

# Динамика накачки и усиления гамма-излучения в ядерной среде со скрытой инверсией населенности

Л.А.Ривлин

*Дан анализ особенностей динамики накачки изомерных ядер рентгеновским излучением импульсно-периодического пучка релятивистских электронов с образованием среды с резонансным отрицательным поглощением гамма-фотонов. В протяженной ядерной среде накачка возбуждает бегущую волну скрытой инверсии населенностей с анизотропным гамма-усилением, которое оказывается положительным при превышении критического значения параметра накачки, равному произведению пиковой спектральной плотности мощности рентгеновского источника и относительной длительности ультракороткого сгустка релятивистских электронов. В альтернативной схеме с ортогональными направлениями рентгеновского излучения накачки и потока усиливаемых гамма-фотонов отсутствие анизотропии усиления открывает возможность построения стандартного двухзеркального резонатора с брэгговскими монокристаллическими отражателями. На примере некоторых нуклидов представлено сопоставление критического пикового значения спектральной плотности мощности накачки с известными характеристиками существующих источников рентгеновского излучения релятивистских электронов.*

**Ключевые слова:** квантовая нуклеоника, стимулированное испускание гамма-фотонов изомерными ядрами, анизотропия усиления, скрытая инверсия населенностей.

## 1. Введение

Наблюдение стимулированного испускания гамма-излучения ядрами и построение ядерного гамма-лазера (ЯГЛ) – одна из актуальных задач современной физики [1] – находится уже почти полвека в поле зрения исследователей без видимого экспериментального успеха [2]. Основным препятствием к ее решению по правилам, хорошо отработанным в практике конструирования оптических лазеров, служит фундаментальный конфликт, являющийся по существу следствием соотношения неопределенности (энергия×время) [2]. Концепция гамма-усиления в ансамбле свободных ядер со скрытой инверсией и с линией испускания, суженной методами лазерного охлаждения, возможно, наиболее близка к экспериментальному воплощению [2]. Задачей настоящей работы является анализ особенностей динамики накопления возбужденных ядер и усиления в этой схеме, обусловленных сложной временной структурой накачивающего рентгеновского излучения релятивистских электронов.

Причиной возникновения скрытой инверсии [3–5] служит то, что энергии поглощаемых и испускаемых гамма-квантов  $\hbar\omega_{a,e} = E \pm E_{\text{гес}}$  отличаются от энергии возбужденного состояния  $E$  на величину энергии отдачи

$$E_{\text{гес}} \approx E^2/2Mc^2 \approx 0.5E^2A^{-1} \quad (1)$$

( $M$  – масса атома,  $c$  – скорость света,  $A$  – массовое число ядра; в численной формуле  $E$  измеряется в кэВ,  $E_{\text{гес}}$  – в мэВ). Это обстоятельство, отмеченное еще Эйнштейном в 1916 г. [6], открывает возможность [7] наблюдения стимулированного испускания без наличия истинной инверсии населенностей, т.е. без превышения числа возбужденных излучателей над невозбужденными. Поэтому в стандартном выражении для коэффициента усиления потока фотонов

$$g = \sigma\beta n_2 - \chi n \quad (2)$$

в среде с концентрациями излучателей  $n_2$  и  $n_1$  на верхнем и нижнем уровнях лазерного перехода отсутствует член с  $n_1$ . Здесь  $\sigma = \lambda^2/2\pi$ ;  $\lambda$  – длина волны;

$$\beta = \frac{\Delta\omega_\gamma}{\Delta\omega_{\text{tot}}} = \left[ (1 + \alpha)(1 + \tau\Delta\omega_{\text{бр}}/2\pi) \right]^{-1} \quad (3)$$

– отношение естественной ширины линии радиационного перехода  $\Delta\omega_\gamma$  к полной ширине  $\Delta\omega_{\text{tot}}$ , в которой учтены все виды избыточного однородного и неоднородного уширения  $\Delta\omega_{\text{бр}}$ ;  $\tau = 2\pi/\Delta\omega_\gamma(1 + \alpha)$  – время жизни возбужденного состояния;  $\alpha$  – коэффициент внутренней электронной конверсии;  $\chi$  – усредненное сечение фотонных потерь всех видов;  $n$  – полная концентрация атомов разных типов.

Главным источником нежелательного снижения  $\beta$  (3) в ядрах свободных атомов служит тепловое доплеровское уширение  $\Delta\omega_{\text{бр}} \approx \Delta\omega_{\text{Д}}$ . Поэтому устремить  $\beta$  к минимальному значению,  $\beta \rightarrow (1 + \alpha)^{-1}$ , можно посредством снижения температуры до

Л.А.Ривлин. Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Лаборатория прикладной физики, Россия, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78; e-mail: lev\_rivlin@mail.ru

Поступила в редакцию 12 января 2009 г., после доработки – 20 мая 2009 г.

$$T \ll (\pi\hbar/\tau E)^2 (Mc^2/2k_B \ln 2) \approx 40A/(\tau E)^2 \quad (4)$$

( $T$  измеряется в мкК,  $\tau$  – в нс). Оценка по (4) (например,  $T \ll 40$  мкК при  $E = 10$  кэВ,  $A = 100$  и  $\tau = 1$  нс) свидетельствует, что для не слишком экзотически низких температур, которых можно достичь существующими методами лазерного охлаждения, время жизни  $\tau$  возбужденного состояния следует ограничить сверху наносекундным диапазоном.

Однако даже при  $\beta \rightarrow 1$  и в условиях скрытой инверсии коэффициент усиления  $g$  остается крайне малым. Так, при  $\lambda = 10^{-8}$  см,  $\beta = 1$ ,  $n_2 = 10^{13}$  см $^{-3}$  и  $\chi n \ll \sigma n_2$  коэффициент усиления составляет всего  $\sim 10^{-4}$  см $^{-1}$ . Поэтому принято считать, что полный коэффициент экспоненциального усиления  $G = \exp(gL) \geq 1$  достигим лишь при большой (превышающей десятки метров) длине усиливающей среды  $L$ . Эта оценка основана на предположении о равномерном распределении концентрации  $n_2$  по длине среды  $L$ . Геометрия в виде цилиндра, длина  $L$  которого намного превышает его поперечник, обуславливает необходимость направления потока рентгеновских фотонов накачки, коаксиального с ожидаемым потоком гамма-фотонов стимулированного происхождения. Это приводит к анизотропии усиления в среде со скрытой инверсией, причиной которой служит то, что при поглощении фотона накачки ядро приобретает добавку скорости  $\Delta v/c = E/Mc^2 \approx 2E_{\text{гrec}}/E$  и соответствующее доплеровское смещение линии испускания  $\hbar\omega_e \approx E(1 - E_{\text{гrec}}/E \pm 2E_{\text{гrec}}/E)$ , где знаки  $\pm$  относятся к испусканию гамма-фотона параллельно или антипараллельно направлению накачки, т. е. соответственно

$$\hbar\omega_e \approx E \left( 1 + \frac{E_{\text{гrec}}}{E} \right) = \hbar\omega_a \quad \text{или} \quad \omega_e \approx E \left( 1 - \frac{3E_{\text{гrec}}}{E} \right), \quad (5)$$

Поэтому при направлении испускания, совпадающем с направлением накачки, скрытая инверсия отсутствует ( $\hbar\omega_e = \hbar\omega_a$ ), и стимулированный процесс испускания может происходить только навстречу потоку накачки (обратное стимулированное рассеяние фотонов накачки со стоковым смещением частоты [5]). Анизотропия усиления при продольной накачке делает невозможным применение простых двухзеркальных открытых резонаторов.

К негативным сторонам продольной накачки можно также отнести уменьшение яркости (спектральной плотности)  $\Psi$  потока фотонов накачки на длине  $L$  из-за различного рода процессов рассеяния, а также из-за конечной расходимости пучка рентгеновских квантов, приводящей к снижению  $\Psi$  в

$$\frac{\Psi(L)}{\Psi_0} \approx \left[ 1 + \left( \frac{\zeta L^2}{S} \right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (6)$$

раз, где  $\zeta$  – телесный угол,  $\Psi_0$  – спектральная плотность фотонов и  $S$  – площадь сечения пучка накачки на входе в ядерный канал.

Особенности временной структуры доступных сегодня рентгеновских источников с высокой спектральной яркостью побуждают проделать дополнительный анализ процесса накачки, направленный на ревизию приведенной выше простой оценки полного коэффициента усиления  $G$  в протяженной среде.

## 2. Накачка ядер в продольной среде со скрытой инверсией

Наиболее пригодным типом накачки является рентгеновское излучение релятивистских электронов, обладающее по сравнению с другими источниками наибольшей спектральной яркостью. Обычно электроны ускоряются до релятивистских энергий микроволновым электромагнитным полем с частотой  $\Delta t_m^{-1}$  и длиной волны  $\lambda = c\Delta t_m$ , причем электронные сгустки с длительностью  $\Delta t_e$  заполняют лишь малую долю микроволнового периода. Соответственно поток рентгеновских квантов представляет собой ряд импульсов с длительностью того же порядка ( $\Delta t_e$ ), разделенных паузами продолжительностью  $\Delta t_m - \Delta t_e$ . Наибольшие пиковые яркости импульсного рентгеновского излучения ( $\sim 5 \times 10^{23}$  фот.·см $^{-1}$ ·мм $^{-2}$ ·мрад $^{-2}$  в относительной полосе 0.1 %) достигаются в лазерах на свободных электронах [8, 9].

Такая импульсно-периодическая структура потока рентгеновских фотонов определяет особенности динамики процесса накачки в виде циклов, многократно повторяющихся с частотой  $\Delta t_m^{-1}$ . Ядерные населенности в точке одномерной среды с фиксированной координатой  $z$  следуют ритму последовательности рентгеновских импульсов: возбуждение ядер в течение короткого интервала  $\Delta t_e$ , а затем – спонтанный распад на протяжении более длительной паузы  $\Delta t_m - \Delta t_e$ ; общий временной ход концентрации возбужденных ядер имеет пилообразный вид с несимметричными зубцами, для которых характерен крутой фронт и более пологий спад.

Полная концентрация охлажденных атомов  $n$  есть сумма ( $n = n_1 + n_2 + n_3$ ) трех составляющих: концентрации  $n_1$  невозмущенных ядер в основном состоянии, пригодных для образования возбужденных ядер с концентрацией  $n_2$ , и концентрации  $n_3$  балластных ядер на нижнем уровне. Последние образуются из ядер, ранее возбужденных в ходе спонтанного распада или под вынуждающим действием накачки. Из-за отдачи, а также вследствие нарушения требования  $\beta \rightarrow 1$  они непригодны для дальнейшего формирования усиливающей среды. Важно подчеркнуть, что истощение атомов с концентрацией  $n_1$  и накопление балластных атомов с концентрацией  $n_3$  приводит к постоянному уменьшению числа ядер, участвующих в процессе накачки.

В отдельном текущем  $N$ -м цикле накачки в точке среды с фиксированной координатой  $z$  накопление концентрации (в режиме слабого гамма-сигнала), происходящее в течение рентгеновского импульса  $\Delta t_e$ , управляется системой скоростных уравнений

$$\frac{dn_1}{d\theta} = -b_1 n_1, \quad \frac{dn_2}{d\theta} = b_1 n_1 - (\mu + b_2) n_2, \quad (7)$$

где  $\mu \equiv \Delta t_m/\tau$ ;  $b_1 \equiv a/(2J_1 + 1)$ ;  $b_2 \equiv a/(2J_2 + 1)$ ;  $a \equiv 2\sigma\Psi\mu(1 + \alpha)^{-1}$ ;  $J_1$  и  $J_2$  – спины нижнего и верхнего состояний лазерного перехода. Принято также, что спектральная полоса рентгеновского импульса накачки охватывает обе линии с частотами  $\omega_a$  и  $\omega_e$ . Ограниченность доступной сегодня величины спектральной яркости  $\Psi$  обуславливает малость параметра  $a$  ( $a \ll 1$ ) и, следовательно,  $b_1 \ll 1$ ,  $b_2 \ll 1$ ,  $b_1\theta \ll 1$  и  $b_2\theta \ll 1$ , что далее находит отражение в приближенных выражениях. Что касается параметра  $\mu$ , то при заданном значении  $\Delta t_m$  он не может быть чрезмерно малым из-за температурных ограничений (4).

Интегрирование системы уравнений (7) с начальными условиями  $n_2 = n_2(0)$  и  $n_1 = n_1(0)$  дает зависимость концентраций от времени в течение рентгеновского импульса ( $0 \leq \theta \leq \theta_e \equiv \Delta t_e / \Delta t_m \ll 1$ )

$$n_1(\theta) = n_1(0) \exp(-b_1\theta) \approx n_1(0)(1 - b_1\theta), \quad (8)$$

$$n_2(\theta) = [n_2(0) + n_1(0)D(\theta)] \exp[-(\mu + b_2)\theta] \approx [n_2(0) + n_1(0)b_1\theta](1 - \mu\theta), \quad (9)$$

где

$$D(\theta) \equiv b_1 \frac{\exp[(\mu - \Delta b)\theta] - 1}{\mu - \Delta b} \approx b_1\theta; \quad \Delta b \equiv b_1 - b_2.$$

Концентрации  $n_1(\theta)$  и  $n_2(\theta)$  достигают соответственно минимального и пикового значений  $n_1(\theta_e)$  и  $n_2(\theta_e)$  к концу рентгеновского импульса, когда  $\theta = \theta_e \ll 1$  и  $D(\theta) = D(\theta_e) \equiv D_e \approx b_1\theta_e$ .

Затем в течение паузы длительностью  $\Delta t_m(1 - \theta_e)$  происходит спонтанный распад возбужденных состояний согласно уравнению  $dn_2/d\theta = -\mu n_2$  и накопление балластных ядер с концентрацией  $n_3$ . При интегрировании с начальным условием  $n_2 = n_2(\theta_e)$  концентрация возбужденных ядер во время паузы

$$n_2(\theta) = n_2(\theta_e) \exp(-\mu\theta) = [n_2(0) + n_1(0)D_e] \times \exp[-(\mu + b_2)\theta_e - \mu\theta] \approx [n_2(0) + n_1(0)b_1\theta_e] \times (1 - \mu\theta_e) \exp(-\mu\theta) \quad (10)$$

и достигает к концу цикла ( $\theta_m = 1$ ) значения

$$n_2(\theta_m) = [n_2(0) + n_1(0)D_e] \exp(-\mu - b_2\theta_e) \approx [n_2(0) + n_1(0)b_1\theta_e] \exp(-\mu); \quad (11)$$

при этом  $n_1(\theta_m) = n_1(\theta_e)$  и  $n_3(\theta_m) = n - n_2(\theta_m) - n_1(\theta_e)$ .

Из (11) видна возможность накопления возбужденных ядер к концу цикла с  $n_2(\theta_m) > n_2(0)$  (например, уже в первом цикле  $n_2(\theta_m) = nD_e \exp(-\mu - b_2\theta_e) > n_2(0) = 0$ ).

Финальные значения концентраций в конце текущего цикла  $N$  являются в то же время и начальными значениями для следующего цикла  $N + 1$ :  $n_1(\theta_m, N) = n_1(\theta_e, N) \rightarrow n_1(0, N + 1)$ ,  $n_2(\theta_m, N) \rightarrow n_2(0, N + 1)$ ,  $n_3(\theta_m, N) \rightarrow n_3(0, N + 1)$ .

При рассмотрении динамики накачки по многим повторяющимся циклам удобно для составления новых дифференциальных уравнений принять конечные разности переменных текущего цикла за дифференциалы «длинного» процесса накачки, а именно длительность  $\Delta t_m$  принять за дифференциал «длинного» времени  $\vartheta \equiv t / \Delta t_m$  ( $0 \leq \vartheta \leq \infty$ ) и разности финальной и стартовой концентраций в одном цикле – за дифференциалы концентраций:  $\Delta n_1 = n_1(\theta_m) - n_1(0) = -n_1(0)D_1$  (здесь  $D_1 \equiv 1 - \exp(-b_1\theta_e) \approx b_1\theta_e$ ). Переход от конечных разностей к дифференциалам дает дифференциальное уравнение  $dn_1/d\vartheta = \Delta n_1$ , управляющее истощением концентрации  $n_1(\vartheta)$  за время многих повторяющихся циклов накачки, с интегралом при начальном условии  $n_1(\vartheta = 0) = n$

$$n_1(\vartheta) = n \exp(-D_1\vartheta) \approx n \exp(-b_1\theta_e\vartheta), \quad (12)$$

демонстрирующим монотонное убывание  $n_1(\theta)$ .

Аналогичным образом и с учетом зависимости  $n_1(\vartheta)$  (12)

$$\Delta n_2 = n_2(\theta_m) - n_2(0) = -n_2(0)D_2 + nD_e(1 - D_2) \exp(-D_1\vartheta),$$

откуда та же процедура перехода от конечных разностей к дифференциалам приводит к уравнению  $dn_2/d\vartheta = \Delta n_2$  для процесса накопления концентрации  $n_2(\vartheta)$  (здесь  $D_2 \equiv 1 - \exp(-\mu - b_2\theta_e)$ ). Интегрирование этого уравнения с начальным условием  $n_2(\theta = 0) = 0$  дает изменение концентрации возбужденных ядер за время многих повторяющихся циклов,

$$n_2(\vartheta) = \frac{nD_e(1 - D_2)}{D_2 - D_1} [\exp(-D_1\vartheta) - \exp(-D_2\vartheta)] \approx \frac{nb_1\theta_e}{e^\mu - 1} \{ \exp(-b_1\theta_e\vartheta) - \exp[-(1 - e^{-\mu})\vartheta] \}, \quad (13)$$

которая при  $\vartheta \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к нулевому значению  $n_2(\vartheta) \rightarrow 0$ , проходя через максимум

$$n_2(\vartheta_{\max}) = nD_e(D_2^{-1} - 1) \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{\frac{D_1}{D_2 - D_1}} \approx \frac{nb_1\theta_e}{e^\mu - 1} \quad (14a)$$

при

$$\vartheta_{\max} = \frac{\ln(D_2/D_1)}{D_2 - D_1} \approx (1 - e^{-\mu})^{-1} \ln \left( \frac{1 - e^{-\mu}}{b_1\theta_e} \right). \quad (14б)$$

Длительное (поскольку  $\vartheta_{\max} \gg 1$ ) накопление возбужденных ядер за многие циклы накачки создает концентрацию  $n_2(\vartheta_{\max})$ , которая превышает концентрацию (11), образующуюся в первом цикле, приблизительно в  $(1 - e^{-\mu})^{-1}$  раз.

Изменение концентрации  $n_2^{\text{peak}}$  в пике зубца за время многих циклов следует из (9) с аргументом  $\theta = \theta_e$ , где начальные концентрации  $n_1(0)$  и  $n_2(0)$  замещены текущими зависимостями  $n_1(\vartheta)$  (12) и  $n_2(\vartheta)$  (13):

$$n_2^{\text{peak}}(\vartheta) = \frac{nD_e}{D_2 - D_1} \exp[-(\mu + b_2)\theta_e] \{ (D_2 - D_1) \exp(-D_1\vartheta) + (1 - D_2) [\exp(-D_1\vartheta) - \exp(-D_2\vartheta)] \} \approx nb_1\theta_e \exp(-b_1\theta_e\vartheta) \frac{1 - \exp[-\mu - (1 - e^{-\mu})\vartheta]}{1 - e^{-\mu}}. \quad (15)$$

При  $\vartheta \rightarrow 0$  пиковая концентрация (15) асимптотически стремится к нулю,  $n_2^{\text{peak}}(\vartheta) \rightarrow 0$ , проходя через максимум

$$n_2^{\text{peak}}(\vartheta_{\max}^{\text{peak}}) = nD_e \exp[-(\mu + b_2)\theta_e] \times \left[ \left( \frac{D_2}{1 - D_1} \right)^{D_2} \left( \frac{1 - D_2}{D_1} \right)^{D_1} \right]^{\frac{1}{D_2 - D_1}} \approx \frac{nb_1\theta_e}{1 - e^{-\mu}} \quad (16a)$$

при

$$\vartheta_{\max}^{\text{peak}} = \frac{1}{D_2 - D_1} \ln \left( \frac{D_2 D_2 - 1}{D_1 D_1 - 1} \right) \approx \frac{1}{1 - e^{-\mu}} \ln \frac{1 - e^{-\mu}}{b_1\theta_e e^\mu}. \quad (16б)$$

Пиковый максимум формально лишь незначительно опережает максимум концентрации на величину порядка  $\mu$ , т. е. оба максимума относятся к одному и тому же цик-

лу, и пиковый максимум превосходит максимум концентрации приблизительно в  $e^\mu$  раз. Оба максимума достаточно плоские.

Таким образом, как уже упоминалось ранее, процесс формирования концентрации возбужденных ядер во времени в фиксированной точке  $z$  протяженной ядерной среды можно описать пилообразной последовательностью циклов. Бегущая волна «пила» населенностей перемещается вместе с потоком рентгеновского излучения накачки в положительном направлении оси  $z$  со скоростью света. (Сомнения в каком-либо нарушении постулатов специальной теории относительности исключены, поскольку со скоростью света перемещается лишь состояние («фаза») среды (населенности ядерных состояний), но никак не сами ядра или иные материальные тела.) В итоге концентрация возбужденных ядер при продольной накачке потоком рентгеновского излучения релятивистских электронов обладает существенной пространственной и временной неоднородностью, из-за чего допущение о равномерном распределении  $n_2$  по длине перестает быть справедливым и процесс усиления гамма-фотонов не может быть представлен использованным ранее простым выражением  $G = \exp(gL) \geq 1$ .

### 3. Локальное усиление в среде с бегущей волной населенности ядер

Поток гамма-фотонов распространяется навстречу бегущей волне населенностей в отрицательном направлении оси  $z$  и поэтому пробегает каждый зубец пила за время  $\Delta t_m/2$ , а локальное усиление в пределах одного зубца происходит на длине  $\Delta l/2$ , но при этом полное число ядер в зубце остается неизменным. С учетом этих фактов расчет усиления формально удобнее проводить при неизменных значениях концентраций (9) и (11) в коэффициенте  $g = \sigma\beta n_2 - \chi n$  (1), но дальнейшее интегрирование следует вести по неизменной полной длине  $L$ .

Наибольшее значение  $g(\theta)$

$$g_{\max} \approx n[\sigma\beta b_1 \theta_e (1 - e^{-\mu})^{-1} - \chi] \quad (17)$$

достигается в пике зубца в момент «длинного» времени  $\vartheta = \vartheta_{\max}^{\text{peak}}$  (166).

В этом предельном случае полезно при  $g = g_{\max} = 0$  дать оценку критического значения параметра накачки  $P \equiv \Psi\theta_e = \Psi\Delta t_e/\Delta t_m$ , позволяющую получить представление о минимальных требованиях к источнику рентгеновского излучения:

$$P_{\text{crit}} \equiv (\Psi\theta_e)_{\text{crit}} = \chi \frac{1 - \exp(-\mu)}{2\sigma^2\beta\mu} (2J_1 + 1)(1 + \alpha) \\ = 2\pi^2\chi \frac{1 - \exp(-\mu)}{\mu} (2J_1 + 1) \left(\frac{1 + \alpha}{\lambda^2}\right)^2. \quad (18)$$

Значение  $P_{\text{crit}}$  характеризуется чрезвычайно сильной зависимостью от  $\sim \lambda^{-4} \sim E^4$  и более слабыми зависимостями через коэффициенты  $\chi$  и  $\alpha$ , уменьшающиеся с ростом  $E$ . Что касается зависимости  $P_{\text{crit}}$  от  $\mu \sim \tau^{-1}$ , то уменьшение  $\tau$ , желательное для снижения величины  $P_{\text{crit}}$ , приводит в дальнейшем к слишком быстрому экспоненциальному падению  $g \sim \exp(-\mu\theta)$  после пика зубца. Это разнообразие зависимостей делает выбор оптимального нуклида непростой многофакторной задачей.

Достижение накачкой критического значения  $P_{\text{crit}}$  (18) не означает возможности наблюдения реального усиления, поскольку, кроме единственной точки пика, на всей остальной протяженности зубца  $g < 0$ . При вычислении коэффициента усиления при  $P > P_{\text{crit}}$  в пределах всего зубца вкладом участка, расположенного в интервале  $c\Delta t_e$ , можно пренебречь из-за сильного неравенства  $\theta_e \ll 1$ . Тогда коэффициент усиления  $g(N^*) \approx n\chi[(P/P_{\text{crit}}) \times \exp(-\mu\theta) - 1]$  убывает экспоненциально как со временем  $\theta$ , так и с координатой  $z = \Lambda\theta$ , а полное локальное усиление на всей длине  $N$ -го цикла ( $N = N^* = \vartheta_{\max}^{\text{peak}}$ ) есть

$$G(N^*, \Lambda) = \exp \int_{\Lambda} g dz \approx \exp \left\{ cn\chi\tau \left[ \frac{P}{P_{\text{crit}}} (1 - e^{-\mu}) - \mu \right] \right\}, \quad (19)$$

и  $G(N^*, \Lambda) \geq 1$ , если

$$P/P_{\text{crit}} \geq \mu(1 - e^{-\mu})^{-1}. \quad (20)$$

Даже при выполнении условия (20) локальное усиление (19) лишь незначительно превышает единицу из-за малости произведения  $n\chi$  (например,  $G(N^*, \Lambda) \geq 1$  при  $\mu = 1$ ,  $P/P_{\text{crit}} \geq 1.6$ , а  $G(N^*, \Lambda) \approx 1 + (2 \times 10^{-7})$  при  $P/P_{\text{crit}} = 5$  и  $n\chi = 10^{-8} \text{ см}^{-1}$ ).

Коэффициент усиления  $g(N^*) > 0$  остается положительным во всем интервале, от  $\theta = \theta_e$  до  $\theta = 1$ , только при выполнении неравенства

$$P/P_{\text{crit}} \geq \exp \mu, \quad (21)$$

более сильного, чем (20). Поэтому, хотя при условии (20) локальное усиление может превышать единицу ( $G(N^*, \Lambda) \geq 1$ ), в интервале значений яркости накачки  $\mu[1 - \exp(-\mu)]^{-1} \leq P/P_{\text{crit}} \leq \exp \mu$  положительное усиление ( $g > 0$ ) достигается лишь на ограниченном ( $\Delta l < \Lambda$ ) участке зубца в окрестностях пика; на остальной поглощающей части протяженностью  $\Lambda - \Delta l$  усиление  $g < 0$ . Наличие этой поглощающей части снижает потенциально реализуемую величину локального усиления  $G(N^*) \geq 1$ .

Очевидным способом устранения негативного воздействия поглощающих участков с  $g < 0$  является их исключение из взаимодействия с усиливаемым потоком гамма-фотонов при сохранении участков с  $g > 0$ . При этом, несмотря на уменьшение длины участка ядерной среды, полное локальное усиление  $G(N^*)$  на одном зубце возрастает. Относительная протяженность усиливающей части зубца ограничена неравенством

$$\Delta l/\Lambda \approx \mu^{-1} \ln(P/P_{\text{crit}}) \geq \frac{1}{\mu} \ln \left[ \frac{\mu}{1 - \exp(-\mu)} \right],$$

зависящим только от параметра  $\mu$ . В этом случае в (19) интегрирование по  $\Delta l$ , а не по полной длине зубца  $\Lambda$ , дает

$$G(N^*, \Delta l) = \exp \int_{\Delta l} g dz \\ \approx \exp \left[ n\chi\Lambda \left( \frac{P}{P_{\text{crit}}} \frac{1 - \exp(-\mu\Delta l/\Lambda)}{\mu} - \frac{\Delta l}{\Lambda} \right) \right] \\ = \exp \left[ cn\chi\tau \left( \frac{P}{P_{\text{crit}}} - \ln \frac{P}{P_{\text{crit}}} - 1 \right) \right], \quad (22)$$

что при том же значении параметра накачки  $P/P_{\text{crit}}$  (20) приводит к

$$\frac{G(N^*, \Delta l)}{G(N^*, A)} = \exp \left\{ cn\chi\tau \left[ \mu + \frac{P}{P_{\text{crit}}} \exp(-\mu) - \ln \frac{P}{P_{\text{crit}}} - 1 \right] \right\} > 1, \quad (23)$$

несмотря на уменьшенную ( $\Delta l < A$ ) длину интегрирования. Так, при  $P/P_{\text{crit}} = 5$  и  $\mu = 1$  показатель экспоненты в (22) превышает такой же показатель в (19) в 1.15 раза, но само отношение локальных усилений (23) остается очень малым, поскольку коэффициент  $cn\chi\tau \ll 1$ . Более заметно влияние укорочения участка среды в пределах одного зубца при невыполнении условия (20) и  $G(N^*, A) < 1$ . Тогда  $G(N^*, A) > 1$ , и усиление становится возможным, если

$$\frac{P}{P_{\text{crit}}} \geq \frac{\Delta l}{A} \frac{\mu}{1 - \exp(-\mu\Delta l/A)} \approx 1 + \frac{\mu\Delta l}{2A}. \quad (24)$$

Например,  $G(N^*, A) > 1$  при  $\Delta l/A = 0.1$ ,  $\mu = 1$  и  $P/P_{\text{crit}} = 1.05$ .

Таким образом, относительное укорочение участка ядерной среды до  $\Delta l/A^* < 1$  — один из способов организации усиления в условиях существующих ограничений параметра накачки  $P$ .

#### 4. Полное усиление в протяженной среде с бегущей волной населенности

Ядерная среда с укороченными участками усиления конструктивно представляет собой последовательность квантовых ловушек (действующая длина  $\Delta l$ ) с охлажденными атомами, расположенных одна за другой и разделенных пассивными промежутками, полностью свободными от вещества (все ловушки могут быть заключены в общую вакуумную оболочку). Полный коэффициент  $G(L)$  усиления после прохода потоком гамма-фотонов последовательности из  $N$  зубцов (ловушек) равен произведению  $N$  локальных коэффициентов усиления  $G(N, A) > 1$ :

$$\begin{aligned} G(L) &= \prod_N G(N, A) \approx [G(N^*, \Delta l)]^N \\ &\approx \exp \left[ Ncn\chi\tau \left( \frac{P}{P_{\text{crit}}} - \ln \frac{P}{P_{\text{crit}}} - 1 \right) \right] \\ &\approx 1 + 2Ncn\chi\tau(P/P_{\text{crit}} - 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Оценка  $G(L)$  равна произведению максимального значения  $G(N^*, A)$  (19) и действующего числа  $N$  зубцов, что допустимо (с некоторым завышением) из-за установленно-го выше плоского характера максимума (16) (второе приближенное равенство (25) относится к случаю  $P/P_{\text{crit}} - 1 \ll 1$ ).

#### 5. Схема с ортогонально скрещенными пучками

Другая экспериментальная конфигурация возможна при не слишком малом локальном усилении на одном зубце  $G(N^*, \Delta l)$  (22). В этой схеме направления распространения потоков рентгеновской накачки (ось  $z$ ) и гамма-фотонов стимулированного происхождения (ось  $y$ ) взаимно ортогональны в  $yz$ -плоскости, что приводит к нескольким следствиям.

1. Отсутствуют линейное доплеровское смещение энергии излучательного ядерного перехода (5) и анизот-

ропия инверсии, присущие продольной схеме. Сохраняющееся квадратичное доплеровское смещение  $\Delta \omega_D''(\hbar\omega_c) = E^3/2(Mc^2)^2 \ll \hbar\Delta\omega_\gamma$  не вызывает анизотропии и не препятствует возникновению скрытой инверсии и гамма-усилению в обоих направлениях оси  $y$ . Это позволяет построить стандартный открытый резонатор с эффективными брэгговскими зеркалами (см., напр., [10]).

2. Небольшая протяженность ядерной среды вдоль пучка фотонов накачки, равная поперечному размеру потока гамма-квантов в резонаторе, исключает продольное снижение спектральной плотности накачки  $\Psi$  (6). С другой стороны, поперечный размер пучка фотонов накачки, который обычно меньше  $A$ , ограничивает длину участка усиления.

В итоге в поперечной схеме ядерная среда длиной не более  $\Delta l$  размещается вдоль потока гамма-фотонов на половине межзеркального расстояния  $L_{\text{res}} = A$  между брэгговскими отражателями или вплотную к одному из них (при этом  $L_{\text{res}} = A/2$ ). Тогда поток гамма-фотонов в резонаторе распространяется в материальной среде с  $g > 0$  лишь в течение существования в ней положительного усиления и, как и в разд.3, не испытывает поглощения в остальное время внутри цикла на участке резонатора, полностью свободном от вещества, что решает задачу исключения избыточных потерь гамма-фотонов на участках с  $g < 0$ . При достаточной добротности резонатора можно надеяться на выполнение обычных лазерных пороговых условий в пределах одного единственного зубца и на генерирование последовательности гамма-импульсов с частотой  $\Delta t_m^{-1}$ , синхронизованных с пульсациями населенности. В этой схеме удобно осуществлять непрерывное пополнение усиливающей среды ядрами в основном состоянии, концентрация которых в процессе накачки монотонно падает ( $dn_1/d\theta < 0$ ), направляя поток глубоко охлажденных ядродержащих атомов вдоль третьей декартовой координаты  $x$ . Такая трехмерная ортогональность направлений трех основных потоков (ядер, рентгеновских фотонов накачки и гамма-фотонов) дает повод назвать эту конфигурацию эксперимента *декартовой*.

С учетом всех обстоятельств и полного локального усиления  $G(N^*, \Delta l)$  (22) пороговое условие для накачки  $P_{\text{thr}}$  в резонаторе с коэффициентами отражения  $R$  есть  $P_{\text{thr}}/P_{\text{crit}} \approx 1 + [2(1 - R)/cn\chi\tau R]^{1/2}$ .

#### 6. Численный пример

Выбор нуклида, пригодного для демонстрационного расчета и тем более для эксперимента, затруднителен, поскольку удовлетворению подлежат разнородные и иногда взаимно противоречащие требования как к ядерным характеристикам, так и к свойствам атомов (последние должны быть пригодными для лазерно-оптического охлаждения и достаточно длительного удержания в ловушке). В частности, обращаясь к отмеченной выше сложной связи критической величины параметра накачки  $P_{\text{crit}}$  (18) с энергией перехода  $E$  и коэффициентом внутренней конверсии  $\alpha$ , следует учесть эмпирическую зависимость  $\log B$  произведения  $B = [(1 + \alpha)E^2]^2$ , входящего в (18), от атомного номера  $Z$  изомеров с  $E \leq 100$  кэВ и подходящим (для удовлетворения неравенства (4)) временем жизни  $\tau$ . Изображающие точки (например, для таких изомеров, как  $^{40\text{m}}\text{K}$ ,  $^{54\text{m}}\text{Mn}$ ,  $^{119\text{m}}\text{Sn}$ ,  $^{57\text{m}}\text{Fe}$ ,  $^{83\text{m}}\text{Rb}$ ,  $^{134\text{m}}\text{Cs}$ ,  $^{137\text{m}}\text{La}$ ,  $^{151\text{m}}\text{Eu}$ ,  $^{155\text{m}}\text{Gd}$ ,  $^{161\text{m}}\text{Dy}$ ,  $^{185\text{m}}\text{Os}$ ) располагаются в

неширокой полосе с общей тенденцией, удовлетворительно описываемой линейным выражением  $\log B = 5.4 + Z/20$  ( $E$  – в кэВ). Отсюда следует преимущество нуклидов начала периодической таблицы для снижения произведения  $B$  и значения  $P_{\text{crit}}$ . Из-за отмеченных сложностей выбора предлагаемые в качестве примера ядерные изомеры  $^{54\text{m}}_{25}\text{Mn}$  и  $^{40\text{m}}_{19}\text{K}$  (см. ниже) играют лишь иллюстративную роль.

	$^{54\text{m}}_{25}\text{Mn}$	$^{40\text{m}}_{19}\text{K}$
$E$ (кэВ) .....	54.4	29.56
$\lambda$ (нм) .....	0.023	0.042
$\sigma$ ( $10^{-18}$ см $^2$ ) .....	0.84	2.8
$J_1$ .....	3 $^+$	4 $^-$
$\tau$ (нс) .....	0.049	4.25
$\alpha$ .....	0.21	0.35
$T$ (мкК) .....	< 300	< 0.1
$\beta$ .....	0.825	0.74
$\chi$ ( $10^{-22}$ см $^2$ ) .....	$\sim 0.35$	$\sim 0.35$
$\mu$ .....	6	0.07
$P_{\text{crit}}$ ( $10^{13}$ см $^{-2}$ ·с $^{-1}$ ·Гц $^{-1}$ ) .....	4.3	3.6
$\theta_e$ .....	0.03	0.03
$\Psi_{\text{crit}}$ ( $10^{15}$ см $^{-2}$ ·с $^{-1}$ ·Гц $^{-1}$ ) .....	1.4	1.2
$P/P_{\text{crit}}$ (при $\Delta l/A = 1$ ) .....	> 400	> 1.07
$G(N^*, A)$ (при $n = 10^{14}$ см $^{-3}$ ) .....	$1 + (1.4 \times 10^{-5})$	$1 + (1.7 \times 10^{-10})$

Эти оценки следует сопоставить с характеристиками существующих рентгеновских источников с релятивистскими электронами, из которых одним из наиболее продвинутых, по-видимому, является XFEL HASYLAB/DASY (Гамбург), генерирующий рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda = 0.1$  нм и пиковой яркостью  $5.4 \times 10^{33}$  фот.·с $^{-1}$ ·мм $^{-2}$ ·мрад $^{-2}$  в относительной полосе 0.1 % в импульсе длительностью  $\Delta t_e \approx 0.1$  пс и в пучке диаметром  $h = 0.11$  мм с расходимостью 0.8 мкрад [8, 9]. Для перевода в используемые выше единицы яркости (фот.·с $^{-1}$ ·см $^{-2}$ ·мрад $^{-2}$ ·Гц $^{-1}$ ) приведенную величину следует умножить на коэффициент  $3 \times 10^{-13} \lambda$  ( $\lambda$  – в нм), что с учетом остальных параметров даст  $\sim 1.5 \times 10^{20}$  фот.·с $^{-1}$ ·см $^{-2}$ ·мрад $^{-2}$ ·Гц $^{-1}$ , или  $\Psi \approx 10^{14}$  фот.·с $^{-1}$ ·см $^{-2}$ ·Гц $^{-1}$  и  $P \approx 3 \times 10^{10}$  фот.·с $^{-1}$ ·см $^{-2}$ ·Гц $^{-1}$ .

Итоги сопоставления данных свидетельствуют, что из-за очень малой относительной длительности ( $\theta_e = \Delta t_e/\Delta t_m$ ) импульсов рентгеновского излучения параметр накачки существующих источников значительно уступает оценкам критического значения параметра накачки  $P_{\text{crit}}$ , хотя пиковая спектральная плотность  $\Psi$  приближается по порядку величины к оценкам критического параметра накачки  $\Psi_{\text{crit}} = P_{\text{crit}}/\theta_e$ .

## 7. Заключение

Проведенный анализ показал, что динамике накачки изомерных ядер рентгеновским излучением релятивистских электронов и гамма-усиления свойственны существенные особенности, обусловленные импульсно-периодическим характером пучка излучающих электронов.

В протяженной ядерной среде накачка возбуждает бегущую волну скрытой инверсии населенностей с анизотропным положительным гамма-усилением ( $g > 0$ ) в направлении, обратном потоку рентгеновских фотонов. Коэффициент  $g > 0$  достигается при превышении критического значения параметра накачки  $P_{\text{crit}}$ , равного произведению пиковой спектральной плотности фотонов рентгеновского источника  $\Psi$  и относительной длительности ультракороткого сгустка релятивистских электронов  $\theta_e = \Delta t_e/\Delta t_m$ .

Локальное усиление на отдельном пространственном периоде  $A$  бегущей волны инверсии может превышать единицу ( $G > 1$ ) на части периода  $A$  даже при  $g < 0$ . Устранение негативного воздействия поглощающих участков с  $g < 0$  достигается посредством укорочения действующей длины усиления до  $\Delta l < A$ .

Полное гамма-усиление  $G(L)$  в протяженной ядерной среде длиной  $L = NA$  оценивается как произведение  $N$  локальных коэффициентов усиления  $G$ , причем число действующих пространственных периодов  $N$  протяженной среды и ее длина  $L$  ограничены процессом истощения концентрации ядер, пригодных для образования скрытой инверсии населенностей.

В схеме с ортогональными направлениями рентгеновского излучения накачки и потока усиливаемых гамма-фотонов анизотропия скрытой инверсии отсутствует. Это открывает возможность построения стандартного двухзеркального лазерного резонатора с брэгговскими монокристаллическими отражателями.

Оценки критического пикового значения спектральной плотности накачки  $\Psi_{\text{crit}}$  для нуклидов  $^{54\text{m}}_{25}\text{Mn}$  и  $^{40\text{m}}_{19}\text{K}$ , используемых как примеры, близки по порядку величины к известным характеристикам существующих источников рентгеновского излучения релятивистских электронов, однако  $P_{\text{crit}}$  заметно превышает доступные сегодня уровни  $P$ , главным образом из-за очень малой относительной длительности  $\theta_e = \Delta t_e/\Delta t_m$  импульсов рентгеновского излучения. Поэтому, хотя стимулированное гамма-испускание в ядерной среде со скрытой инверсией возникает уже при накачке существующими рентгеновскими источниками с релятивистскими электронами, достаточно эффективные экспериментальные результаты могут ожидать при заметном увеличении параметра накачки  $P$ , реализуемом в рентгеновских источниках следующего поколения.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (проект № 2.1.1.195).

1. Гинзбург В.Л. *УФН*, **177**, 346 (2007).
2. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **37**, 723 (2007).
3. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **19**, 513 (1992).
4. Rivlin L.A. *Hyperfine Interactions*, **107**, 57 (1997).
5. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **27**, 189 (1999).
6. Einstein A. *Verhandl. Deutsch. Phys. Ges.*, **18**, 318 (1916); *Mitt. Phys. Ges. (Zuerich)*, No. 18, 47 (1916).
7. Marcuse D. *Proc. IEEE*, **51**, 849 (1963).
8. <http://www.desy.de/~wroblewt/scifel/scifel.html>.
9. [http://www.xfel.desy.de/technical\\_information/photon\\_beam\\_parameter](http://www.xfel.desy.de/technical_information/photon_beam_parameter).
10. Shvyd'ko Yu.V., Lerche M., Wille H.-C., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 013904-1 (2003).