РЕЗОНАТОРЫ

PACS 42.60.Da

Собственные частоты и моды кольцевого оптического резонатора с тонкими диэлектрическими пластинами

В.Ф.Судаков

Рассмотрен кольцевой оптический резонатор, внутри которого произвольно расположены диэлектрические пластины. Неоднородность резонатора, вносимая пластинами, незначительна: толщина пластин и превышение их показателем преломления среднего показателя преломления резонатора подчинены условию малости. Показано, что спектр собственных частот такого резонатора простой и представляет собой эквидистантную последовательность слабо расщепленных частотных дуплетов. Найдено расщепление в каждом дуплете. Количественно описаны моды в виде возмущенных стоячих волн. Для решения указанной спектральной задачи использовался формализм матриц сдвига по траекториям дифференциального уравнения, позволяющий получить результат наиболее простым способом.

Ключевые слова: *кольцевые резонаторы, собственные частоты и моды.*

1. Введение

Характеристики лазерного излучение определяются главным образом резонатором. В однородном (рассеяние отсутствует) взаимном кольцевом оптическом резонаторе (КОР) независимыми могут быть как пара встречно распространяющихся (бегущих) волн, так и пара ортогональных стоячих волн. В зависимости от режима в генерации может участвовать любая из этих пар волн. Наличие невзаимности резонатора исключает возможность генерации стоячих волн. При одновременном действии невзаимности и рассеяния (в невзаимном и неоднородном КОР) генерируются волны смешанного типа, причем коэффициент стоячей волны зависит от параметров невзаимности и неоднородности. В этом суть проблемы кольцевых лазеров, известной как «связь встречно распространяющихся волн через рассеяние». Важно выявить зависимость величины и характера связи от параметров неоднородности, т. к. это открывает путь непосредственного уменьшения подобной зависимости (для ряда применений кольцевых лазеров коэффициент стоячей волны должен быть близок к нулю).

По указанной причине неоднократно делались попытки изучить влияние неоднородности в КОР (хотя бы даже и взаимном). Поскольку для неоднородности общего вида эта задача не может быть решена аналитически, выбирались достаточно простые модели неоднородностей: малая диэлектрическая призма [1], малый диэлектрический шар [2], тонкий цилиндр конечной длины с осью, параллельный оси резонатора [3], т. е. сосредоточенные рассеиватели. В [4] рассмотрена простая модель неоднородности, имитирующая действие двух рассеивающих центров, т. е. простейшего множественного рассеивателя. Для ряда применений кольцевых лазеров необходимо провести более общее описание неоднородности (см., напр., [5]). Это можно сделать только в рамках теории возмущений в той или иной ее трактовке. Таким образом можно изучать КОР при достаточно сложных распределениях неоднородности в нем (но в пределах применимости теории возмущений).

В настоящей работе рассматривается один из вариантов подобной неоднородности в виде трех диэлектрических пластин, произвольно расположенных по периметру КОР. Такие пластины могут, в частности, имитировать паразитные рассеивающие центры, но могут быть и элементами конструкции резонатора. Сделаны некоторые предположения о параметрах пластин, позволяющие рассматривать их как малое возмущение в однородном КОР. Изучается частотный спектр и моды КОР (показано, что результаты могут быть распространены на случай произвольного числа пластин). Как известно (см., напр., [6]), решение спектральной задачи для КОР позволяет получить важные характеристики излучения, генерируемого лазером (амплитуды стационарных колебаний, прочность предельного цикла, границы области одночастотной генерации и т. д.).

2. Постановка задачи

Пусть КОР одномерен, x – координата точки на оси, а L – периметр резонатора ($0 \leqslant x \leqslant L$). Показатель преломления среды заполнения $n(x) = n_0[1 + s(x)]^{1/2}$ является кусочно-постоянным. Функция $s(x) = 0$ при $x_i + \delta x < x < x_{i+1}$ и $s(x) = S > 0$ при $x_i \leqslant x \leqslant x_i + \delta x$, где $i = 1, 2, 3$, $x_4 = L$, $x_1 = 0$. Такое распределение показателя преломления может моделировать действие трех рассеивающих центров внутри КОР и соответствует трем диэлектрическим пластинам толщиной δx, расположенным в произвольных точках x_i. В одномерном приближении (бесконечно протяженные пластины) стационарные волны u с частотой $\omega = kc$ (c – скорость света в вакууме) в такой структуре удовлетворяют волновому уравнению

В.Ф.Судаков. Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5; e-mail: vvffss@rol.ru

Поступила в редакцию 24 января 2008 г.

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+k^2n^2(x)u=0$$

и граничным условиям периодического типа

$$u(0)=u(L),\quad \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}u(L)}{dz}.$$

Задача состоит в определении приближенных значений собственных частот κ (выраженных в обратных сантиметрах) и соответствующих им вещественных мод (распределений типа стоячих волн). Приближение обеспечивается предположением о малости параметра $\kappa_{0p}S\delta x$, где κ_{0p} – собственные частоты однородного КОР (при $S=0$), используемые в качестве нулевого приближения для собственных частот неоднородного КОР.

3. Матрицы сдвига и матрица полного обхода КОР

Волновое уравнение на всей длине резонатора имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\chi^2u(x)=0,$$

где $\chi^2=\bar\kappa^2=k^2n_0^2(1+S)$ в интервалах $(x_i,x_i+\delta x)$ и $\chi^2=\kappa^2=k^2n_0^2$ в интервалах $(x_i+\delta x,x_{i+1})$. В фазовом пространстве (u, $y=\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$) этому уравнению соответствует векторное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}u\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\chi^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ y\end{pmatrix}.$$

Будем решать его с использованием матрицы сдвига $U(x'',x')$ по фазовым траекториям (см., напр., [7]). В случае постоянных коэффициентов χ выражение для нее известно:

$$U(x'',x')=\begin{pmatrix}\cos[\chi(x''-x')] & \dfrac{1}{\chi}\sin[\chi(x''-x')]\\ -\chi\sin[\chi(x''-x')] & \cos[\chi(x''-x')]\end{pmatrix}.$$

Матрица сдвига позволяет сдвинуть решение из точки $x=x'$ в точку $x=x''$:

$$\begin{pmatrix}u(x'')\\ y(x'')\end{pmatrix}=U(x'',x')\begin{pmatrix}u(x')\\ y(x')\end{pmatrix}.$$

Начиная с точки $x=x_1=0$, будем последовательно переходить к точкам $x_i+\delta x$, x_{i+1}. Сдвиг на интервалах $(x_i,x_i+\delta x)$ при $\chi=\bar\kappa$ можно представить так:

$$\begin{pmatrix}u(x_i+\delta x)\\ y(x_i+\delta x)\end{pmatrix}=\bar U(x_i+\delta x,x_i)\begin{pmatrix}u(x_i)\\ y(x_i)\end{pmatrix},$$

а сдвиг на интервалах $(x_i+\delta x,\ x_{i+1})$ при $\chi=\kappa$ – так:

$$\begin{pmatrix}u(x_{i+1})\\ y(x_{i+1})\end{pmatrix}=U(x_{i+1},x_i+\delta x)\begin{pmatrix}u(x_i+\delta x)\\ y(x_i+\delta x)\end{pmatrix}.$$

В матрице U берется $\chi=\kappa$, в матрице $\bar U$ используется $\chi=\bar\kappa$.

Матрица полного обхода КОР – это матрица сдвига из точки $x=x_1=0$ в ту же точку с координатой $x=x_4=L$:

$$U(L,0)=\prod_{i=1}^{3}U(x_{i+1},x_i+\delta x)\bar U(x_i+\delta x,x_i). \tag{1}$$

Упростим вид этой матрицы, учитывая следующие приближения первого порядка (E – единичная матрица):

$$\bar U(x_i+\delta x,x_i)\approx\bar U(x_i,x_i)+\frac{\mathrm{d}\bar U(x_i,x_i)}{\mathrm{d}x}\delta x$$

$$=E+\frac{\mathrm{d}\bar U(x_i,x_i)}{\mathrm{d}x}\delta x, \tag{2}$$

$$U(x_{i+1},x_i+\delta x)\approx U(x_{i+1},x_i)-\frac{\mathrm{d}U(x_{i+1},x_i)}{\mathrm{d}x}\delta x. \tag{3}$$

Поскольку

$$\frac{\mathrm{d}\bar U(x_i,x_i)}{\mathrm{d}x}\neq\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\bar\kappa^2 & 0\end{pmatrix}=A,$$

все $\bar U(x_i+\delta x,x_i)$ одинаковы и равны $E+A\delta x$. Отсюда и из формул (2), (3) можно получить преобразованное выражение (1):

$$U(L,0)=U_0(L,0)+\left[\sum_{i=1}^{3}U(L,x_i)AU(x_i,0)\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{3}U(L,x_{i+1})\frac{\mathrm{d}U(x_{i+1},x_i)}{\mathrm{d}x}U(x_i,0)\right]\delta x. \tag{4}$$

Здесь использована матрица сдвига однородного резонатора

$$U_0(L,0)=U(L,x_3)U(x_3,x_2)U(x_2,x_1)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\kappa L & \dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa L\\ -\kappa\sin\kappa L & \cos\kappa L\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Вычислим слагаемые в выражении (4) для матрицы полного обхода. Непосредственным расчетом доказывается, что

$$U(L,x_{i+1})\frac{\mathrm{d}U(x_{i+1},x_i)}{\mathrm{d}x}U(x_i,0)$$

$$=\kappa\begin{pmatrix}-\sin\kappa L & \dfrac{1}{\kappa}\kappa L\\ -\kappa\cos\kappa L & -\sin\kappa L\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Произведение матриц можно привести к более удобному виду:

$$U(L,x_i)AU(x_i,0)=\begin{pmatrix}-\sin\kappa L-S\cos\kappa x_i\sin[\kappa(L-x_i)] & \dfrac{1}{\kappa}\{[\cos\kappa L-S\sin\kappa x_i\sin[\kappa(L-x_i)]\}\\ -\kappa\{\cos\kappa L+S\cos\kappa x_i\cos[\kappa(L-x_i)]\} & -\sin\kappa L-S\sin\kappa x_i\cos[\kappa(L-x_i)]\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Подставив (5)–(7) в выражение (4), представим его следующим образом:

$$U(L,0)=\begin{pmatrix}\cos\kappa L & \dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa L\\ -\kappa\sin\kappa L & \cos\kappa L\end{pmatrix}+3\kappa\begin{pmatrix}-\sin\kappa L & \dfrac{1}{\kappa}\cos\kappa L\\ -\kappa\cos\kappa L & -\sin\kappa L\end{pmatrix}\delta x$$

$$-\kappa\sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}-\sin\kappa L-S\cos\kappa x_i\sin[\kappa(L-x_i)] & \dfrac{1}{\kappa}\{\cos\kappa L-S\sin\kappa x_i\sin[\kappa(L-x_i)]\}\\ -\kappa\{\cos\kappa L+S\cos\kappa x_i\cos[\kappa(L-x_i)]\} & -\sin\kappa L-S\sin\kappa x_i\cos[\kappa(L-x_i)]\end{pmatrix}\delta x. \qquad (8)$$

4. Собственные частоты неоднородного КОР

Матрица полного обхода позволяет определить собственные частоты неоднородного кольцевого резонатора. Собственные частоты κ должны быть такими, чтобы

$$U(0,L)\begin{pmatrix}u(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(0)\\ y(0)\end{pmatrix}.$$

Поскольку детерминант любой матрицы сдвига равен 1, то собственные частоты должны быть такими, чтобы $\mathrm{Sp}U(L,0)=2$. В силу (5), (8) след матрицы полного обхода кольцевого резонатора

$$\mathrm{Sp}U(L,0)=\mathrm{Sp}U_0(L,0)-3S\kappa\delta x\sin\kappa L$$

$$=2\cos\kappa L-3S\kappa\delta x\sin\kappa L.$$

Следовательно, собственные частоты должны быть корнями уравнения

$$2\cos\kappa L-3S\kappa\delta x\sin\kappa L=2. \qquad (9)$$

Собственные частоты однородного КОР суть корни (9) при $S=0$, т. е. $\kappa_{0p}=2\pi p/L$, где $p\gg 0$ – большое целое число. Собственные частоты $\kappa_p^{\pm}$ неоднородного КОР при малом возмущении $S\kappa_{0p}\delta x\ll 1$ близки к собственным частотам однородного КОР и образуют дуплет: $\kappa_p^{\pm}=\kappa_{0p}(1\mp\varepsilon)$, где $0<\varepsilon\ll 1$. Из (9) получим уравнение для определения ε:

$$(\kappa_{0p}\varepsilon L)^2\mp 3S\kappa_{0p}\delta x(\kappa_{0p}\varepsilon L)=0,$$

т. е. имеем $0<\varepsilon=3S\delta x/L$. Таким образом, спектр собственных частот неоднородного КОР состоит из последовательности дуплетов с частотами

$$\kappa_p^{\pm}=\kappa_{0p}\left(1\mp\frac{3S\delta x}{L}\right) \qquad (10)$$

и относительным частотным интервалом в дуплете $(\kappa_p^{-}-\kappa_p^{+})/\kappa_{0p}=2(3S\delta x/L)$, не зависящим от его центральной частоты.

Как и всякое другое возмущение, неоднородность рассмотренного типа вызывает расщепление двукратно вырожденных собственных частот однородного КОР. В результате частотный спектр неоднородного КОР оказывается простым. В данном случае расщепление пропорционально плотности равномерно распределенной по периметру резонатора суммарной «площади» неоднородности показателя преломления тонких пластин. Следовательно, рассмотренная неоднородность не создает условий для возникновения внутренних резонансов (в составе КОР не появляются эквивалентные добротные линейные резонаторы). Величина расщепления не зависит от расположения неоднородностей. Обобщая полученный результат, можно утверждать, что сколько бы «тонких» неоднородностей ни было внутри кольцевого резонатора и как бы они ни были расположены относительно друг друга, их влияние на частотный спектр аддитивно и эквивалентно равномерно распределенной неоднородности (что не сводится, однако, к изменению показателя преломления при однородном заполнении). В терминах феноменологических коэффициентов связи встречных волн «тонкие» неоднородности соответствуют комплексно-сопряженным коэффициентам связи (это следует из вида расщепления дуплета), что естественно, т. к. рассматривается неоднородность диэлектрической проницаемости.

5. Моды неоднородного КОР

В однородном КОР каждой частоте соответствуют две ортогональные моды, которые можно выбрать произвольно, например моды $\cos\kappa_{p0}x$ и $\sin\kappa_{p0}x$. В неоднородном КОР каждой собственной частоте отвечает единственная мода. Определим моды для каждой из частот дуплета. Чтобы упростить вычисления, предположим, что неоднородности распределены равномерно: $x_{i+1}-x_i=\Delta X=L/3$. Матрица полного обхода $U(L,0)$ может быть приближенно представлена в виде

$$U(L,0)=[B+(BA-C)\delta x]^3,$$

где

$$B=\begin{pmatrix}\cos(\kappa\Delta X) & \dfrac{1}{\kappa}\sin(\kappa\Delta X)\\ -\kappa\sin(\kappa\Delta X) & \cos(\kappa\Delta X)\end{pmatrix}$$
$$C=\kappa\begin{pmatrix}-\sin(\kappa\Delta X) & \dfrac{1}{\kappa}\cos(\kappa\Delta X)\\ -\kappa\cos(\kappa\Delta X) & -\sin(\kappa\Delta X)\end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Периодические граничные условия $u_0=u(0)$, $y_0=\mathrm{d}u(0)/\mathrm{d}x$ должны удовлетворять равенству

$$[B+(BA-C)\delta x]\begin{pmatrix}u_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\ y_0\end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Таким образом, вектор

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

является собственным вектором для указанной выше матрицы, и его компоненты должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \cos(\kappa\Delta X) - S\kappa\delta x\sin(\kappa\Delta X) - 1 & \dfrac{1}{\kappa}\sin(\kappa\Delta X) \\ -\kappa[\sin(\kappa\Delta X) + S\kappa\delta x\cos(\kappa\Delta X)] & \cos(\kappa\Delta X) - 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0, \qquad (13)$$

которую нетрудно получить, если воспользоваться явными выражениями (11) и (12). Ненулевое решение этой системы существует при $\kappa = \kappa_p^{\pm} = \kappa_{0p}(1 \mp \varepsilon)$, где, как было установлено выше, $\kappa_{0p}\Delta X = 2\pi p$, $\varepsilon = S\delta x/\Delta X \ll 1$. При этих условиях

$$\cos(\kappa_p^{\pm}\Delta X) \approx \left[1 - \frac{1}{2}(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)^2\right],$$

$$\sin(\kappa_p^{\pm}\Delta X) \approx \mp\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X.$$

Воспользуемся первой строкой матрицы в (13) для определения одного из собственных векторов. Пусть

$$u_0 = -\frac{1}{\kappa_p}\sin(\kappa_p^{\pm}\Delta X),$$

$$y_0 = \cos(\kappa_p^{\pm}\Delta X) - S\kappa_p^{\pm}\delta x\sin(\kappa_p^{\pm}\Delta X) - 1.$$

Отсюда приближенно получаем

$$u_0 = \pm\,\varepsilon\Delta X + \varepsilon^2\Delta X,$$

$$y_0 = \left(-\frac{1}{2} \pm 1 - \varepsilon\right)(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)^2. \qquad (14)$$

Распределение моды на рассматриваемом интервале можно получить сдвигом найденного собственного вектора:

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\kappa x & \dfrac{1}{\kappa}\sin\kappa x \\ -\kappa\sin\kappa x & \cos\kappa x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$u(x) = u_0\cos\kappa_p x + \frac{1}{\kappa_p}y_0\sin\kappa_p x. \qquad (15)$$

Подставив в (15) выражения (14) и выбрав верхний знак, получим при соответствующей нормировке приближенное выражение для моды, которая соответствует собственной частоте $\kappa_p^{+} = (2\pi p/\Delta X)(1 - \varepsilon)$:

$$u(x) \equiv \cos(\kappa_p^{+}x) + \frac{1}{2}\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X\sin(\kappa_p^{+}x). \qquad (16)$$

Воспользуемся второй строкой матрицы в выражении (13) для определения второго собственного вектора. Его компоненты можно выбрать такими:

$$u_0 = \cos(\kappa_p^{\pm}\Delta X) - 1 \approx -\frac{1}{2}(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)^2, \qquad (17)$$

$$y_0 = -\kappa_p^{\pm}[\sin(\kappa_p^{\pm}\Delta X) + S\kappa_p^{\pm}\delta x\cos(\kappa_p^{\pm}\Delta X)]$$

$$\approx -\kappa_{0p}(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)\left\{1 \mp (1 \mp \varepsilon)\left[1 - \frac{1}{2}(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)^2\right]\right\}. \qquad (18)$$

Распределение моды для собственной частоты κ_p^{-} определяется тогда следующим образом:

$$u(x) = u_0\cos(\kappa_p^{-}x) + \frac{1}{\kappa_p^{-}}y_0\sin(\kappa_p^{-}x)$$

$$\approx u_0\cos(\kappa_{0p}x) + \frac{1}{\kappa_{0p}}y_0\sin(\kappa_{0p}x). \qquad (19)$$

Если в формуле (18) взять нижний знак, то получим моду

$$u(x) = -2(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)\left[\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\sin(\kappa_p^{-}x) + \frac{1}{4}(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)\right.$$

$$\left.\times\cos(\kappa_p^{-}x)\right] \equiv \sin(\kappa_p^{-}x) + \frac{1}{4}(\kappa_{0p}\varepsilon\Delta X)\cos(\kappa_p^{-}x). \quad (20)$$

Здесь мода нормирована таким образом, чтобы, как и в (16), коэффициент при первом слагаемом был равен 1.

6. Выводы

При малой внутрирезонаторной неоднородности в виде трех произвольно расположенных тонких диэлектрических пластин спектр собственных частот КОР представляет собой эквидистантную последовательность дуплетов. Центры дуплетов совпадают с собственными частотами однородного (без пластин) резонатора $\kappa_{0p} = 2\pi p/L$. Расщепление в пределах каждого дуплета пропорционально κ_{0p} и зависит от степени неоднородности: $\kappa_p^{-} - \kappa_p^{+} = 2\kappa_{0p}\varepsilon = 2\kappa_{0p}(3S\delta x/L)$. Расщепление не зависит от взаимного расположения тонких пластин и определяется только средней плотностью суммарной неоднородности, равномерно распределенной по периметру резонатора. Эта закономерность сохраняется и в случае произвольного (не равного трем) числа подобных неоднородностей. Моды каждого дуплета близки к вещественным модам, соответствующим двукратно вырожденной собственной частоте однородного исходного КОР. Как видно из выражений (16), (20), в нормированных модах каждого дуплета наряду с основной составляющей (того же типа, что и в однородном резонаторе) присутствует ортогональная ей малая дополнительная стоячая волна. Относительный вклад этих малых составляющих того же порядка, что и расщепление в соответствующем дуплете собственных частот. Свойства мод в интервалах между тонкими неоднородностями также не зависят от взаимного расположения и числа таких неоднородностей.

Альтернативным описанием мод является их представление в виде бегущих волн. В однородном КОР на каждой собственной частоте существуют две моды в виде пары независимых бегущих волн, либо пары ортогональных стоячих волн. Моды неоднородного взаимного КОР могут быть только стоячими волнами, но их всегда можно разложить по бегущим волнам, распространяющимся во встречных направлениях. Однако такие волны независимыми не являются. При использовании лазера с рассмотренным резонатором наблюдались бы волны, распространяющиеся в одном направлении (или встречные волны) и соответствующие одному дуплету собственных частот.

1. Зейгер С.Г., Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Фрадкин Э.Е. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (М.: Наука, 1974, гл. V – IX).
2. Haus H., Statz H., Smith W. *IEEE J. Quantum Electron.,* **2**1 (1), 78 (1985).
3. Скрябин Д.В., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **77** (1), 109 (1994).
4. Судаков В.Ф. *Квантовая электроника*, **35** (12), 1146 (2005).
5. Клочан Е.Л., Корниенко Л.С., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Шелаев А.Н. *ЖЭТФ*, **65** (4), 1344 (1973).
6. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника,* **30** (2), 105 (2000).
7. Беллман Р. *Введение в теорию матриц* (М.: Наука, 1969, гл. X).