

Распределение температуры и термоупругих напряжений в активном элементе в виде тонкого диска с произвольной оптической плотностью

В.А.Смирнов, И.А.Щербаков

Получены стационарные распределения температуры и термоупругих напряжений (термонапряжений) в активном элементе в форме диска с произвольной оптической плотностью при использовании двухпроходной схемы накачки. Показано, что распределение температуры определяется суммой трех слагаемых: двух экспоненциальных и линейного, причем при изменении граничных условий экспоненциальные члены сохраняются, а меняется только линейный член, не вызывающий термонапряжений. Установлено, что с увеличением коэффициента поглощения термонапряжения уменьшаются как при постоянной толщине диска, так и при постоянной оптической плотности. Рассчитаны оценочные значения температуры при локальном нагреве тонкого диска, когда диаметр накачиваемой области соизмерим с толщиной диска.

Ключевые слова: активные элементы в виде тонкого диска, термоупругие напряжения.

Дисковые твердотельные лазеры разрабатываются достаточно давно [1]. Для более полного поглощения накачки в них обычно применяется многопроходная схема, существенно усложняющая схему лазера. В работе [2] на основе анализа распределений температуры и термоупругих напряжений (термонапряжений), а также экспериментальных результатов было предложено для изготовления дисковых активных элементов использовать оптически плотные среды, в которых практически полное поглощение накачки происходит за один-два прохода.

В настоящей работе выполнены расчеты стационарных распределений температуры и термоупругих напряжений в дисковых активных элементах с произвольной оптической плотностью.

Рассмотрим тонкий диск, накачиваемый с одной стороны ($x = 0$) и охлаждаемый с обеих сторон (при $x = 0$ и $x = d$, где d – толщина диска). Обозначим через t_1 и t_2 температуры сред, которые охлаждаются поверхности диска с координатами $x = 0$ и $x = d$ соответственно. Будем рассматривать двухпроходную схему накачки, когда возбуждающее излучение, пройдя через кристалл, попадает на зеркало и, отражаясь от него с коэффициентом отражения R , проходит через кристалл в обратном направлении.

Стационарное уравнение теплопроводности для данного случая имеет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = -\frac{\eta_t P_p k}{\lambda S} (e^{-kx} + R e^{kx-2kd}), \quad (1)$$

где t – температура; P_p – мощность накачки, прошедшая через переднюю грань диска после частичного отражения от нее; k и λ – коэффициенты поглощения и теплопро-

водности соответственно; S – площадь диска; η_t – доля поглощенной мощности накачки, перешедшая в тепло.

Граничные условия (третьего рода) можно записать в следующем виде:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} = a[t(0) - t_1], \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=d} = -b[t(d) - t_2], \quad (3)$$

где a и b – коэффициенты теплообмена с охлаждающими средами, имеющими температуры t_1 и t_2 ; $t(0)$ и $t(d)$ – температуры поверхностей диска с координатами $x = 0$ и $x = d$. В дальнейшем при конкретных расчетах для определенности будем считать, что со стороны поверхности диска, обращенной к излучению накачки ($x = 0$), охлаждение осуществляется воздухом или водой (рассмотрим оба случая), а с противоположной стороны ($x = d$) – водой.

Выделяющаяся в кристалле тепловая мощность

$$P_t = \eta_t P_p (1 - e^{-kd})(1 + R e^{-kd}). \quad (4)$$

В стационарном режиме тепло, выделяющееся в диске, равно теплу, отводящемуся за то же время в охлаждающие среды:

$$\eta_t P_p (1 - e^{-kd})(1 + R e^{-kd}) = S\{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]\}. \quad (5)$$

Количество тепла, выходящего за 1 с через грань $x = 0$,

$$Q_1 = P_t \frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} = \lambda S \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (6)$$

а через грань $x = d$ –

$$Q_2 = P_t \frac{b[t(d) - t_2]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} = -\lambda S \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=d}. \quad (7)$$

В.А.Смирнов, И.А.Щербаков. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: lisdenis@lsk.gpi.ru

Поступила в редакцию 25 декабря 2007 г., после доработки – 16 июня 2008 г.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$t(x) = \frac{\eta_t P_p}{\lambda S} \left\{ \frac{1}{k} (e^{-kd} - e^{-kx}) + (d-x) \left[1 - Re^{-2kd} - \frac{a[t(0) - t_1](1 - e^{-kd})}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} (1 + Re^{-kd}) \right] + \frac{Re^{-kd}}{k} [1 - e^{k(x-d)}] \right\} + t(d). \quad (8)$$

Решение (8) состоит из трех слагаемых: двух экспоненциальных,

$$-\frac{\eta_t P_p}{k \lambda S} [e^{-kx} + (Re^{-2kd})e^{kx}], \quad (9)$$

и линейного. Поскольку граничные условия влияют только на линейное слагаемое, которое, как известно [3, 4], не вызывает термоупругих напряжений, можно сделать вывод о том, что в стационарном случае граничные условия (естественно, разумные, не приводящие, например, к плавлению кристалла) не влияют на термонапряжения, возникающие в свободном тонком диске.

Покажем, что при малых оптических плотностях $D = kd$ решение (8) переходит в известное параболическое решение, характерное для равномерного распределения источников тепловыделения. Уравнение теплопроводности для этого случая имеет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \simeq -\frac{\eta_t P_p k(1+R)}{\lambda S}, \quad (10)$$

а граничные условия таковы:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} = a[t(0) - t_1], \quad (11)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=d} = b[t(d) - t_2]. \quad (12)$$

Решение уравнения (10) имеет вид

$$t(x) = \frac{\eta_t P_p k(1+R)}{\lambda S} \left\{ \frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} + (x-d) \frac{a[t(0) - t_1]d}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} \right\} + t(d). \quad (13)$$

Покажем, что при $D \ll 1$, полученное выше решение (8) переходит в (13). Для этого перегруппируем слагаемые в фигурных скобках в (8):

$$\frac{1}{k} (e^{-kd} - e^{-kx}) + (d-x) + Re^{-2kd}(x-d) + \frac{Re^{-kd}}{k} \times [1 - e^{k(x-d)}] + \frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} \times (1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd})(x-d). \quad (8')$$

Выражение (8') состоит из пяти слагаемых. Сумма первых двух слагаемых при малых D равна

$$\frac{1}{k} (e^{-kd} - e^{-kx}) + (d-x) \approx \frac{1}{k} \left(1 - kd + \frac{k^2 d^2}{2} - 1 + \right.$$

$$\left. + kx - \frac{k^2 x^2}{2} \right) + (d-x) = k \left(\frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right), \quad (14)$$

а сумма вторых двух членов –

$$R \left\{ e^{-2kd}(x-d) + \frac{e^{-kd}}{k} [1 - e^{k(x-d)}] \right\} \approx R \left\{ (1 - 2kd)(x-d) + \frac{1 - kd}{k} [kd - kx - \frac{k^2(x-d)^2}{2}] \right\} = kR \left(\frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right). \quad (15)$$

Таким образом, сумма первых четырех слагаемых в (8') равна

$$k \left(\frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) (1 + R). \quad (16)$$

Последний член в формуле (8')

$$\frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} (1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd})(x-d) \approx \frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} kd(1 + R)(x-d), \quad (17)$$

и формула (8) при $D \ll 1$ преобразуется в выражение

$$t(x) = \frac{\eta_t P_p}{\lambda S} \left\{ k(R+1) \left(\frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} d(x-d)k(1+R) \right\} + t(d) = \frac{\eta_t P_p k(1+R)}{\lambda S} \left\{ \frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{a[t(0) - t_1]d(x-d)}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} \right\} + t(d), \quad (18)$$

что в точности совпадает с полученным выше решением (13) для равномерного распределения источников тепловыделения.

Покажем, как следует использовать решение (8). Пусть заданы температуры охлаждающих сред t_1 и t_2 , а также мощность накачки P_p . Для расчета $t(x)$ необходимо определить температуры поверхностей диска $t(0)$ и $t(d)$, входящие в (8). Имеем два уравнения:

$$t(0) = \frac{\eta_t P_p}{\lambda S} \left\{ \frac{1}{k} (e^{-kd} - 1) + d \left[1 - Re^{-2kd} - \frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} (1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd}) \right] + \frac{Re^{-kd}}{k} (1 - e^{-kd}) \right\} + t(d) \quad (19)$$

и уравнение (5). Решая (5) и (19) относительно $t(0)$ и $t(d)$, получаем

$$t(0) = \frac{1}{1 + a/b + ad/\lambda} \left\{ \frac{\eta_t P_p}{\lambda S} \left[\frac{e^{-kd}}{k} - \frac{1}{k} + d - dRe^{-2kd} + \right. \right.$$

$$+ \frac{adSt_1}{\eta_t P_p} + \frac{Re^{-kd}}{k} (1 - e^{-kd}) \left] + \frac{\eta_t P_p (1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd})}{bS} + \frac{at_1}{b} + t_2 \right\}, \quad (20)$$

$$t(d) = \frac{\eta_t P_p (1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd}) - aS[t(0) - t_1]}{bS} + t_2. \quad (21)$$

Подставляя найденные значения $t(0)$ и $t(d)$ в (8), находим распределение температуры по толщине диска $t(x)$.

Приведем также другую форму записи решения уравнения (1) с граничными условиями (2) и (3):

$$t(x) = -\frac{\eta_t P_p}{\lambda S k} (e^{-kx} + Re^{kx-2kd}) + C_1 x + C_2,$$

где

$$C_1 = ab \left\{ t_2 - t_1 + \frac{\eta_t P_p}{S} \left[\frac{e^{-kd}(R-1)}{b} + \frac{e^{-kd}(R+1)}{\lambda k} - \frac{1}{a} + \frac{Re^{-2kd}}{a} - \frac{1}{\lambda k} - \frac{Re^{-2kd}}{\lambda k} \right] \right\} (abd + a\lambda + b\lambda)^{-1}.$$

$$C_2 = \frac{\eta_t P_p}{S} \left(\frac{1}{a} - \frac{Re^{-2kd}}{a} + \frac{1}{\lambda k} + \frac{Re^{-2kd}}{\lambda k} \right) + t_1 + \frac{\lambda}{a} C_1.$$

Координату x_{\max} , при которой температура имеет максимум, легко определить, приравняв нулю производную dt/dx :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\eta_t P_p}{\lambda S} \left\{ e^{-kx} - \left[1 - Re^{-2kd} - \frac{a[t(0) - t_1]}{a[t(0) - t_1] + b[t(d) - t_2]} \times (1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd}) \right] - Re^{-2kd} e^{kx} \right\} = 0. \quad (22)$$

Обозначив выражение в квадратных скобках через C , получим

$$Re^{-2kd} e^{2kx_{\max}} + Ce^{kx_{\max}} - 1 = 0, \quad (23)$$

откуда

$$e^{kx_{\max}} = \frac{-C + (C^2 + 4Re^{-2kd})^{1/2}}{2Re^{-2kd}}, \quad (24)$$

$$x_{\max} = \frac{1}{k} \ln \left[\frac{(C^2 + 4Re^{-2kd})^{1/2} - C}{2Re^{-2kd}} \right]. \quad (25)$$

Для расчета термоупругих напряжений σ использовалось выражение [3]

$$\sigma = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left[-t(x) + \frac{1}{d} \int_0^d t(x) dx + \frac{3(x - d/2)}{2(d/2)^3} \int_0^d t(x)(x - d/2) dx \right]. \quad (26)$$

Здесь α – коэффициент теплового расширения; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона (среда считается изотропной). Подставляя в (26) распределение $t(x)$ (8), находим

$$\sigma(x) = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{\eta_t P_p}{k \lambda S} \left[e^{-kx} + Re^{-2kd+kx} + \frac{e^{-kd}}{kd} - \frac{1}{kd} + \frac{Re^{-2kd}}{kd} - \frac{Re^{-kd}}{kd} + \frac{12(x - d/2)}{d^3 k} \left(\frac{de^{-kd}}{2} - \frac{1}{k} + \frac{e^{-kd}}{k} + \frac{d}{2} - \frac{Rde^{-kd}}{2} + \frac{Re^{-kd}}{k} - \frac{Re^{-2kd}}{k} - \frac{Rde^{-2kd}}{2} \right) \right]. \quad (27)$$

Ниже приведены результаты расчетов температуры и напряжений по полученным выше формулам. Расчеты проводились при одинаковой для всех коэффициентов поглощения удельной тепловой мощности P'_t , рассчитанной на единицу площади поверхности диска: $P'_t = P_t/S = 50 \text{ Вт/см}^2$. При этом отношение $\eta_t P_p/S$ заменялось на

$$\frac{P'_t}{(1 - e^{-kd})(1 + Re^{-kd})}. \quad (28)$$

В расчетах использовались коэффициент теплопроводности $\lambda = 0.1 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$, коэффициент отражения $R = 1$, $\nu = 0.25$, температуры охлаждающих сред $t_1 = t_2 = 20^\circ\text{C}$, коэффициенты теплообмена $b = 0.75 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ (охлаждение водой) и $a = 0.015$ (охлаждение воздухом) или $0.75 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ (охлаждение водой). Параметры $\alpha = 7 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ и $E = 2 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2$ брались, для примера, соответствующими кристаллу ИАГ. Отметим, что выбранное значение удельной тепловой мощности соответствовало гипотетическому лазеру с выходной мощностью $\sim 100 \text{ кВт}$ при площади диска 1000 см^2 [2].

На рис.1 приведено распределение температуры $t(x)$ вдоль оси диска толщиной $d = 0.1 \text{ см}$ при охлаждении его с одной стороны воздухом, а с другой – водой ($a = 0.015$

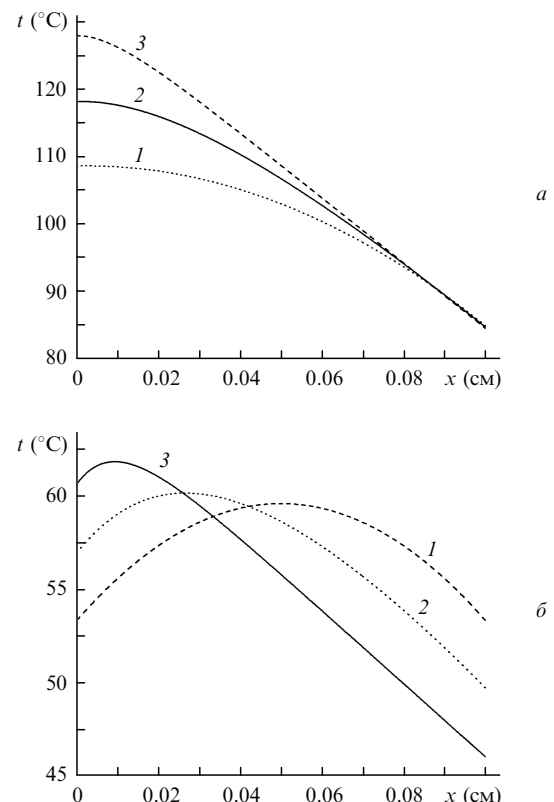


Рис.1. Распределение температуры вдоль оси диска при $a = 0.015 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$, $b = 0.75 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ (а) и $a = b = 0.75 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ (б), $k = 1$ (1), 30 (2) и 100 (3).

Вт·см⁻²·К⁻¹, $b = 0.75$ Вт·см⁻²·К⁻¹) и с двух сторон водой ($a = b = 0.75$ Вт·см⁻²·К⁻¹) для коэффициентов поглощения $k = 1, 30$ и 100 см⁻¹. Видно, что температура на поверхности диска, обращенной к излучению накачки ($x = 0$), больше, чем на противоположной поверхности ($x = d$). Максимальная температура достигается при значении $x = x_{\max}$ (см. формулу (25)), которое тем ближе к нулю, чем меньше отношение a/b . При малых значениях оптической плотности (например, $D = 0.1$ при $k = 1$ см⁻¹) получается известное параболическое распределение, при этом для $a = b$ положение вершины параболы (где температура максимальна) практически совпадает с центром диска ($x_{\max} \approx d/2$). С ростом k температура $t(0)$ растет, а $t(d)$ падает, и распределение $t(x)$ приближается к квазилинейному. При этом термонапряжения в образце должны уменьшаться, т. к. линейная зависимость $t(x)$ напряжений не вызывает [3, 4]. Это и подтверждается расчетами термонапряжений $\sigma(x)$.

Отметим еще раз, что величина $\sigma(x)$ в нашем конкретном случае не зависит от температуры охлаждающих сред и коэффициентов теплообмена, а определяется только рассеиваемой в кристалле тепловой мощностью P_t , площадью S и толщиной d диска, а также коэффициентами поглощения (k), теплопроводности (λ) и отражения возбуждающего излучения от заднего зеркала (R), непосредственно входящими в формулу (27).

На рис.2 приведены зависимости $\sigma(x)$, рассчитанные для $d = 0.1$ см, $k = 1, 30$ и 100 см⁻¹. Результаты расчетов справедливы для обоих вариантов охлаждения (воздух – вода, вода – вода). При малых оптических плотностях ($D = 0.1$) получается параболическое распределение. Заметим, что в данном случае поглощение накачки в активном элементе происходит за достаточно большое число проходов. Максимальное значение σ_{\max} достигается при $x = 0$ (т. е. на поверхности диска, обращенной к излучению накачки). С ростом k напряжение σ_{\max} сначала немного (примерно на 10 %) растет, а затем уменьшается и при $k > 60$ см⁻¹ ($D > 6$) становится меньше, чем при малых оптических плотностях, что является следствием отмеченной выше квазилинейной зависимости температуры от расстояния. При заданной величине D с ростом k напряжение σ_{\max} уменьшается. При заданном k напряжение σ_{\max} растет с ростом толщины образца.

Приведенные результаты подтверждают сделанный в [2] вывод о том, что тонкие диски на основе оптически плотных активных сред, в которых поглощение излучения накачки осуществляется за один-два прохода, имеют

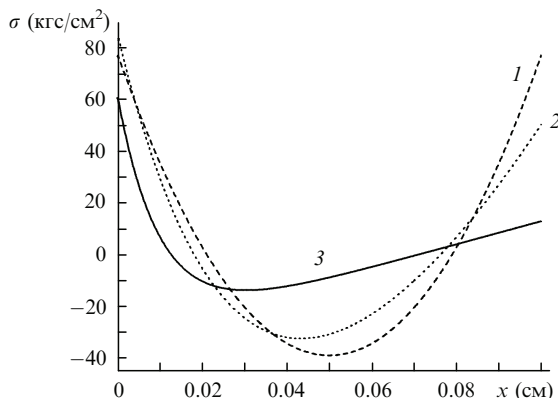


Рис.2. Распределение термонапряжений вдоль оси диска при $k = 1$ (1), 30 (2) и 100 (3).

меньшие термонапряжения, чем диски с малой оптической плотностью, требующие многопроходной накачки.

Отметим, что в проведенных расчетах не учитывался рост коэффициента теплопроводности λ с температурой [5, 6]. Расчеты показали, что, например, при $k = 100$ см⁻¹ уменьшение λ на 30 % приводит к увеличению температуры «внешней» грани диска (на которую падает излучение накачки) примерно на 18 К. Максимальное термонапряжение, появляющееся на той же грани и изменяющееся, как видно из формулы (27), обратно пропорционально λ , увеличивается при этом на 40 %.

Важно отметить, что формула для распределения температуры (8) получена для тонких дисков, охлаждение которых происходит через плоские торцы, а тепловой поток через боковую поверхность невелик. Однако в реальном лазерном эксперименте условия охлаждения могут быть другими. Так, в [2] на диск с радиусом $R_0 = 0.2$ см и толщиной $d = 0.035$ см падало излучение накачки, сфокусированное в пятно радиусом $R_1 = 0.01$ см, при этом отношение площади боковой поверхности накачиваемой области к площади ее торцов составляло ~ 3.5 , и тепло могло эффективно «растекаться» по всему кристаллу. Это, во-первых, само по себе уменьшало температуру, а во-вторых, увеличивало площадь, с которой тепло «уходило» в охладитель – проточную воду, что значительно увеличивало теплосъем и также уменьшало температуру кристалла. Если же пренебречь этими процессами и считать, что съем тепла осуществляется только с торцов накачиваемой области, то оценка температуры в условиях описанного в [2] эксперимента, в котором величина P_t (выделяющаяся в кристалле тепловая мощность) составляла ~ 0.5 Вт, дает ~ 1500 °С! Однако достаточно увеличить площадь, с которой снимается тепло всего лишь до ~ 1 мм², как температура уменьшается на порядок. Такое увеличение площади в реальном эксперименте и происходит за счет «растекания» тепла по кристаллу.

Поскольку аналитическое решение задачи о «растекании» тепла по кристаллу в условиях эксперимента, описанного в [2], проблематично, для оценки температуры рассмотрим более простую модель. А именно, поскольку толщина диска мала, будем считать, что выделяющееся тепло распределено равномерно по накачиваемому объему, а перепад температур между торцами диска невелик, т. е. будем считать температуру функцией только расстояния r от центра пятна накачки вдоль поверхности диска. «Внешний» торец диска охлаждается проточной водой с температурой $t_2 = 20$ °С. Тогда уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах примет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = - \frac{P_t}{\lambda S_1 d}, \quad (29)$$

где

$$S_1 = \pi R_1^2.$$

Решение (29) имеет вид

$$t = \frac{P_t}{4\lambda S_1 d} \left[-r^2 + R_1^2 \left(1 + 2 \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \right] + t(R_0)$$

$$(0 \leq r \leq R_1),$$

$$(30)$$

$$t = \frac{P_t R_1^2}{2\lambda S d} \ln \frac{R_0}{r} + t(R_0) \quad (R_1 \leq r \leq R_0), \quad (31)$$

где $t(R_0)$ – температура на краю диска (при $r = R_0$).

В качестве граничного условия первого рода зададим температуру $t(R_0)$. Очевидно, что $t(R_0)$ не может быть меньше температуры охлаждающей жидкости $t_2 = 20^\circ\text{C}$. С другой стороны, если считать, что тепловая мощность P_t распределяется равномерно по всему диску, то температура торца $t(d)$, охлаждаемого водой, будет определяться из соотношения

$$P_t = b[t(d) - t_2]\pi R_0^2, \quad (32)$$

откуда $t(d) = 25^\circ\text{C}$. Но поскольку температура краев диска в случае, когда тепло распределено по всему его объему, будет больше, чем в случае, когда тепло выделяется в малой накачиваемой области, то 25°C – это верхняя граница температуры $t(R_0)$. Таким образом, считая, что $20^\circ\text{C} \leq t(R_0) \leq 25^\circ\text{C}$, получаем температуру в центре диска $100^\circ\text{C} \leq t(r=0) \leq 105^\circ\text{C}$.

Рассчитаем теплосъем P_t'' с охлаждаемого торца диска согласно граничному условию третьего рода:

$$P_t'' = b \int_0^{R_0} 2\pi r [t(r) - t_2] dr. \quad (33)$$

Подставив $t(r)$, определенное из (30), (31), получим $P_t'' \simeq 1.35$ Вт, в то время как «всасываемая» тепловая мощность равна 0.5 Вт.

Это расхождение связано, очевидно, с тем, что выражения (30), (31) получены без учета интегрального теплосъема через торец в воду, но с учетом охлаждения посредством введения температуры $t(R_0)$ на краю диска. Между тем, поскольку теплосъем пропорционален разности температур охлаждаемой поверхности и воды и происходит со всего охлаждаемого торца диска, т.е. с площади πR_0^2 , реальная температура меньше расчетной. Это обстоятельство в первом приближении можно учесть,

введя в выражения (30), (31) поправочный коэффициент $\beta < 1$ следующим образом:

$$t'(r) = \beta[t(r) - t_2] + t_2. \quad (34)$$

где $t(r)$ – температура, рассчитанная по формулам (30), (31), а $t'(r)$ – скорректированные значения температуры. Согласно (34) уменьшение температуры тем больше, чем больше разность $t(r) - t_2$, т.е. чем больше «сток» тепла в воду, при этом характер зависимости $t'(r)$ остается таким же, как и $t(r)$. Очевидно, что $\beta = P_t/P_t'' \approx 0.37$, а температура в центре диска

$$t'(r=0) = \beta[t(r=0) - t_2] + t_2 \approx 50^\circ\text{C}. \quad (35)$$

Меньшее, чем при граничных условиях первого рода, значение температуры связано с более полным, чем при задании температуры на краю диска, учетом охлаждения согласно граничному условию третьего рода, по которому теплосъем осуществляется со всего охлаждаемого торца диска, что и имеет место в эксперименте [2].

Таким образом, рассмотренная модель, учитывающая «растекание» тепла по лазерному кристаллу, дает реалистичную оценку его температуры.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.А.Самохину за плодотворное обсуждение результатов и Д.А.Лису за большую помощь в оформлении работы и проведении компьютерных расчетов.

1. Giesen A., Hugel H., Voss A., et al. *Appl. Phys. B*, **58**, 365 (1994).
2. Гарнов С.В., Михайлов В.А., Серов Р.В., Смирнов В.А., Цветков В.Б., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **37** (10), 910 (2007).
3. Инденбом В.Л., Сильвестрова И.М., Сиротин Ю.И. *Кристаллография*, **1**, 599 (1956).
4. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел* (М: Наука, 1964).
5. Stewen C., Contag K., Larionov M., et al. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **6** (4), 650 (2000).
6. Загуменный А.И., Попов П.А., Зерроук Ф., Заварцев Ю.Д., Кutowой С.А., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **38** (3), 227 (2008).