $E'_s(\mathbf{r}_\Sigma) = Ak(\mathbf{r}_\Sigma)$ – распределение поля, излучаемого самосветящимся объектом вдоль его средней поверхности; $u(\mathbf{r}_\Sigma, t)$ – локальная функция модуляции излучения на поверхности объекта; $k(\mathbf{r}_\Sigma) \leq 1$ – относительное распределение амплитуд излучения на поверхности объекта.

В дальнейшем функцию модуляции излучения $u(t)$ будем представлять в виде $u(t) = |u(t)| \exp[i\psi(t)]$, где $\psi(t) = \arctan[\text{Im } u(t)/\text{Re } u(t)]$. По смыслу этой функции $|u(t)| \leq 1$. Здесь для упрощения записи ее зависимость от \mathbf{r}_Σ опущена. Обычно на практике за время наблюдения T функция $|u(t)|$ имеет мало экстремумов, а функция $\psi(t)$ – много. Поэтому функцию $|u(t)|$ целесообразно представлять в виде детерминированного процесса, тогда как функцию $\psi(t)$ – в виде недетерминированного (случайного) процесса. В этом случае операцию $\langle \rangle_u$ усреднения по различным реализациям функции $u(t)$ можно заменить операцией $\langle \rangle_\psi$ усреднения по различным реализациям функции $\psi(t)$, в результате чего имеет место следующее соотношение: $B(\tau) = \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_\psi$.

Предполагая, что ψ имеет гауссово распределение $w_i(\psi) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_\psi^{-1} \exp[-\psi^2/(2\sigma_\psi^2)]$ с функцией корреляции $\langle \psi(t)\psi(t+\tau) \rangle_\psi = \sigma_\psi^2(t) \exp[-\tau^2/\tau_\psi^2(t)]$, где σ_ψ и τ_ψ – среднеквадратичное отклонение и время корреляции функции ψ соответственно, при условии $\sigma_\psi \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left\langle B_u \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right) \right\rangle_\psi &= \langle \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_{t\psi} \rangle_\psi \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)u(t+\tau)| \langle \exp\{i[\psi(t) - \psi(t+\tau)]\} \rangle_\psi dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)u(t+\tau)| \exp \left[-\frac{\langle [\psi(t) - \psi(t+\tau)]^2 \rangle_\psi}{2} \right] \\ &= B_{ud} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right) \exp \left\{ -\sigma_\psi^2 \left[-\exp \left(-\frac{\tau^2}{\tau_\psi^2} \right) \right] \right\} \\ &\approx B_{ud}(\tau) \exp \left(-\frac{\tau^2}{\tau_i^2} \right), \end{aligned}$$

где $\tau_i = \tau_\psi/\sigma_\psi$; $B_{ud}(\tau/\tau_d) = \langle |u(t)u(t+\tau)| \rangle_t$; τ_d – полуширина функции $|u(t)|$. Например, в случае зондирующего излучения, формируемого импульсным лазером с гауссовой формой модуля функции модуляции $|u(t)| = \exp(-t^2/\tau_d^2)$ (τ_d – длительность импульса), $B_{ud}(\tau/\tau_d) \approx \exp(-\tau^2/\tau_d^2)$ и $\langle B_u(\tau/\tau_c) \rangle_\psi \approx \exp(-\tau^2/\tau_c^2)$, где $\tau_c = \tau_d \tau_i \times (\tau_d^2 + \tau_i^2)^{-1/2}$ – время когерентности регистрируемого излучения. В частности, для импульсного лазера с модулированной добротностью $\tau_i \gg \tau_d$ и $\tau_c \approx \tau_d$, т.е. время когерентности τ_c совпадает с длительностью импульса. Тогда с большой степенью точности $u(t) \approx |u(t)| = \exp(-t^2/\tau_d^2)$, т.е. $u(t)$ – детерминированная функция. В противоположном случае, когда $\tau_d \gg \tau_i$, $\langle B_u(\tau/\tau_c) \rangle_\psi \approx \exp(-\tau^2/\tau_i^2)$ и $\tau_c \approx \tau_i$, что имеет место, например, для непрерывного лазера. В Приложении 1 с использованием представленных в этом абзаце результатов и при условии, что $T \gg \tau_c$, оценена точность аппроксимации функции $B(\tau)$ функцией B_u :

$$B_u \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right) = \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_t \approx B(\tau) = \langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_\psi \approx \exp \left(-\frac{\tau^2}{\tau_i^2} \right). \quad (2)$$

Здесь следует отметить, что в случае самосветящегося объекта время когерентности τ_c , а следовательно, и длина когерентности $L_c = c\tau_c$, как правило различны для разных участков его поверхности, так что $\tau_c = \tau_c(\mathbf{r}_\Sigma)$ и $L_c = L_c(\mathbf{r}_\Sigma)$.

Перейдем теперь к анализу полей, сформированных шероховатыми пассивно рассеивающими и самосветящимися неплоскими объектами. Для этой цели вначале введем высоту неровностей $\xi(\mathbf{r})$ как величину, равную отклонению реальной поверхности исследуемого объекта от ее средней поверхности по нормали к средней поверхности, проведенной в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, где u, v – поверхностные ортогональные координаты на средней поверхности. Тогда $\mathbf{r}_\Sigma \approx \mathbf{r} + \mathbf{N}(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r})$, где $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ – нормаль к средней поверхности. Если $\xi(\mathbf{r}) \ll r_c$, то

$$E(\boldsymbol{\rho}, t, \xi) \sim \int V_s(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}, t) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$E'(\boldsymbol{\rho}, t, \xi) \sim \int V'_s(\mathbf{r}) F'(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}, t) d\mathbf{r},$$

где

$$F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}, t) = \exp \left(-i\omega_0 \frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_s| + |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}{c} \right) \times u \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_s| + |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| + 2 \cos \vartheta(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r})}{c} \right], \quad (4)$$

$$F'(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}, t) = \exp \left(-i\omega_0 \frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}{c} \right) \times u \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| + \cos \vartheta(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r})}{c} \right]$$

– сферические волны, распространяющиеся от поверхности объекта;

$$V_s(\mathbf{r}) = E_s(\mathbf{r}) \exp[2i\Psi_r(\mathbf{r})], \quad V'_s(\mathbf{r}) = E'_s(\mathbf{r}) \exp[i\Psi_r(\mathbf{r})] \quad (5)$$

– распределение поля на поверхности объекта; $\Psi_r(\mathbf{r}) = 2\pi i\omega_0 \cos \vartheta(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r})/\lambda_0$ – набег фазы излучения при его распространении в пределах неровностей поверхности; $\vartheta(\mathbf{r})$ – угол между нормалью $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ и направлением на объект. В случае шероховатого объекта функция $\xi(\mathbf{r})$ имеет случайное распределение с дисперсией $\sigma^2(\mathbf{r}) = \int \xi^2 w_1(\xi) d\xi$, функцией корреляции $B_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \int \xi_1 \xi_2 w_{12}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ и радиусом корреляции $l(\mathbf{r}) = \{ \int [B_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)/\sigma^2(\mathbf{r}_1)] d\mathbf{r}_1 \}^{-1/2}$, где $w_1(\xi)$ и $w_{12}(\xi_1, \xi_2)$ – одномерная и двумерная плотности вероятностей распределения высот неровностей [5]. Зная функцию $w_{12}(\xi_1, \xi_2)$, при расчете функций когерентности B'_f можно операцию усреднения по ансамблю анализируемых полей $\langle \rangle_f$ заменить операцией усреднения по различным реализациям высот неровностей $\langle \rangle_r$:

$$B_f(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, t) = \langle E(\boldsymbol{\rho}_1, t_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2, t_2) \rangle_r =$$

$$= \iint E(\rho_1, t_1, \xi_1) E^*(\rho_2, t_2, \xi_2) w_{12}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$$\sim \iint \langle V_s(r_1) V_s^*(r_2) F(r_1, \rho_s, \rho_1, t_1) F^*(r_2, \rho_s, \rho_2, t_2) \rangle_r dr_1 dr_2. \quad (6)$$

Аналогичное соотношение получаем для B_f' .

3. Приближенные поперечные функции когерентности полей и интенсивностей, сформированных пассивно рассеивающими и самосветящимися объектами

На практике вместо функций $B_f(\rho_1, \rho_2, t)$ и $B_f'(\rho_1, \rho_2, t)$ достаточно часто используются приближенные поперечные функции когерентности полей E и E' , формируемых удаленными пассивно рассеивающими и самосветящимися объектами, $B_t(\rho_1, \rho_2) = \langle E(\rho_1, t) E^*(\rho_2, t) \rangle_t$ и $B_t'(\rho_1, \rho_2) = \langle E'(\rho_1, t) E'^*(\rho_2, t) \rangle_t$. Вычислим среднее значение $\langle B_t(\rho_1, \rho_2) \rangle_r$ функции B_t . При $L_c \gg \sigma \gg \lambda_0$ и в предположении, что плотность вероятностей w_1 является гауссовой, $w_1(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp(-\xi^2/2\sigma^2)$ [5], с учетом соотношений (2)–(6) получим

$$\langle B_t(\rho_1, \rho_2) \rangle_r \sim \iint \langle V_s(r_1) V_s^*(r_2) \rangle_r$$

$$\times \exp \left[i\omega_0 \frac{\Psi(r_2, \rho_2) - \Psi(r_1, \rho_1)}{c} \right]$$

$$\times B_u \left[\frac{\Psi(r_2, \rho_2) - \Psi(r_1, \rho_1)}{L_c} \right] dr_1 dr_2,$$

где

$$\langle V_s(r_1) V_s^*(r_2) \rangle_r = E_s(r_1) E_s^*(r_2) \langle \Phi(\xi_1 - \xi_2) \rangle_r$$

$$\approx |A|^2 |k(r_1)|^2 \exp \left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{\rho_\phi^2(r_1)} \right]; \quad (7)$$

$\xi_1 = \xi(r_1)$ и $\xi_2 = \xi(r_2)$; $\Phi(\xi_1 - \xi_2) = \exp[4\pi i(\xi_1 - \xi_2) \times \cos \vartheta(r)/\lambda_0]$; $\Psi(r, \rho) = |\mathbf{r} - \rho_s| + |\mathbf{r} - \rho|$; $\rho_\phi(r) \approx \lambda_0 l(r) \times [2 \cos \vartheta(r) \sigma(r)]^{-1}$ – радиус корреляции функции $V_s(r)$. Тогда можно показать, что при $\rho_\phi(r) \ll \Lambda(r)$, где $\Lambda(r) = \{ |k(u, v)/[\partial^2 k(u, v)/\partial^2 u + k(u, v)]/[\partial^2 k(u, v)/\partial^2 v] \}^{-1/2}$,

$$\langle B_t(\rho_1, \rho_2) \rangle_r \sim \int I_{is}(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right]$$

$$\times B_u \left[\frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{L_c r_c} \right] dr. \quad (8)$$

Здесь $I_{is}(r) = |AD(r_c)|^2 k_i(r)$ – функция, представляющая собой распределение интенсивности изображения пассивно рассеивающего объекта в масштабе $\mu \approx r_c/f$; f – фокальное расстояние формирующей это изображение оптической системы; $k_i(r) \approx |\rho_\phi(r) k(r)/\lambda_0|^2 \exp\{-[\tan \vartheta(r) \times l]^2/\sigma^2\}$. Величину $\Lambda(r)$ можно трактовать как размер локальной детали функции $k(r)$ [5].

Аналогично в случае самосветящегося объекта с учетом соотношения

$$\langle V_s'(r_1) V_s'^*(r_2) \rangle_r \approx |A'|^2 |k(r_1)|^2 \exp \left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{\rho_\phi'^2(r_1)} \right], \quad (7')$$

где $\rho_\phi'(r) = 2\rho_\phi(r)$ – радиус корреляции функции $V'(r)$, получим

$$\langle B_t'(\rho_1, \rho_2) \rangle_r \sim \int I_{is}'(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right]$$

$$\times B_u \left[\frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{L_c(r) r_c} \right] dr. \quad (8')$$

Здесь $I_{is}'(r) = |A'|^2 k_i'(r)$ – распределение интенсивности в изображении самосветящегося объекта, взятое в масштабе $\mu \approx r_c/f$; $k_i'(r) \approx |\rho_\phi'(r) k(r)/\lambda_0|^2 \exp\{-[2 \tan \vartheta(r) l]^2 \times \sigma^{-2}\}$; $L_c(r) = c\tau_c(r)$ – локальная длина когерентности излучения с поверхности самосветящегося объекта. Например, в случае лоренцевой формы функции корреляции [3], когда $B_u(\tau, r) = \exp[-|\tau|/\tau_c(r)]$,

$$\langle B_t'(\rho_1, \rho_2) \rangle_r \sim \int I_{is}'(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right]$$

$$\times \exp \left[-\left| \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{L_c(r) r_c} \right| \right] dr.$$

Следует отметить, что соотношение $\rho_\phi'(r) = 2\rho_\phi(r)$ связано с тем, что в случае пассивно рассеивающего объекта излучение двукратно проходит неровности поверхности, а в случае самосветящегося объекта – однократно. Поэтому вдоль поверхности объекта фаза Ψ' функции V_s' меняется в два раза медленнее фазы Ψ функции V_s , а следовательно, радиус корреляции функции V_s' заметно превышает радиус корреляции функции V_s .

При $L_c \gg L_s$ излучение, формирующее поля $E(\rho, t)$ и $E'(\rho, t)$, является монохроматическим [7]. В этом случае $u(t) \approx 1$, и $\langle B_t(\rho_1, \rho_2) \rangle_r = B_{im}(\rho_1, \rho_2)$, $\langle B_t'(\rho_1, \rho_2) \rangle_r = B_{im}'(\rho_1, \rho_2)$, где $B_{im}(\rho_1, \rho_2) \sim \int I_{is}(r) \exp[2\pi i r(\rho_1 - \rho_2)/(\lambda_0 r_c)] dr$ и $B_{im}'(\rho_1, \rho_2) \sim \int I_{is}'(r) \exp[2\pi i r(\rho_1 - \rho_2)/(\lambda_0 r_c)] dr$ – фурье-образы распределения интенсивности в изображении неплоского объекта. Последние два соотношения представляют собой обобщение теоремы Ван Циттерта – Цернике на случай неплоского объекта и распространения от объекта монохроматического излучения. Учитывая соотношения (8) и (8') и тот факт, что на практике $L_c \geq 20\lambda_0$, функции B_t и B_t' регистрируются в области $|\rho_1 - \rho_2| \sim \lambda_0 r_c/d$, где d – размер видимой области объекта, и можно показать, что и при $L_s \gg L_c$ имеем $\langle B_t(\rho_1, \rho_2) \rangle_r = B_f(\rho_1, \rho_2)$ и $\langle B_t'(\rho_1, \rho_2) \rangle_r = B_f'(\rho_1, \rho_2)$. При условии $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$ (см. Приложение 2) $\eta = \langle |B_t(\rho_1, \rho_2) - B_f(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle_r / |B_f(\rho_1, \rho_2)|^2 \ll 1$ и $\eta' = \langle |B_t'(\rho_1, \rho_2) - B_f'(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle_r / |B_f'(\rho_1, \rho_2)|^2 \ll 1$. Отсюда следует, что

$$B_t(\rho_1, \rho_2) \approx B_f(\rho_1, \rho_2) \sim \int I_{is}(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr, \quad (9)$$

$$B_t'(\rho_1, \rho_2) \approx B_f'(\rho_1, \rho_2) \sim \int I_{is}'(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr. \quad (9')$$

Это значит, что при $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$ не только средние значения, но и единичные реализации функций B_t и B_t' пропорциональны фурье-образу распределения интенсивности в изображении неплоского объекта. Этот факт представляет собой обобщение теоремы Ван Циттерта – Цернике на случай неплоского объекта и распространения от объекта квазимонохроматического либо полихроматического излучения, для которых $L_s \gg L_c$ [7]. В

частности при $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$ имеем $B_t(\rho, \rho) = \bar{I}(\rho) \approx B_{\text{im}}(\rho, \rho) \sim \int I_{\text{is}}(r) dr$, $B'_t(\rho, \rho) = \bar{I}'(\rho) \approx B'_{\text{im}}(\rho, \rho) \sim \int I'_{\text{is}}(r) dr$. В противоположном случае, $L_c \gg L_s$, приближенные равенства (9), (9') не выполняются вследствие сильных флуктуаций полей E и E' , а следовательно, и функций $B_t(\rho_1, \rho_2)$ и $\bar{I}(\rho)$.

В случае в среднем плоского (планарного) объекта, когда $\sin \vartheta(r) = 0$, при $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$

$$B_t(\rho_1, \rho_2) \sim \int \rho_\varphi^2(r) I_s(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr, \quad (10)$$

$$B'_t(\rho_1, \rho_2) \sim \int \rho_\varphi'^2(r) I'_s(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr, \quad (10')$$

где $I_s(r) = |E_s(r)|^2 = |V_s(r)|^2$ и $I'_s(r) = |E'_s(r)|^2 = |V'_s(r)|^2$ – распределения интенсивностей полей $V_s(r)$ и $V'_s(r)$ на поверхности объекта. При крутых неровностях, когда $l(r) \approx \sigma(r)$, $B_t(\rho_1, \rho_2) \sim \int I_s(r) \exp[2\pi i r(\rho_1 - \rho_2)/(\lambda_0 r_c)] dr$, $B'_t(\rho_1, \rho_2) \sim \int I'_s(r) \exp[2\pi i r(\rho_1 - \rho_2)/(\lambda_0 r_c)] dr$. Последнее соотношение практически совпадает с соотношением (5.6.8) из работы [1] для функции когерентности поля, сформированного самосветящимся планарным объектом. Таким образом, только при крутых неровностях поверхности планарного объекта функция B'_t пропорциональна фурье-образу распределения интенсивности $I'_s(r)$ на поверхности этого объекта, что и составляет содержание известной теоремы Ван Циттерта – Цернике. И лишь в этом случае, как и в работе [1], радиус корреляции ρ'_φ функции V'_s постоянен по всей поверхности объекта, причем $\rho'_\varphi \approx \lambda_0$.

Модули приближенных поперечных функций когерентности B_t и B'_t могут быть определены с помощью интерферометра Юнга – Майкельсона [1–4] по измерениям вблизи оси приемной апертуры видности $V_s(\rho_1, \rho_2)$ интерференционной картины, сформированной прошедшими через два небольших отверстия в этой апертуре лучами (см. рис.1). Они вычисляются по формулам $B_t(\rho_1, \rho_2) = V_s(\rho_1, \rho_2)[\bar{I}(\rho_1)\bar{I}(\rho_2)]^{1/2}$ и $B'_t(\rho_1, \rho_2) = V'_s(\rho_1, \rho_2) \times [\bar{I}'(\rho_1)\bar{I}'(\rho_2)]^{1/2}$. Используя эти формулы и соотношения (9) и (9'), можно определить угловой размер α видимой области удаленного объекта [1–4], а также, в принципе, распределение интенсивности в изображении $I_{\text{is}}(r)$ и $I'_{\text{is}}(r)$. Можно показать, что относительная точность определения α есть $\eta'_\alpha \approx L_c/L_s$ для самосветящегося объекта и $\eta_\alpha \approx L_c/2L_s$ для пассивно рассеивающего объекта. Достаточно точные измерения углового размера α достигаются при длине когерентности излучения $L_c \leq 0.1L_s$.

Перейдем теперь к описанию свойств приближенных поперечных функций когерентности интенсивности $B_{\text{ii}}(\rho_1, \rho_2, t) = \langle I_1 I_2 \rangle_t - \bar{I}_1 \bar{I}_2$ и $B'_{\text{ii}}(\rho_1, \rho_2, t) = \langle I'_1 I'_2 \rangle_t - \bar{I}'_1 \bar{I}'_2$, где $I_j = |E(\rho_j, t)|^2$, $I'_j = |E'(\rho_j, t)|^2$, $I_j(\rho) = B_t(\rho_j, \rho_j)$, $\bar{I}'_j(\rho) = B'_t(\rho_j, \rho_j)$. Для определения параметров удаленных неплоских объектов эти функции могут быть зарегистрированы с помощью интерферометра Брауна – Твисса в варианте, представленном на рис.2. Хотя на практике этот интерферометр чаще всего используется для получения информации об удаленном самосветящемся объекте, в том числе для звездной интерферометрии, на рис.2 в качестве примера отмечено поле $E(\rho, t)$, сформированное пассивно рассеивающим объектом. При этом предполагалось, что, например, при $T > 10\tau_c$, если, например, функция $u(t)$ случайная, то $B_{\text{ii}}(\tau) \approx B(\tau) = \langle u(t)u^*(t + \tau) \rangle_u$. Учитывая, что в реальных условиях поля $E(\rho, t)$ и $E'(\rho, t)$

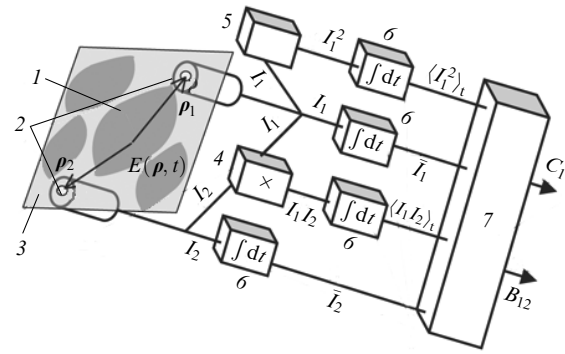


Рис.2. Функциональная схема интерферометра Брауна – Твисса ($I_i = I(\rho_i, t) = |E(\rho_i, t)|^2$, $C_1 = \langle I_i^2 \rangle_t / \bar{I}_i^2 - 2$, $B_{12} = B_{\text{ii}} / (\bar{I}_1 \bar{I}_2) = [\langle I_1 I_2 \rangle_t / (\bar{I}_1 \bar{I}_2)] - 1$ – нормированная приближенная поперечная функция когерентности распределения интенсивности $I(\rho, t)$;

1 – спекл-картина обрабатываемого поля $E(\rho, t)$; 2 – фотоэлектронные умножители; 3 – приемная апертура; 4 – мультипликаторы; 5 – квадратурный блок; 6 – интеграторы; 7 – блок формирования функции B_{12} и параметра C_1 .

имеют случайное гауссово распределение, и используя результаты Приложений 1 и 2, можно показать, что во френелевском приближении при обычно выполняемом на практике условии $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$ с точностью до несущественных множителей имеют место следующие соотношения:

$$B_{\text{ii}}(\rho_1, \rho_2) = \left| \int I_{\text{is}}(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr \right|^2 + F_{12}, \quad (11)$$

$$B'_{\text{ii}}(\rho_1, \rho_2) = \left| \int I'_{\text{is}}(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr \right|^2 + F'_{12}, \quad (11')$$

где

$$F_{12}(\rho_1, \rho_2) = \int \int I_{\text{is}}(r_1) I_{\text{is}}(r_2) \left| B_u \left(\frac{2(r_2 - r_1)}{c} \right) \right|^2 \times \exp \left[2\pi i \frac{(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr;$$

$$F'_{12}(\rho_1, \rho_2) = \int \int I'_{\text{is}}(r_1) I'_{\text{is}}(r_2) \left| B_u \left(\frac{r_2 - r_1}{c} \right) \right|^2 \times \exp \left[2\pi i \frac{(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr.$$

Учитывая далее, что $F_{12}(\rho_1, \rho_2) \leq F_{12}(\rho, \rho) = \iint I_{\text{is}}(r_1) \times I_{\text{is}}(r_2) |B_u(2(r_2 - r_1)/c)|^2 dr$ и $F'_{12}(\rho_1, \rho_2) \leq F'_{12}(\rho, \rho) = \iint I'_{\text{is}}(r_1) I'_{\text{is}}(r_2) |B_u((r_2 - r_1)/c)|^2 dr$ и используя соотношение (П2.4), при условии $L_s \gg L_c$, при котором поля $E(\rho, t)$ и $E'(\rho, t)$ формируются либо в квазимонохроматическом, либо в полихроматическом излучении [7], можно показать, что

$$F_{12}(\rho_1, \rho_2) \leq F_{12}(\rho, \rho) \approx C_s L_c \int I_{\text{is}}^2(r) dr, \quad (12)$$

$$F'_{12}(\rho_1, \rho_2) \leq F'_{12}(\rho, \rho) \approx C'_s L_c \int I'^2_{\text{is}}(r) dr,$$

где $C_s \sim 1$ и $C'_s \sim 1$ – постоянные, причем $F_{12}/B_{\text{ii}} \ll 1$ и $F'_{12}/B'_{\text{ii}} \ll 1$. При этом условия практически выполня-

ются равенства $B_{ii}(\rho_1, \rho_2) = |B_i(\rho_1, \rho_2)|^2$ и $B'_{ii}(\rho_1, \rho_2) = |B'_i(\rho_1, \rho_2)|^2$, т. е. функции B_{ii} и B'_{ii} пропорциональны квадратам модуля фурье-образов распределений интенсивности $I_s(r)$ и $I'_s(r)$ в изображениях неплюских пассивно рассеивающих и самосветящихся объектов соответственно. Это утверждение является обобщением на случай неплюских объектов известного факта [1–4]: функции когерентности интенсивности на приемной апертуре пропорциональны квадрату модуля фурье-образов распределений интенсивности $I_s(r)$ и $I'_s(r)$ на поверхности объекта. Здесь надо особо подчеркнуть, что этот факт на самом деле имеет место только для планарного объекта с крутыми неровностями поверхности, когда $l(r) \approx \sigma(r)$. Лишь в этом случае

$$B_{ii}(\rho_1, \rho_2) \approx \left| \int I_s(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr \right|^2,$$

$$B'_{ii}(\rho_1, \rho_2) \approx \left| \int I'_s(r) \exp \left[2\pi i \frac{r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr \right|^2.$$

При $L_s \gg L_c$ соотношения (11), (11') и (12) можно использовать для определения углового размера α видимой области удаленного объекта, например по полуширине функций B_{ii} и B'_{ii} [1–4]. Эти функции можно использовать и для нахождения радиуса кривизны поверхности объекта ρ_0 . Например, в случае пассивно рассеивающего объекта из соотношений (10)–(12) и (П2.4) следует, что $\rho_0 \approx (C_s \alpha^2 r_c^2) / (C_l L_c)$, где $C_l(\rho) = \langle I^2(\rho) \rangle_l / \bar{I}^2(\rho) - 2$. Можно показать, что достаточно высокая точность оценки α и ρ_0 достигается при зондировании объекта излучением с $L_c \leq 0.1 L_s$.

4. Выводы

1. Неспектральный подход, основанный на использовании временной функции корреляции $B_u(\tau) = \langle u(t) \times u^*(t + \tau) \rangle_t$, позволяет обосновать возможность использования интерферометров Юнга – Майкельсона и Брауна – Твисса для определения угловых размеров и параметров формы поверхности удаленных пассивно рассеивающих и самосветящихся неплюских шероховатых объектов по распространяющемуся от них оптическому излучению. Эта возможность реализуется с помощью приближенных функций когерентности поля $B_t(\rho_1, \rho_2) = \langle E(\rho_1, t) \times E^*(\rho_2, t) \rangle_t$ и $B'_t(\rho_1, \rho_2) = \langle E'(\rho_1, t) E'^*(\rho_2, t) \rangle_t$ и интенсивности $B_{ii}(\rho_1, \rho_2) = \langle I_1 I_2 \rangle_t - \bar{I}_1 \bar{I}_2$, $B'_{ii}(\rho_1, \rho_2) = \langle I'_1 I'_2 \rangle_t - \bar{I}'_1 \bar{I}'_2$, где $\bar{I}_j = T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} I_j(\rho, t) dt$ и $I'_j = T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} I'_j(\rho, t) dt$, $I_j = |E(\rho_j, t)|^2$, $I'_j = |E'(\rho_j, t)|^2$.

2. Если излучение квазимонохроматическое либо полихроматическое, что имеет место при $L_s \gg L_c$, то при дополнительном условии $L_c \geq 20\lambda_0$ функции B_t и B'_t пропорциональны фурье-образу распределения интенсивности в изображении объекта. Этот факт является обобщением на случай неплюских объектов известной теоремы Ван Циттерта – Цернике: функция когерентности принимаемых полей E и E' пропорциональна фурье-образу распределения интенсивности на его поверхности. На самом деле это имеет место лишь в случае полей, формируемых в среднем плоским (планарным) шероховатым объектом при условии, что его поверхность имеет крутые неровности. Регистрируя модули функции B_t и B'_t на интерферометре Майкельсона, можно определить угловые размеры видимых областей удаленных неплюских объектов.

3. При $L_s \gg L_c \geq 20\lambda_0$ имеем $B_{ii}(\rho_1, \rho_2) \approx |B_i(\rho_1, \rho_2)|^2$ и $B'_{ii}(\rho_1, \rho_2) \approx |B'_i(\rho_1, \rho_2)|^2$. Это означает, что функции B_{ii} и B'_{ii} пропорциональны квадратам модуля фурье-образа распределения интенсивности в изображениях объектов. Эти функции могут быть зарегистрированы на предложенном в данной работе варианте интерферометра Брауна – Твисса для определения как угловых размеров видимой области удаленного неплюского объекта, так и параметров формы его поверхности, в том числе радиуса кривизны поверхности.

Приложение 1

Расчет точности аппроксимации корреляционной функции $B(\tau)$ временной корреляционной функцией при условии $\tau_c \ll T$

Точность аппроксимации функции $B(\tau) = \langle u(t) \times u^*(t + \tau) \rangle_\psi$ временной корреляционной функцией $B_u(\tau) = \langle u(t) u^*(t + \tau) \rangle_t$ будем оценивать по параметру $\eta_t = [\langle [B(\tau) - B_u(\tau)]^2 \rangle_\psi]^{1/2} / B(\tau)$ при условии, что фаза $\psi(t) = \arctan[\text{Im} u(t) / \text{Re} u(t)]$ функции модуляции $u(t)$ случайна, что имеет место, например, для непрерывного лазерного зондирующего источника или теплового излучения от самосветящегося объекта. В этом случае $B(\tau) = \langle u(t) \times u^*(t + \tau) \rangle_u = \langle u(t) u^*(t + \tau) \rangle_\psi$, и в предположении, что ψ имеет гауссово распределение с функцией корреляции $\langle \psi(t) \psi(t + \tau) \rangle_\psi = \sigma_\psi^2(t) \exp[-\tau^2 / \tau_\psi^2(t)]$,

$$\langle B_u(\tau)^2 \rangle_\psi = \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp\{\langle -[\psi(t_1) - \psi(t_1 + \tau) + \psi(t_2) - \psi(t_2 + \tau)]^2 / 2 \rangle_\psi |u(t_1)| |u(t_1 + \tau)| |u(t_2)| |u(t_2 + \tau)| dt_1 dt_2\}$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t_1, t_2, \tau) |u(t_1) u(t_1 + \tau)| \times |u(t_2) u(t_2 + \tau)| dt_1 dt_2, \quad (\text{П1.1})$$

где

$$F(t_1, t_2, \tau) = \exp\left\{-\sigma_\psi^2 \left[2 - 2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_\psi^2}\right) + 2 \exp\left[-\frac{(t_2 - t_1)^2}{\tau_\psi^2}\right] - \exp\left[-\frac{(t_2 + \tau - t_1)^2}{\tau_\psi^2}\right] - \exp\left[-\frac{(t_1 + \tau - t_2)^2}{\tau_\psi^2}\right]\right]\right\}$$

– функция, имеющая два максимальных значения, равных единице, одно – на пересечении плоскостей $t_2 + \tau - t_1 = 0$ и $t_1 + \tau - t_2 = 0$, другое – на плоскости $\tau = 0$. Все эти плоскости пересекаются вдоль линии $t_1 = t_2$. Предположим, что $\sigma_\psi \gg 1$. Тогда $F(t_1, t_2, \tau) \approx \exp(-2\tau^2 / \tau_\psi^2)$ в окрестности первого максимума и $F(t_1, t_2, \tau) \approx \exp\{-2[\tau^2 / \tau_\psi^2 + (t_1 - t_2)\tau_i^{-2}]\}$ в окрестности второго максимума, где $\tau_i = \tau_\psi / \sigma_\psi$. Ширина каждого максимума составляет порядка τ_i . А так как $\tau_i \ll T$, то за исключением прямой линии $t_1 = t_2$ эти максимумы и их ближайшие окрестности сильно удалены друг от друга и имеет место следующая аппроксимация: $F(t_1, t_2, \tau) \approx \exp(-2\tau^2 / \tau_\psi^2) + \exp\{-2[\tau^2 / \tau_\psi^2 + (t_1 - t_2)^2 / \tau_i^2]\}$. Подставив это соотношение в (П1.1), получим

$$\begin{aligned} \langle B_u(\tau)^2 \rangle_\psi &\approx \langle B_u(\tau) \rangle_\psi^2 + \exp\left(-2\frac{\tau^2}{\tau_i^2}\right) \\ &\times \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp\left[-\frac{(t_1-t_2)^2}{\tau_i^2}\right] |u(t_1)| |u(t_1+\tau)| \\ &\times |u(t_2)| |u(t_2+\tau)| dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

где $\langle B_u(\tau) \rangle_\psi \approx B_{ud}(\tau) \exp(-\tau^2/\tau_i^2)$. Далее будем предполагать, что функции $|u(t)|$ имеет полуширину $\tau_d \gg \tau_i$. Тогда $\langle B_u(\tau)^2 \rangle_\psi \approx \langle B_u(\tau) \rangle_\psi^2 + (\tau_i/T) \exp(-2\tau^2/\tau_i^2) \langle |u(t)| \times |u(t+\tau)|^2 \rangle_t$. Подставляя это соотношение в формулу $\eta_t = [\langle |B(\tau) - B_u(\tau)|^2 \rangle_\psi] / B(\tau)$ и учитывая, что $\langle |u(t)| |u(t+\tau)|^2 \rangle_t \leq 1$ и что при $\tau_d \gg \tau_i$ справедливо $\tau_c \approx \tau_i$, при $\tau_c \ll T$ окончательно получим $\eta_t \approx (\tau_c/T)^{1/2} \ll 1$, т.е. $B(\tau) \approx B_u(\tau)$ с точностью $\eta_t \approx (\tau_c/T)^{1/2}$.

Приложение 2

Расчет точности η аппроксимации функции B_t функцией B_{fm}

Не умаляя общности, при расчете параметра η ограничимся случаем пассивно рассеивающего объекта, подстилаемого квазимонохроматическим зондирующим излучением. Длина когерентности такого излучения L_c существенно меньше глубины видимой области объекта L_s (см. рис.1) и заметно превышает среднеквадратичное отклонение σ высот неровностей его поверхности [7]. В этом случае $\eta = \langle |B_t(\rho_1, \rho_2) - B_{fm}(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle_r / |B_f(\rho, \rho)|^2$. С учетом гауссова распределения поля $E(\rho, t)$ получим

$$\begin{aligned} \langle |B_t(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle_r &= \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} \langle E(\rho_1, t_1) E^*(\rho_2, t_1) E^*(\rho_1, t_2) \\ &\times E(\rho_2, t_2) \rangle_r dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \left| \int_{t_0}^{t_0+T} B_f(\rho_1, \rho_2, t) dt \right|^2 \\ &+ \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} \langle E(\rho_1, t_1) E^*(\rho_1, t_2) \rangle \\ &\times \langle E^*(\rho_2, t_1) E(\rho_2, t_2) \rangle dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (П2.1)$$

Далее, учитывая соотношения (6), (П2.1) и тот факт, что $\langle u(t)u^*(t+\tau) \rangle_t = B_u(\tau/\tau_c)$, можно показать, что во френелевском приближении

$$\begin{aligned} \langle |B_t(\rho_1, \rho_2) - B_{fm}(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle_r &\sim \frac{1}{T^2} \int k_i(r_1) k_i(r_2) \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} u\left(t_1 - 2r_1 - \frac{r_1 \rho_1}{c r_c}\right) u^*\left(t_2 - \frac{2r_1}{c} - \frac{r_1 \rho_1}{c r_c}\right) \\ &\times u^*\left(t_1 - 2r_2 - \frac{r_2 \rho_2}{c r_c}\right) u\left(t_2 - 2r_2 - \frac{r_2 \rho_2}{c r_c}\right) dt_1 dt_2 dr_1 dr_2 \\ &= \int \int k_i(r_1) k_i(r_2) \left| B_u\left(\frac{2(r_2 - r_1)}{L_c} - \frac{r_1 \rho_1 - r_2 \rho_2}{L_c r_c}\right) \right|^2 dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что зондирующее излучение узкополосное. Это означает, что $L_c > 4\lambda_0 M^{1/2}$, где $M = (dd_\rho)^2 / (\lambda_0 r_c)^2$ – число пятен обрабатываемого поля на приемной апертуре, d – размер видимой области объекта, d_ρ – размер приемной апертуры [7]. Тогда

$$\begin{aligned} \langle |B_t(\rho_1, \rho_2) - B_{fm}(\rho_1, \rho_2)|^2 \rangle_r &\sim \int \int k_i(r_1) k_i(r_2) \\ &\times \left| B_u\left(\frac{2(r_2 - r_1)}{c}\right) \right|^2 dr_1 dr_2. \end{aligned} \quad (П2.2)$$

Этот интеграл был проанализирован в работе [7] в предположении, что исследуемую поверхность можно аппроксимировать параболоидом вращения $r \approx r_c + R^2/2\rho_0$, где R – расстояние от оси поверхности до точки, имеющей радиус-вектор r_c , а ρ_0 – радиус кривизны исследуемой поверхности. При такой аппроксимации поверхности $k_i(\mathbf{r}) \sim (l/\sigma)^2 |k(R)|^2 \exp\{-Rl^2/\sigma^2\}$. Из этой аппроксимации следует, что

$$d \approx \frac{\rho_0 \sigma}{l}, \quad L_s \approx \frac{\rho_0 \sigma^2}{8l^2}. \quad (П2.3)$$

При $L_c \ll L_s$

$$\begin{aligned} \int \int k_i(r_1) k_i(r_2) \left| B_u\left(\frac{2(r_2 - r_1)}{c}\right) \right|^2 dr_1 dr_2 \\ \approx L_c \rho_0 \int k_i^2(\mathbf{r}) dr. \end{aligned} \quad (П2.4)$$

Учитывая соотношения (П2.2)–(П2.4) и тот факт, что $|B_{fm}(\rho, \rho)|^2 \sim (\int k_i(\mathbf{r}) dr)^2$, при условии $L_c \ll L_s$ окончательно будем иметь $\eta \approx L_c/2L_s \ll 1$, а следовательно, $B_t(\rho_1, \rho_2) \approx B_{fm}(\rho, \rho)$. В противоположном случае, когда $L_s \ll L_c$, имеем $|B_u([2(r_2 - r_1)/c])|^2 \approx 1$ и $\eta \approx 1$. Это означает, что функции B_t и B_{fm} существенно различаются. Аналогичные расчеты показывают, что при $L_c \ll L_s$ имеем $B'_t(\rho_1, \rho_2) \approx B'_{fm}(\rho_1, \rho_2)$. Можно показать, что при $L_c < \sigma$, что соответствует случаю распространения от объекта полихроматического излучения, $\eta \sim L_c/L_s \ll 1$. В этом случае можно считать, что практически выполняются равенства $B_t(\rho_1, \rho_2) = B_{fm}(\rho_1, \rho_2)$ и $B'_t(\rho_1, \rho_2) = B'_{fm}(\rho_1, \rho_2)$.

1. Гудмен Д. *Статистическая оптика* (М.: Мир, 1988).
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981).
3. Лоудон Р. *Квантовая теория света* (М.: Мир, 1976).
4. Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000).
5. Бакут П.А., Мандросов В.И., Матвеев И.Н., Устинов Н.Д. *Теория когерентных изображений* (М.: Радио и связь, 1987).
6. Mandrosov V. *Coherent Fields and Images in Remote Sensing* (Bellingham, W: SPIE Press, 2004, Vol. PM130).
7. Бакут П.А., Мандросов В.И. *Квантовая электроника*, **36**, 239 (2006).
8. Бакут П.А., Мандросов В.И. *Квантовая электроника*, **37**, 81 (2007).
9. Рыгов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику* (М.: Наука, 1978, ч.II).