

Аналитическое описание гауссова пучка в кольцевом резонаторе с некопланарным осевым контуром и чётным числом зеркал

А.Б.Плаченнов, В.Н.Кудашов, А.М.Радин

Аналитически исследованы условия устойчивости для кольцевого резонатора с чётным числом зеркал и некопланарным осевым контуром. Получены новые явные формулы, описывающие поперечное распределение поля формирующейся в таком резонаторе гауссовой моды со сложным астигматизмом. Проведены расчёты характеристик поля для резонатора с выбранными параметрами.

Ключевые слова: кольцевой резонатор, некопланарный контур, гауссов пучок со сложным астигматизмом.

1. В кольцевых резонаторах с некопланарным осевым контуром (см., напр., [1–11]), обеспечивающих пространственный поворот изображения вокруг оптической оси, формируется основная мода в виде гауссова пучка с астигматизмом общего вида. В этом случае выражение для функции, в нулевом приближении по волновому числу k описывающей (в скалярной постановке задачи, без учёта поляризации) поперечное распределение поля основной моды в некотором сечении резонатора, имеет вид

$$u(r) = c \exp\left(i \frac{kr^t Hr}{2}\right),$$

где

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad r^t = (x \quad y);$$

$$H = \begin{pmatrix} 1/q_x & 1/q_{xy} \\ 1/q_{xy} & 1/q_y \end{pmatrix}$$

– матрица квадратичной формы; c – константа, зависящая от продольной координаты z . Матрица H симметрична и для сосредоточенного в окрестности оси резонатора пучка имеет положительно определённую мнимую часть. Если пучок аксиально симметричен, то матрица H пропорциональна единичной матрице ($q_x = q_y = q$, $1/q_{xy} = 0$), в противном случае говорят, что пучок обладает астигматизмом. Астигматизм называют простым, если в некоторой системе координат матрица H имеет диагональный вид: в этом случае у матриц $\text{Re} H$ и $\text{Im} H$

совпадают направления собственных векторов, т. е. главные оси эллипсов фазы и интенсивности, вдоль которых естественно направить и оси координат. Важно, что при распространении такого пучка вдоль оптической оси матрица H остаётся диагональной для всех значений продольной координаты z . В случае же сложного астигматизма главные оси эллипсов интенсивности и фазы направлены под некоторым углом друг к другу, и никаким выбором координатных осей нельзя одновременно привести $\text{Re} H$ и $\text{Im} H$ к диагональному виду. Кроме того, направления этих осей различны для разных значений z (см., напр., [10–13]), что дало повод именовать такие пучки вращающимися. Если $\omega_{1,2}$ суть полуоси эллипса интенсивности, на границе которого амплитуда поля [7] или плотность энергии пучка, пропорциональная квадрату амплитуды [10], уменьшается в e раз по сравнению с её значением на оси, то собственные числа матрицы $\text{Im} H$ совпадают с $2/(k\omega_{1,2}^2)$ или $1/(k\omega_{1,2}^2)$ соответственно. Мы будем пользоваться первым определением. Собственные числа $\text{Re} H$ имеют смысл главных кривизн волнового фронта пучка и равны $R_{1,2}^{-1}$, где $R_{1,2}$ – главные радиусы кривизны, взятые со знаком «плюс» для расходящегося пучка и со знаком «минус» для сходящегося; в случае гиперболической формы фронта эти числа имеют разные знаки.

Матрица квадратичной формы H удовлетворяет уравнению

$$HBH + HA = DH + C, \quad (1)$$

где A, B, C, D – вещественные (для пассивного резонатора без потерь) матрицы размерностью 2×2 , которые в совокупности составляют лучевую матрицу полного обхода резонатора T (матрицу монодромии [3]) размерностью 4×4 :

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Уравнение (1) вытекает из соотношения [9]

$$H_{\text{out}} = (C + DH_{\text{in}})(A + BH_{\text{in}})^{-1}, \quad (2)$$

описывающего преобразование гауссова пучка при его прохождении через систему, характеризующую матрицей

А.Б.Плаченнов. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 117454 Москва, просп. Вернадского, 78; e-mail: a_plachenov@mail.ru

В.Н.Кудашов. Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, Россия, 191002 С.-Петербург, ул. Ломоносова, 9; e-mail: kdsly@mail.ru

А.М.Радин. Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, Россия, 191002 С.-Петербург, ул. Ломоносова, 9; Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7/9; e-mail: amradin@mail.ru

Поступила в редакцию 22 апреля 2008 г.

T , и из условия восстановления пучка после обхода резонатора: $H_{\text{out}} = H_{\text{in}} = H$. Матрица T является симплектической [3, 9], что эквивалентно выполнению условия

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}.$$

Резонатор устойчив по первому приближению, если все собственные числа матрицы T по модулю равны единице и у них нет присоединённых векторов [1]. В этом случае уравнение (1) имеет симметричное решение с положительной мнимой частью. Традиционно такое решение конструируется с помощью компонент собственных векторов матрицы монодромии (методика базируется на работе В.М.Бабица [14], посвящённой собственным функциям оператора Лапласа, сосредоточенным в окрестности замкнутой геодезической; см. также книгу [3], гл.8). В этих терминах асимптотика задачи о многозеркальном резонаторе в весьма общей постановке (неоднородная среда, произвольная форма зеркал) была получена М.М. Поповым [1] (систематическое изложение результатов представлено в книге [3], гл.9, обобщение на векторный случай – с учётом поляризации – было сделано Т.Ф.Панкратовой [4, 5], резонаторы с селективными элементами, поглощением и усилением рассмотрены в наших работах [15, 16]). И именно этот способ был использован позже в работе [9] для исследования четырёхзеркального резонатора с одним неплоским (сферическим) зеркалом в случае однородной среды.

Следует отметить ещё один подход к решению этой задачи, реализованный в книге [10] и основанный на анализе эволюции гауссова пучка со сложным астигматизмом (методика такого анализа базируется на работе Арно и Когельника [12]; альтернативный подход, разработанный Л.А.Белюсовой, изложен в [13]). К сожалению, при нахождении параметров пучка авторы [10] исходят из ошибочной, как мы убедимся ниже, гипотезы о виде матрицы $\text{Re}H$ в сечении пучка на сферическом зеркале (точнее, эта гипотеза справедлива лишь для резонаторов с нечётным числом зеркал [17]).

Наконец, матричное уравнение (1) (или вытекающая из него система алгебраических уравнений относительно элементов матрицы H) может быть решено численно, с последующим выбором того решения, которое обеспечивает сосредоточенность поля в окрестности оптической оси.

В настоящей работе для задачи о резонаторе с чётным числом зеркал, одно из которых неплоское (например, сферическое), предлагается альтернативное решение, в котором описание поля даётся аналитически, при помощи явных формул. Нам представляется, что такое описание позволяет наиболее наглядно проследить зависимость характеристик светового поля от параметров резонатора. Искать собственные векторы матрицы T при этом не требуется.

2. Рассмотрим многозеркальный кольцевой резонатор с чётным числом зеркал, обеспечивающий пространственный поворот изображения на угол ϕ , который, следуя [10], мы будем именовать углом Берри, хотя применительно к данной задаче этот угол рассматривался задолго до появления знаменитой работы [18], например в статье [2] (в данном контексте уместно упомянуть также имена В.С.Игнатовского, С.М.Рытова, В.В.Владимирского [19]). Длину осевого контура обозначим через

L . Резонатор содержит фокусирующий элемент, в качестве которого может выступать, например, линза или одно из зеркал (сферическое или эллиптическое); остальные зеркала мы считаем плоскими. Распространение вдоль контура описывается матрицей

$$T_L = \begin{pmatrix} E & LE \\ O & E \end{pmatrix},$$

где O и E – нулевая и единичная матрицы размерностью 2×2 , а поворот на угол ϕ – матрицей

$$T_\phi = \begin{pmatrix} U_\phi & O \\ O & U_\phi \end{pmatrix},$$

где

$$U_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

– матрица оператора поворота на угол $+\phi$ (она же описывает преобразование координат при повороте координатных осей на угол $-\phi$). Матрицы T_L и T_ϕ коммутируют между собой. Матрица, описывающая отражение от плоского зеркала, при надлежащем выборе системы координат является единичной; при каждом отражении ориентация системы координат изменяется и, следовательно, изменяется и направление отсчёта углов (против или по часовой стрелке). В настоящей работе мы ограничимся случаем чётного числа зеркал, так что после обхода резонатора ориентация системы координат совпадает с первоначальной.

Прохождение через фокусирующий элемент (квадратичный фазовый корректор [10]) описывается матрицей

$$T_\Psi = \begin{pmatrix} E & O \\ -\Psi & E \end{pmatrix},$$

где Ψ – некоторая симметричная матрица размерностью 2×2 , которую без ограничения общности будем считать диагональной: $\Psi = \text{diag}[\psi_x, \psi_y]$, в противном случае её можно привести к диагональному виду поворотом координатных осей. Для фокусирующей линзы $\psi_{x,y} = 1/f_{x,y}$, где $f_{x,y}$ – фокусные расстояния, для линзы без астигматизма $f_x = f_y = f$. Для эллиптического зеркала, у которого одна из главных осей лежит в плоскости падения (плоскости xz), а другая ей ортогональна (направлена вдоль оси y), $\psi_x = 2(R_x \cos \alpha')^{-1}$, $\psi_y = 2R_y^{-1} \cos \alpha'$, где $\alpha' = \alpha/2$ – угол падения, α – угол между падающим и отражённым осевыми лучами, $R_{x,y}$ – радиусы кривизны. Для сферического зеркала $R_x = R_y = R$; этому случаю в дальнейшем будет уделено особое внимание (в частности резонатору, рассмотренному в работе [9]). Сразу же отметим, что сравнение наших результатов с приведёнными в [9], выявило как совпадения, так и некоторые расхождения.

Матрицы монодромии T_- и T_+ в сечениях пучка, расположенных непосредственно до и после зеркала (линзы), вычисляются по формулам

$$T_- = T_\phi T_L T_\Psi = \begin{pmatrix} U_\phi(E - L\Psi) & LU_\phi \\ -U_\phi\Psi & U_\phi \end{pmatrix},$$

$$T_+ = T_\Psi T_\phi T_L = \begin{pmatrix} U_\phi & LU_\phi \\ -\Psi U_\phi & (E - L\Psi)U_\phi \end{pmatrix}.$$

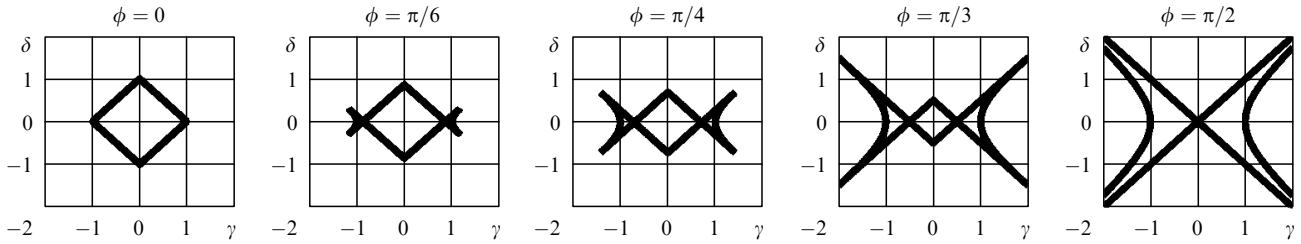


Рис.1. Области устойчивости на плоскости $\gamma\delta$ при различных значениях ϕ .

Характеристические уравнения для собственных чисел таких матриц λ приводятся к виду

$$v^2 - (2\gamma \cos \phi)v + (\gamma^2 - \delta^2 - \sin^2 \phi) = 0, \quad (3)$$

где $v = (\lambda + \lambda^{-1})/2$; $\gamma = 1 - (\psi_x + \psi_y)L/4$; $\delta = (\psi_y - \psi_x) \times L/4$ характеризует астигматизм. Матрица Ψ , выраженная через γ и δ , имеет вид $\Psi = 2L^{-1} \text{diag} [1 - \gamma - \delta, 1 - \gamma + \delta]$.

Достаточные условия устойчивости для матриц T_{\pm} (значения λ лежат внутри единичного круга и различны, значения v лежат в интервале $(-1, 1)$ и также различны) имеют вид [19]

$$|\delta| < ||\gamma| - |\cos \phi||, \quad \delta^2 > (\gamma^2 - 1) \sin^2 \phi, \quad |\gamma| < |\cos \phi|^{-1}. \quad (4)$$

Необходимые условия ($|\lambda| = 1$) получаются заменой в (4) строгих неравенств нестрогими. Интересно отметить, что резонатор с неплоским контуром может оказаться устойчивым даже в тех случаях, когда зеркало имеет цилиндрическую или гиперболическую форму (одно из собственных чисел матрицы Ψ неположительно, т.е. $\gamma + |\delta| \geq 1$).

На рис.1 область (4) приведена в координатах γ, δ при различных значениях ϕ . В случае $\phi = n\pi$ (n – целое число) эта область представляет собой квадрат $|\gamma| + |\delta| < 1$, или $0 < \psi_{x,y}L < 4$. При $0 < |\cos \phi| < 1$ область устойчивости распадается на три подобласти: квадрат $|\gamma| + |\delta| < |\cos \phi|$ (или $2(1 - |\cos \phi|) < \psi_{x,y}L < 2(1 + |\cos \phi|)$) и две фигуры, ограниченные отрезками прямых $|\gamma| - |\delta| = |\cos \phi|$ и дугами гиперболы $\gamma^2 - (\delta/\sin \phi)^2 = 1$, которые касаются прямых в своих крайних точках с координатами $\gamma = \pm |\cos \phi|^{-1}, \delta = \pm \sin^2 \phi |\cos \phi|^{-1}$. При $\phi = \pi/2 + n\pi$ центральный квадрат исчезает, а подобласти, расположенные между прямыми и гиперболами, становятся неограниченными: прямые $\gamma = \pm \delta$ являются уже не касательными к гиперболе $\gamma^2 - \delta^2 = 1$, а её асимптотами.

Случаи кратных значений λ , когда неравенства в (4) превращаются в равенства, требуют отдельного рассмотрения в связи с возможностью появления присоединённых точек условия устойчивости выполняются только на кривых $\gamma = \pm \cos \phi, \delta = 0$, соединяющих подобласти множества (4). Таким образом, с учётом этих точек множество параметров, при которых резонатор устойчив, оказывается связным.

На рис.2 показана область на плоскости $\gamma\delta$, являющаяся объединением областей устойчивости при всевозможных значениях ϕ . На участке $\gamma \in [-1/2, 1/2]$ границы области удовлетворяют уравнению $\delta = \pm(1 - |\gamma|)$ и совпадают с границей центрального квадрата при $\phi = 0$. Далее верхние и нижние границы имеют вид $\delta = \pm |\gamma|$, как при $\phi = \pi/2$. Наконец, при $|\gamma| \geq 1$ область ограничена

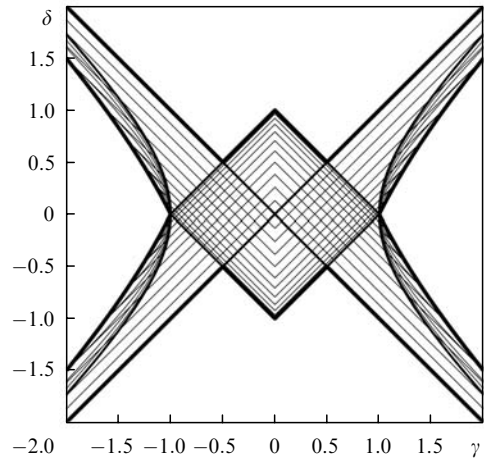


Рис.2. Объединённая область устойчивости на плоскости $\gamma\delta$. Точки этой области при некоторых значениях ϕ отвечают устойчивому резонатору. Тонкие линии – границы областей устойчивости для различных ϕ с шагом 5° .

кривыми $\delta = \pm(\gamma^2 - 1)/|\gamma|$, на которых лежат крайние точки дуг гипербол на рис.1 – точки $\gamma = \pm |\cos \phi|^{-1}, \delta = \pm \sin^2 \phi |\cos \phi|^{-1}$ при всевозможных ϕ .

Сформулируем условия устойчивости относительно $|\cos \phi|$ для различных подмножеств области, показанной на рис.2. Достаточным условием устойчивости для точек, входящих в квадрат $|\gamma| + |\delta| < 1$, является неравенство $|\cos \phi| > |\gamma| + |\delta|$. Для точек, расположенных между биссектрисами координатных углов и ветвями гиперболы $\gamma^2 - \delta^2 = 1$ и удовлетворяющих неравенствам $|\delta| < |\gamma| < (1 + \delta^2)^{1/2}$, достаточным условием устойчивости является неравенство $|\cos \phi| < |\gamma| - |\delta|$. Для точек, входящих лишь в одно из указанных множеств, эти условия являются и необходимыми. В общей же части этих множеств, состоящей из двух квадратов и удовлетворяющей неравенствам $|\delta| < |\gamma| < 1 - |\delta|$, для устойчивости необходимо и достаточно выполнения любого из этих неравенств, а для отрезка $|\gamma| < 1, \delta = 0$ в силу сделанного выше замечания о граничных точках устойчивость имеет место при любом ϕ , в том числе при $|\cos \phi| = |\gamma|$. Наконец, в области, лежащей между гиперболами и удовлетворяющей неравенствам $(\gamma^2 - 1)/|\gamma| < |\delta| \leq (\gamma^2 - 1)^{1/2}$, условие устойчивости имеет вид $[\delta^2/(\gamma^2 - 1) - 1]^{1/2} < |\cos \phi| < |\gamma| - |\delta|$. Отметим, что условие $|\cos \phi| < |\gamma|^{-1}$ специально проверять не нужно, поскольку в рассматриваемой области $|\gamma| - |\delta| < |\gamma|^{-1}$ (фактически это условие вошло в уравнение границы $|\delta| = (\gamma^2 - 1)/|\gamma|$).

В пространстве трёх переменных (ϕ, γ, δ) область (4) симметрична относительно плоскостей $\phi = n\pi/2, \gamma = 0, \delta = 0$, относительно точек $(n\pi/2, 0, 0)$ и периодична по ϕ с периодом π . Общий вид области (4) для $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ приведён на рис.3 (уходящие на бесконечность ветви об-

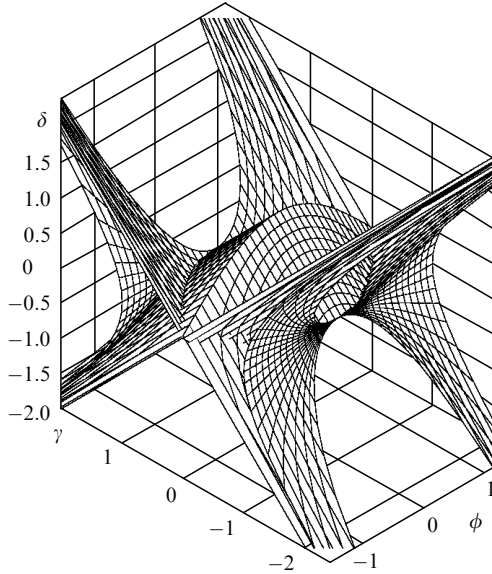


Рис.3. Область устойчивости в пространстве параметров ϕ, γ, δ при $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Вдоль оси ϕ фигура воспроизводится периодически.

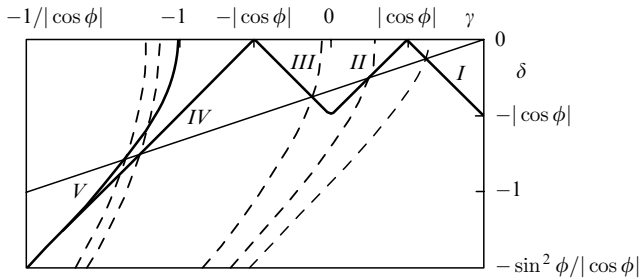


Рис.4. Область устойчивости на плоскости $\gamma\delta$ для резонатора со сферическим зеркалом. Прямая $\alpha = \text{const}$ (тонкая сплошная линия) пересекает все три подобласти, гиперболы $R = \text{const}$ (штриховые кривые) проходят через точки пересечения этой прямой с границами области устойчивости $L/R = (1 - |\cos \phi|) \cos \alpha'$ (I), $(1 - |\cos \phi|) \times (\cos \alpha')^{-1}$ (II), $(1 + |\cos \phi|) \cos \alpha'$ (III), $(1 + |\cos \phi|) / \cos \alpha'$ (IV) и $4 \cos \alpha' (1 + \cos^2 \alpha') \sin^2 \phi / [4 \cos^2 \alpha' - \cos^2 \phi (1 + \cos 2\alpha')^2]$.

резаны). На рис.1 представлены сечения этой фигуры при различных ϕ , а на рис.2 показана её проекция на плоскость $\gamma\delta$.

Подчеркнём, что всё это справедливо, если число зеркал чётное. В случае резонатора с нечётным числом зеркал из условий устойчивости вытекает совершенно иная, нежели (4), система неравенств, так что геометрия области устойчивости в этом случае не имеет ничего общего с тем, что изображено на рис.1–3.

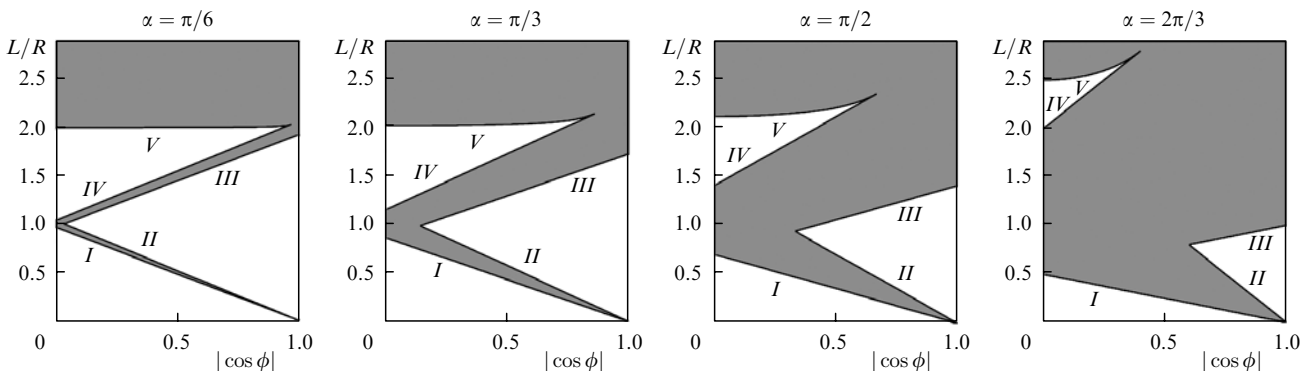


Рис.5. Области устойчивости (светлые) и неустойчивости (темные) при различных углах α . Уравнения для границ I–V – те же, что и для рис.4.

3. Условия устойчивости для случая, когда фокусирующим элементом является сферическое зеркало, были приведены в работе [8] в неявном виде – как условия для коэффициентов некоторого квадратного уравнения, аналогичного (3), при которых корни лежат в заданном промежутке. Мы полагаем, что будет небесполезно выписать и явные формулы. (В [6] такие формулы получены лишь для $\phi = \pi/2$, а формулы, приведенные в [5], неверны из-за ошибочного расположения одного из косинусов в матрице отражения от сферического зеркала.) Для рассматриваемого случая $\gamma = 1 - (\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha') \times L/(2R)$, $\delta = (\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha') L/(2R)$. Из этих равенств видно, что данному случаю соответствует на плоскости $\gamma\delta$ сектор $\gamma < 1, \gamma - 1 < \delta < 0$; во всех прочих точках, входящих в область устойчивости, требуется использование зеркала эллиптической, цилиндрической или гиперболической формы (либо линзы).

Кривыми, объединяющими точки с одинаковыми R при всевозможных углах падения, являются дуги гипербол $\delta = -[(1 - \gamma)^2 - (L/R)^2]^{1/2}$, а линии, отвечающие фиксированному углу падения при различных R – это лучи $\delta = (\gamma - 1) \sin^2 \alpha' / (1 + \cos^2 \alpha')$ (при $\gamma < 1$). Эти лучи при любых значениях α и ϕ пересекают правую подобласть области устойчивости; получающемуся отрезку соответствуют значения $L/R < (1 - |\cos \phi|) \cos \alpha'$. Если $\sin^2 \alpha' \times (1 + \cos^2 \alpha')^{-1} < |\cos \phi|$, луч пересекает центральную подобласть при

$$(1 - |\cos \phi|) / \cos \alpha' < L/R < (1 + |\cos \phi|) \cos \alpha'.$$

Наконец, если $\sin^2 \alpha' / (1 + \cos^2 \alpha') < 1 - |\cos \phi|$, луч пересекает левую подобласть при

$$(1 + |\cos \phi|) / \cos \alpha' < L/R < 4 \cos \alpha' (1 + \cos^2 \alpha') \sin^2 \phi \times [4 \cos^2 \alpha' - \cos^2 \phi (1 + \cos^2 \alpha')^2]^{-1}.$$

Таким образом, в зависимости от значений α и ϕ , существует от одного до трёх интервалов значений R , в которых резонатор оказывается устойчивым. Наклонный луч на рис.4 отвечает как раз последнему случаю; на рис.5 ему соответствуют такие значения α и ϕ , для которых вертикальные прямые пересекают сразу три подобласти области устойчивости.

4. Рассмотрим подробнее четырёхзвенный резонатор, описанный в работе [9]. Схема его лучевого контура, проходящего вдоль рёбер тетраэдра ABCD, приведена на рис.6. Контур лежит в плоскостях ABD и BCD, угол между которыми равен β . Треугольники DAB и BCD равнобедренные, α – угол между рёбрами AB и AD, $\alpha' = \alpha/2$ – угол между ребром AB и высотой AE. В точке A

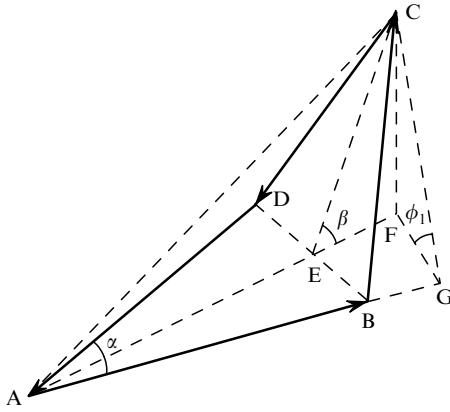


Рис.6. Схема лучевого контура резонатора. Стрелками показано направление обхода.

расположено сферическое зеркало радиусом R , в точках B, C, D – плоские зеркала.

Длина контура $L = 2(L_1 + L_2)$, где $L_1 = |AB| = |AD|$, $L_2 = |BC| = |CD|$. Пусть $h_1 = |AE|$ и $h_2 = |CE|$ – высоты треугольников ABD и BCE , тогда $L_1 = h_1 / \cos \alpha'$, $|BE| = h_1 \tan \alpha'$, и $L_2 = (h_1^2 \tan^2 \alpha' + h_2^2)^{1/2}$. В частности, для рассмотренного в [9] резонатора с $h_1 = 3$ мм, $h_2 = 2$ мм, $\alpha = \pi/3$, $R = 50$ мм (монолитный неплюсовой кольцевой резонатор на кристалле ИАГ:Nd) длина $L = 2(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$ мм ≈ 12.22 мм, а $L/R \approx 0.2444$ (в этом случае $\gamma \approx 0.7531$, $\delta \approx -0.0353$). Из рис.5 видно, что при таком значении ординаты область устойчивости охватывает все значения $|\cos \phi|$, за исключением небольшого промежутка между прямыми I и II . Тогда условие устойчивости принимает вид $|\cos \phi| \notin (1 - L/(R \cos \alpha'), 1 - (L \cos \alpha')/R)$, что для выбранных параметров даёт $|\cos \phi| \notin (0.7178, 0.7883)$ (границы промежутка неустойчивости совпадают с $\gamma + \delta$, $\gamma - \delta$).

Свяжем угол Берри ϕ с геометрическими характеристиками резонатора. Пусть H_+ – матрица, отвечающая сечению, расположенному в точке A непосредственно после зеркала. Координатная ось z направлена вдоль ребра AB , ось x лежит в плоскости треугольника ABD и направлена вовне его, ось y направлена ортогонально этой плоскости; направляющие векторы образуют правую тройку. Матрица $H(z)$, характеризующая поперечное распределение поля в сечении, находящемся на расстоянии z от точки A , связана с матрицей H_+ соотношением (2), в котором $A = D = E$, $B = zE$, $C = O$:

$$H(z) = H_+(E + zH_+)^{-1}. \quad (5)$$

(Отметим, что зависимость поля от продольной координаты определяется также множителем c , выражение для которого в j -м плече резонатора имеет в нулевом приближении вид $c(z) = c_j [\det H(z)]^{1/2} \exp(ikz)$, а связь между константами c_j определяется граничными условиями на зеркалах.)

Для перехода в систему координат, связанную с плоскостью ABC , следует сделать поворот координатной системы вокруг оси z по часовой стрелке на угол $\phi(|AB|)$ – угол между плоскостями ABD и ABC . Матрица квадратичной формы в новой системе будет иметь вид $U_{\phi(|AB|)} \times H(z) U_{-\phi(|AB|)}$. Отражение от плоского зеркала в точке B не повлияет на вид матрицы H , но изменит ориентацию системы координат: ось x окажется направлена внутрь

треугольника ABC . Следующее преобразование – переход в систему координат, связанную с плоскостью BCE . Для этого необходимо сделать поворот относительно новой оси z , направленной вдоль ребра BC , на угол $\phi(|BC|)$ – угол между плоскостями ABC и BCE . Направление поворота теперь будет против часовой стрелки, однако поскольку направляющие векторы после отражения образуют уже левую тройку, знак угла будет таким же, как и при первом повороте. В результате матрица квадратичной формы примет вид $U_{\phi(|AB|)+\phi(|BC|)} H(z) \times U_{-\phi(|AB|)-\phi(|BC|)}$ и останется такой же после отражения от плоского зеркала в точке C (ориентация системы координат при этом снова изменится). Продолжая рассуждения, мы придём к выводу, что в системах координат, связанных с плоскостью ACD (ребра CD и DA), матрица имеет вид

$$U_{\phi(|AB|)+\phi(|BC|)+\phi(|CD|)} H(z) U_{-\phi(|AB|)-\phi(|BC|)-\phi(|CD|)},$$

а в системе, связанной с плоскостью ABD (ребро DA), – вид

$$U_{\phi(|AB|)+\phi(|BC|)+\phi(|CD|)+\phi(|DA|)} H(z) \times U_{-\phi(|AB|)-\phi(|BC|)-\phi(|CD|)-\phi(|DA|)},$$

где $\phi(|CD|)$ – угол между плоскостями BCE и ACD , а $\phi(|DA|)$ – между плоскостями ACD и ABD . Полагая $z = L$, получаем

$$H_- = U_{\phi} H(L) U_{-\phi}, \quad (6)$$

где H_- – матрица квадратичной формы в сечении пучка, расположенном в точке A непосредственно перед зеркалом, а

$$\phi = \phi(|AB|) + \phi(|BC|) + \phi(|CD|) + \phi(|DA|) \quad (7)$$

– угол поворота изображения при полном обходе резонатора. Матрицы H_{\pm} связаны равенством $H_+ = H_- \Psi$.

Во избежание недоразумений подчеркнём, что все углы в правой части (7) положительны (в таком же виде аналогичная формула фигурирует, например, в [10]). Столь простой вид эта формула приняла вследствие одновременного чередования ориентаций систем координат и направлений поворотов. Альтернативный способ записи (и единственно возможный для более сложных конфигураций) содержит знакоперевающуюся алгебраическую сумму углов между плоскостями падения на последовательно расположенные зеркала, где знак слагаемых следует брать с учётом направления поворота (см., напр., [2, 5, 6]).

Теперь остаётся выписать формулы, связывающие углы $\phi(|AB|) = \phi(|DA|) = \phi_1$ и $\phi(|BC|) = \phi(|CD|) = \phi_2$ с геометрическими характеристиками контура. Опустим из точки C на плоскость ABD перпендикуляр CF , при этом $|CF| = h_2 \sin \beta$, $|AF| = h_1 + h_2 \cos \beta$. Из точки F , в свою очередь, опустим перпендикуляр FG на отрезок AB или его продолжение, при этом $|FG| = |AF| \sin \alpha'$. Плоскость FGC ортогональна AB , поскольку AB ортогонален CF и FG , и, следовательно, угол FGC совпадает с углом

$$\phi_1 = \arctan \frac{h_2 \sin \beta}{(h_1 + h_2 \cos \beta) \sin \alpha'}.$$

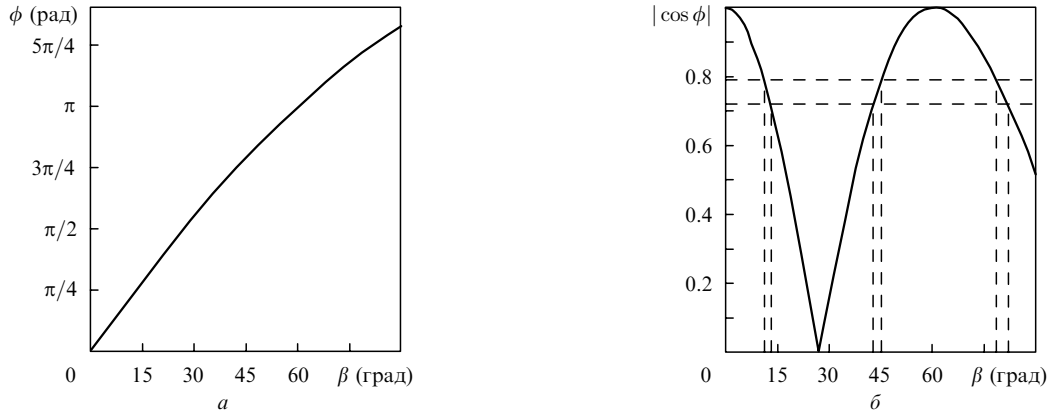


Рис.7. Зависимости угла поворота изображения ϕ (а) и $|\cos \phi|$ (б) от угла между плоскостями β при $\alpha = \pi/3$, $h_1 = 3$ мм, $h_2 = 2$ мм (параметры взяты из работы [9]). На рис.7,б горизонтальные пунктирные линии – границы промежутка неустойчивости для $|\cos \phi|$ ($|\cos \phi| \in (0.718, 0.788)$), а вертикальные – соответствующие границы для β ($\beta = 11^\circ 8' - 12^\circ 58'$, $42^\circ 51' - 45^\circ 9'$ и $78^\circ 28' - 81^\circ 42'$) при $R = 50$ мм.

Выражение для ϕ_2 получается аналогично, следует лишь поменять местами h_1 и h_2 и заменить α' углом ВСЕ, равным $\arctan[(h_1/h_2) \tan \alpha']$. В результате мы получаем

$$\phi_2 = \arctan \frac{(h_1^2 + h_2^2 \cot^2 \alpha')^{1/2} \sin \beta}{h_1 \cos \beta + h_2},$$

и
$$\phi = 2(\phi_1 + \phi_2).$$

При убывании β углы $\phi_{1,2}$ также убывают и обращаются в нуль одновременно с β . Если же убывает α , то углы $\phi_{1,2}$ растут и стремятся к $\pi/2$ при стремлении α к нулю. В случае, когда углы α и β близки к нулю одновременно, углы $\phi_{1,2}$ в нулевом приближении совпадают и равны $\arctan[2h_2\beta/(h_1 + h_2)\alpha]$. Результаты вычислений для резонатора с выбранными параметрами представлены на рис.7.

Используя формулы данного и предыдущего пунктов, можно построить области устойчивости и неустойчивости для этого резонатора в координатах $\beta, f = R/2$. Сравнивая рис.8, на котором приведены результаты наших вычислений, и аналогичный ему рис.2 из работы [9], можно убедиться в том, что при совпадении формы областей в общем в нашем случае эти области более растянуты вдоль оси β , и, следовательно, расположение промежутков неустойчивости у нас иное, нежели в [9]. Можно

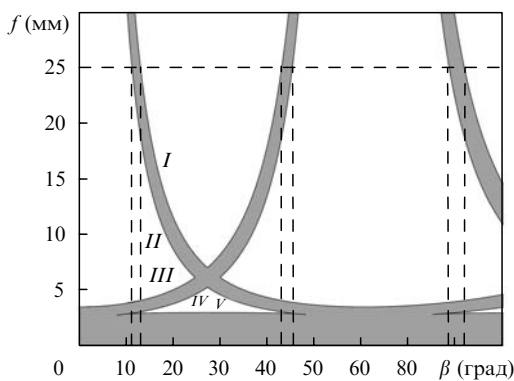


Рис.8. Области устойчивости (светлые) и неустойчивости (темные) в координатах β, f для резонатора с параметрами $\alpha = \pi/3$, $h_1 = 3$ мм, $h_2 = 2$ мм. Пунктирные линии – границы промежутков неустойчивости для $f = 25$ мм, кривые I–V – граничные кривые, соответствующие кривым на рис.4 и 5.

предположить, что зависимость $\phi(\beta)$, использованная при расчётах в [9], отличалась от приведённой на рис.7.

5. Вернёмся теперь к общему случаю и выпишем выражения для матриц H_{\mp} , отвечающих сечениям, расположенным непосредственно до и после фокусирующего элемента:

$$H_{\mp} = H_0 \pm \frac{\Psi}{2}, \tag{8}$$

где H_0 – комплексная симметричная матрица, соответствующая эквивалентному резонатору [7], у которого криволинейное зеркало заменено плоским зеркалом с прилегающей к нему астигматической линзой. Мнимая часть этой матрицы – диагональная матрица

$$\text{Im} H_0 = \frac{t}{4L\gamma\delta|\cos \phi|} \times \text{diag}[(\gamma + \delta)^2 - \cos^2 \phi + d, -(\gamma - \delta)^2 + \cos^2 \phi - d], \tag{9}$$

а вещественная часть – матрица

$$\text{Re} H_0 = \frac{(\gamma^2 - \delta^2 - \cos^2 \phi + d) \tan \phi}{2L\delta} \sigma \equiv K\sigma. \tag{10}$$

Здесь

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

величины d и t определяются равенствами

$$d = \{[(\gamma + \delta)^2 - \cos^2 \phi][(\gamma - \delta)^2 - \cos^2 \phi]\}^{1/2} \times \text{sign}(|\cos \phi| - |\gamma|), \tag{11}$$

$$t = [2(\gamma^2 - 2\gamma^2 \cos^2 \phi + \cos^2 \phi - \delta^2 + d)]^{1/2}. \tag{12}$$

Величина d обращается в нуль на поверхности $|\delta| = |\gamma| - |\cos \phi|$, а t – на поверхности $\delta^2 = (\gamma^2 - 1) \sin^2 \phi$, на кривых $\gamma = 0$, $|\delta| = |\cos \phi|$, а также при $\cos \phi = 0$.

Собственные векторы матрицы $\text{Im} H_0$ направлены вдоль координатных осей, её собственные числа (диагональные элементы) равны $2/(k\omega_{x,y}^2)$, где $\omega_{x,y}$ – полуоси эллипса интенсивности; при стремлении собственного

числа к нулю поперечный размер пучка вдоль соответствующей оси неограниченно возрастает. Собственные векторы матрицы $\text{Re } H_0$ направлены вдоль биссектрис координатных углов, собственные числа имеют разные знаки и по модулю совпадают с коэффициентом K при σ в выражении (10).

Матрицы H_+ и H_- удовлетворяют уравнению (1), где A, B, C, D суть блоки матриц T_+ и T_- соответственно, а их мнимая часть, совпадающая с $\text{Im } H_0$, положительно определена. Собственные числа $\text{Im } H_0$ – диагональные элементы этой матрицы – положительны в области (4). Одно из них обращается в нуль на граничной поверхности $|\gamma + \delta| = |\cos \phi|$, а другое – на поверхности $|\gamma - \delta| = |\cos \phi|$; при $\delta^2 = (\gamma^2 - 1)\sin^2 \phi$ матрица $\text{Im } H_0$ обращается в нулевую матрицу (случай $\gamma\delta \cos \phi = 0$ требует специального рассмотрения). Как показывает анализ, все элементы матриц $\text{Re } H_0$ и $\text{Im } H_0$ резко меняются при приближении к границам (4).

Здесь мы не приводим вывода формул (9)–(12). Способ, позволяющий в явном виде получать решения уравнений вида (1) (проще всего рассмотреть уравнение относительно H_0), подробно изложен в нашей работе [20] (см. также [21]), где получено и выражение для матрицы H в сечении пучка, лежащем на расстоянии $L/2$ от зеркала.

Остановимся вкратце на концепции «эквивалентного» линейного резонатора, согласно которой поле фундаментальной моды кольцевого резонатора имеет такое же распределение, как и у линейного резонатора с расположенными на расстоянии L друг от друга двумя одинаковыми эллиптическими зеркалами, главные радиусы которых совпадают с эффективными радиусами сферического зеркала, а главные оси кривизны одного зеркала развёрнуты на угол Берри относительно осей кривизны другого. Именно на этой концепции (явно не сформулированной, а принимаемой за нечто самоочевидное) основан предложенный в [10] алгоритм решения рассматриваемой задачи: утверждается, что главные оси кривизны волнового фронта при распространении вдоль контура резонатора поворачиваются на угол Берри (и, следовательно, на сферическом зеркале эти оси должны, очевидно, совпасть между собой, а также с осями координат) и что в сечении пучка на сферическом зеркале главные радиусы кривизны пучка совпадают с половинами эффективных радиусов кривизны этого зеркала. Оказывается, однако, что в кольцевом резонаторе с осями координат совпадают главные оси эллипса интенсивности, а не эллипса фазы, как в линейном: матрица $\text{Im } H_{\pm} = \text{Im } H_0$ диагональна, в отличие от матриц $\text{Re } H_{\pm}$. Исключение составляют рассмотренные в [6] простейшие случаи $\phi = n\pi/2$, когда, согласно (10) и (14) (см. ниже), $\text{Re } H_0 = O$, и $\text{Re } H_{\mp} = \pm\Psi/2$. Тогда матрицы H_{\pm} диагональны, и в резонаторе формируется пучок с простым астигматизмом, без вращения осей амплитудного и фазового распределения.

Подчеркнём, что сказанное относится исключительно к резонаторам с чётным числом зеркал: можно показать, что в случае нечётного числа зеркал эквивалентность кольцевого и линейного резонаторов действительно имеет место. В «эквивалентном» линейном резонаторе оси эллипса интенсивности на эллиптических зеркалах образуют с главными осями кривизны углы, равные по модулю, но противоположные по знаку, что, собственно, и приводит при чётном числе зеркал к нарушению эквивалентности, если только эти углы не кратны $\pi/2$.

мому: матрицы $\text{Im } H_{\pm}$ для пучка в таком резонаторе не будут совпадать между собой. Если же число зеркал нечётное, то указанное различие в знаке будет скомпенсировано за счёт изменения ориентации координатной системы при полном обходе рассматриваемого резонатора. Эти рассуждения подтверждаются и явными формулами, аналогичными (9)–(12), согласно которым при нечётном числе зеркал $\text{Re } H_0 = O$, а матрица $\text{Im } H_0$ не диагональна; в дальнейшем мы намерены посвятить такому исследованию специальную работу.

6. Формулы (9), (10) не применимы при значениях параметров, обращающих в нуль знаменатель. Для того чтобы описать поведение матриц при γ и δ , близких к нулю, преобразуем элементы этих матриц, домножив числители и знаменатели на сопряжённые выражения. Тогда мы приходим к формулам

$$\text{Im } H_0 = \frac{t}{L|\cos \phi|} \times \text{diag} \left[\frac{(\gamma + \delta)^2 - \cos^2 \phi}{(\gamma + \delta)^2 - \cos^2 \phi - d}, \frac{-(\gamma - \delta)^2 + \cos^2 \phi}{-(\gamma - \delta)^2 + \cos^2 \phi + d} \right], \quad (13)$$

$$\text{Re } H_0 = \frac{2\delta \sin \phi \cos \phi}{L(\gamma^2 - \delta^2 - \cos^2 \phi - d)} \sigma. \quad (14)$$

Из них при $\gamma = 0$ получим

$$H_0(\gamma = 0) = \frac{1}{L} \left[i \frac{(\cos^2 \phi - \delta^2)^{1/2}}{|\cos \phi|} E - \delta \sigma \tan \phi \right], \quad (15)$$

$$d(\gamma = 0) = \cos^2 \phi - \delta^2, \quad t(\gamma = 0) = 2(\cos^2 \phi - \delta^2)^{1/2}$$

при $\delta = 0$ –

$$H_0(\delta = 0) = i \frac{(1 - \gamma^2)^{1/2}}{L} E, \quad (16)$$

$$d(\delta = 0) = \cos^2 \phi - \gamma^2, \quad t(\delta = 0) = 2|\cos \phi|(1 - \gamma^2)^{1/2}$$

и при $\gamma = 0, \delta = 0$ –

$$H_0(\gamma = \delta = 0) = iL^{-1}E, \quad (17)$$

$$d(\gamma = \delta = 0) = \cos^2 \phi, \quad t(\gamma = \delta = 0) = 2|\cos \phi|.$$

Из (15), (16) видно, что в точках $\gamma = 0, |\delta| = |\cos \phi|$ и $\delta = 0, |\gamma| = 1$, лежащих на границе области устойчивости, $\text{Im } H_0$ обращается в нулевую матрицу.

7. При $\delta = 0$ решение оказывается аксиально симметричным, не зависящим от ϕ ; астигматизм отсутствует. Есть, однако, особый случай $|\gamma| = |\cos \phi|$ (точки на стыке подобластей), когда это решение не единственно. Это связано с тем, что в данных точках матрицы T_{\pm} обладают кратными собственными числами ($+1$ при $\gamma = \cos \phi$ и -1 при $\gamma = -\cos \phi$), причём соответствующие собственные подпространства не являются знакоопределёнными [22]. Искомые семейства решений имеют вид

$$H_0(\delta = 0, \gamma = \pm \cos \phi) = L^{-1} \{ i |\sin \phi| \text{diag} [1 + \zeta, 1 - \zeta] \pm \zeta \sigma \sin \phi \}, \quad (18)$$

где ζ – комплексный параметр ($|\zeta| < 1$). Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H_0(\delta = 0, \gamma = \pm \cos \phi) \\ = L^{-1} \{ |\sin \phi| \operatorname{diag} [1 + \operatorname{Re} \zeta, 1 - \operatorname{Re} \zeta] \pm \sigma \sin \phi \operatorname{Im} \zeta \}, \\ \operatorname{Re} H_0(\delta = 0, \gamma = \pm \cos \phi) \\ = L^{-1} \{ |\sin \phi| \operatorname{diag} [-\operatorname{Im} \zeta, \operatorname{Im} \zeta] \pm \sigma \sin \phi \operatorname{Re} \zeta \}. \end{aligned}$$

Отметим связь семейств (18) с поведением матрицы (9), (10) в окрестности рассматриваемых точек. Пусть $\gamma = \pm \cos \phi + \varepsilon \gamma'$, $\delta = \varepsilon \delta'$, причём $|\delta'| < |\gamma'|$. Если устремить значение ε к нулю, то в пределе мы получим матрицу вида (18) с $\zeta = \delta' / [\gamma' + (\gamma'^2 - \delta'^2)^{1/2} \operatorname{sign} \gamma']$. Таким образом мы, однако, можем получить не всё семейство (18), а лишь его подсемейство с вещественными ζ .

8. Рассмотрим теперь поведение матрицы H_0 , когда $\cos \phi$ близок к нулю. Точнее говоря, в специальном исследовании нуждается поведение $\operatorname{Im} H_0$, поскольку матрица $\operatorname{Re} H_0$, как видно из (14), приводится к нужному виду домножением на сопряжённое выражение; при $\cos \phi = 0$ матрица $\operatorname{Re} H_0$ обращается в нулевую. Что же касается $\operatorname{Im} H_0$, то здесь необходимо таким же способом преобразовать формулу (12):

$$t = 2\sqrt{2} |\gamma| |\cos \phi| \left[\frac{(1 - \gamma^2) \sin^2 \phi + \delta^2}{\gamma^2 - 2\gamma^2 \cos^2 \phi + \cos^2 \phi - \delta^2 - d} \right]^{1/2},$$

что приводит к сокращению $|\cos \phi|$ в числителе и знаменателе формулы (9) или (13). Поскольку

$$\begin{aligned} d(\cos \phi = 0) &= -\gamma^2 + \delta^2, \quad t |\cos \phi|^{-1} (\cos \phi = 0) \\ &= 2|\gamma| \left(\frac{1 - \gamma^2 + \delta^2}{\gamma^2 - \delta^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

получаем, что H_0 при $\cos \phi = 0$ – чисто мнимая матрица:

$$\begin{aligned} H_0(\cos \phi = 0) &= iL^{-1} (1 - \gamma^2 + \delta^2)^{1/2} \\ &\times \operatorname{diag} \left[\left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta} \right)^{1/2}, \left(\frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

а $H_{\pm} = H_0 \mp \Psi/2$ суть диагональные матрицы.

Из (19) видно, что на граничных прямых $\delta = \pm \gamma$ одно из собственных чисел матрицы H_0 обращается в нуль, другое – в мнимую бесконечность, а на гиперболе $\gamma^2 - \delta^2 = 1$ матрица H_0 обращается в нулевую. Это значит, что при больших $|\gamma|$ матрица H_0 очень быстро меняется в промежутках между гиперболой и её асимптотами.

9. Отдельно рассмотрим случай $\delta = \gamma = \cos \phi = 0$, когда матричные элементы в (9), (10) не определены, а даваемое (17) решение $H_0 = iL^{-1}E$ оказывается не единственным. В этой точке матрицы T_{\pm} обладают двумя кратными собственными числами (+1 и -1), причём соответствующие собственные подпространства не являются знакоопределёнными [22]. В связи с этим искомое семейство решений определяется уже не одним, а двумя комплексными параметрами $\zeta_{1,2}$ и может быть записано, например, в виде

$$H_0(\delta = \gamma = \cos \phi = 0) = \frac{2i \operatorname{diag}[\zeta_1, \zeta_2] + (1 - \zeta_1 \zeta_2)\sigma}{(1 + \zeta_1 \zeta_2)L}, \quad (20)$$

причём $\operatorname{Re} \zeta_{1,2} > 0$. Фактически это семейство включает в себя все симметричные матрицы с положительно определённой мнимой частью и определителем, равным $-L^{-2}$. Выражения для $\operatorname{Re} H_0$ и $\operatorname{Im} H_0$ мы не выписываем ввиду их громоздкости при комплексных $\zeta_{1,2}$ с ненулевой мнимой частью.

Представляет интерес анализ поведения матрицы H_0 в окрестности рассматриваемой точки. Пусть $\gamma = \varepsilon \gamma'$, $\delta = \varepsilon \delta'$, $\cos \phi = \varepsilon c$, причём $|\delta'| < |\gamma'| - |c|$. Если устремить ε к нулю, то в пределе мы получим матрицу

$$\begin{aligned} H_0(\varepsilon \rightarrow 0) \\ = \frac{it' \operatorname{diag}[(\gamma' + \delta')^2 - c^2 + d', -(\gamma' - \delta')^2 + c^2 - d']}{4L\gamma'\delta'|c|} \\ \pm \frac{\gamma'^2 - \delta'^2 - c^2 + d'}{2Lc\delta'} \sigma, \end{aligned} \quad (21)$$

где знак при $\operatorname{Re} H_0$ совпадает со знаком $\sin \phi$;

$$d' = \{ [(\gamma' + \delta')^2 - c^2][(\gamma' - \delta')^2 - c^2] \}^{1/2} \operatorname{sign}(|c| - |\gamma'|);$$

$$t' = [2(\gamma'^2 + c^2 - \delta'^2 + d')]^{1/2}.$$

В тех случаях, когда γ' , δ' или c обращаются в нуль, следует снова домножить на сопряжённые выражения числители и знаменатели дробей в (21) либо соответствующим образом преобразовать выражение для t' , выделив из него множитель c . При этом, если $\delta' = 0$, $|\gamma'| = |c|$, снова возникает неоднозначность в определении матрицы H_0 . Все эти преобразования абсолютно аналогичны описанным ранее для общего случая, и повторять их здесь мы не будем.

Матрицы семейства (21) могут быть представлены в виде (20), где

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{t'[\delta'^2 - (\gamma' \pm c)^2 + d']}{4\gamma'|c|(\delta' - \gamma' \mp c)}, \\ \zeta_2 &= \frac{t'[\delta'^2 - (\gamma' \mp c)^2 + d']}{4\gamma'|c|(\delta' + \gamma' \mp c)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество (20) заведомо шире этого семейства, в котором значения $\zeta_{1,2}$ могут быть только вещественными.

10. Упомянем ещё один частный случай, когда $\phi = \pi$, $\sin \phi = 0$, $\cos \phi = \pm 1$. В этом случае $d = h_1 h_2$, $t = h_1 + h_2$, $H_0 = iL^{-1} \operatorname{diag}[h_1, h_2]$, где $h_{1,2} = [1 - (\gamma \pm \delta)^2]^{1/2} = [1 - (L \times \psi_{1,2}/2)^2]^{1/2}$; как и при $\cos \phi = 0$, матрицы $H_{\pm} = H_0 \mp \Psi/2$ являются диагональными. Это случай простого астигматизма (при $\delta \neq 0$), когда блоки матрицы монодромии суть диагональные матрицы и пучок может быть описан с помощью двух независимых $ABCD$ -матриц размерностью 2×2 . При $\delta = 0$ пучок аксиально симметричен, причём, несмотря на появление кратных собственных чисел, решение остаётся единственным (в отличие от случая с нечётным числом зеркал [22]).

11. Вернёмся к случаю, когда отражающее зеркало является сферическим. На рис.9 представлены зависимости диагональных элементов безразмерной матрицы $L \operatorname{Im} H_0$ от L/R при постоянных ϕ и α для рассмотренного выше случая, когда прямая $\alpha = \operatorname{const}$ на рис.4 пересекает все три подобласти области устойчивости. На рис.10 для

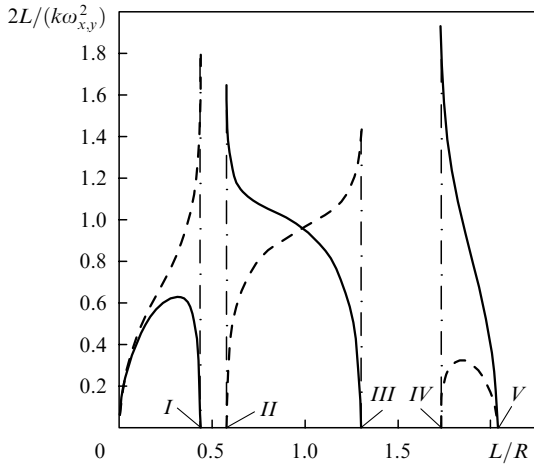


Рис.9. Зависимости собственных чисел матрицы $L\text{Im} H_0$ от L/R ($\alpha = \pi/3$, $\phi = \pi/3$). Сплошные кривые – расчёт вдоль оси x , штриховые – вдоль оси y . Цифрами $I-V$ указаны значения L/R , соответствующие формулам, приведённым в подписи к рис.4.

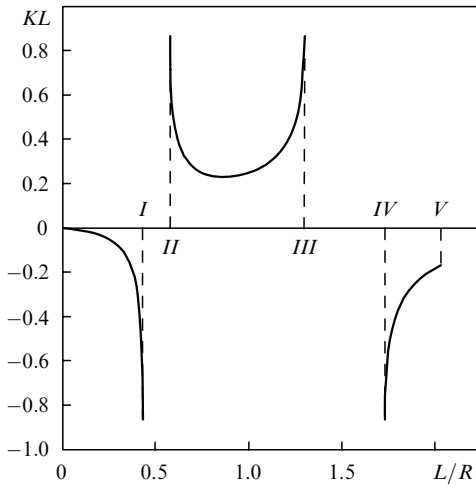


Рис.10. Зависимость величины KL от L/R при $\alpha = \pi/3$, $\phi = \pi/3$. Цифрами $I-V$ указаны значения L/R , соответствующие формулам, приведённым в подписи к рис.4.

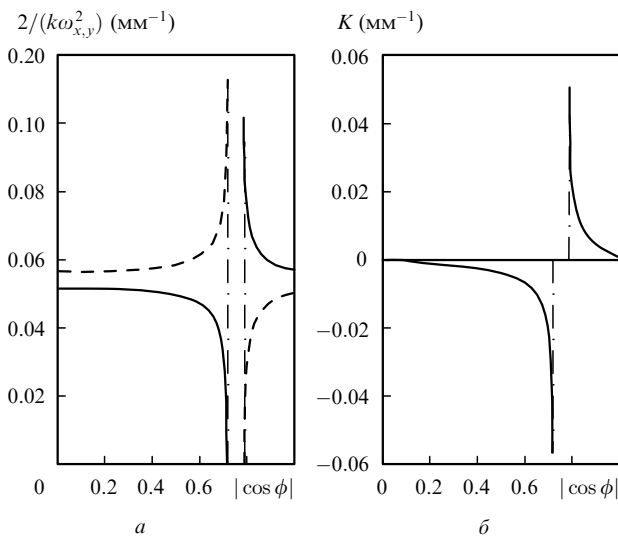


Рис.11. Зависимости собственных чисел матрицы $\text{Im} H_0$ (а) и коэффициента K (б) от $|\cos \phi|$ при $R = 50$ мм, $L \approx 12.22$ мм, $\alpha = \pi/3$ ($\gamma \approx 0.7531$, $\delta \approx -0.0353$). В случае $\tan \phi < 0$ рис.11,б следует зеркально отразить относительно оси абсцисс.

тех же условий представлена зависимость от L/R величины KL , где K – коэффициент пропорциональности при матрице σ в выражении (10). На рис.11 приведены зависимости аналогичных характеристик матрицы H_0 (размерной) от $|\cos \phi|$ для резонатора, рассмотренного в [9]. Согласно нашим расчётам, при приближении к верхней и нижней границам области неустойчивости в нуль обращаются разные собственные числа матрицы $\text{Im} H_0$, что приводит к неограниченному увеличению размеров пучка в одном случае вдоль оси x , а в другом – вдоль оси y ; размер вдоль другой оси при этом резко уменьшается. (Отметим, что в этом пункте наши результаты противоречат приведённым в [9] на рис.3 зависимостям, согласно которым в обоих случаях возрастает размер пучка вдоль оси x .) Модуль коэффициента K при приближении к указанным границам быстро возрастает, оставаясь ограниченным.

Собственные векторы матриц $\text{Re} H_{\mp}$ (8), определяющих форму волновых фронтов падающей и отражённой от сферического зеркала волн, образуют с координатными осями углы

$$\theta_{\mp} = \pm \frac{1}{2} \arctan \frac{(\cos^2 \phi - \gamma^2 - d + \delta^2) \tan \phi}{2\delta^2} \quad (22)$$

или углы, отличающиеся от них на целое число, кратное $\pi/2$ (формулы приведены для случая, когда $\gamma\delta \cos \phi \neq 0$ и справедливы выражения (9), (10) для H_0). Зависимость θ_+ от ϕ для резонатора с параметрами, взятыми из [9] ($\gamma \approx 0.7531$, $\delta \approx -0.0353$, не зависящие от $|\cos \phi|$ диагональные элементы матрицы $\text{Re} H_+$ приблизительно равны -0.0231 и -0.0173 мм⁻¹) приведена на рис.12,а. На рис.12,б представлены зависимости от $|\cos \phi|$ собственных чисел матрицы $\text{Re} H_+$ (кривизн волнового фронта в направлении собственных векторов), формулы для вычисления которых мы не приводим ввиду их громоздкости. Чтобы получить аналогичные зависимости для матрицы $\text{Re} H_-$, следует зеркально отразить относительно оси абсцисс все кривые на рис.12.

12. Вернёмся к вопросу об эволюции матрицы H при распространении пучка вдоль контура резонатора, крат-

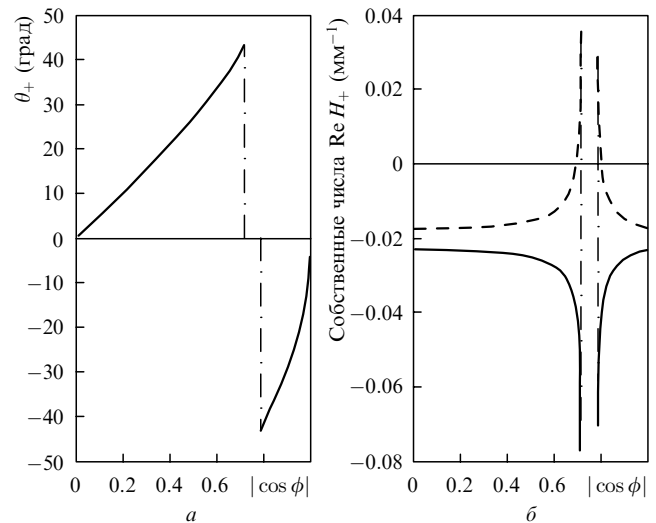


Рис.12. Зависимости угла поворота θ_+ (а) и собственных чисел матрицы $\text{Re} H_+$ (б) от $|\cos \phi|$ при $\gamma \approx 0.7531$, $\delta \approx -0.0353$. Собственные векторы, отвечающие сплошной и штриховой кривым на рис.12,б, образуют угол θ_+ с осями x и y соответственно. В случае $\tan \phi < 0$ рис.12,а следует зеркально отразить относительно оси абсцисс.

ко затронутому при рассмотрении четырёхзвенного резонатора. Преобразуем формулу (5) для $H(z)$ с учётом того обстоятельства, что любая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$H(z) = \frac{H_+ + (z \det H_+)E}{1 + z \operatorname{tr} H_+ + z^2 \det H_+}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} H_+ &= L^{-1}[it|\cos\phi|^{-1} + 2(\gamma - 1)]; \\ \det H_+ &= L^{-2}(\gamma^2 - 2\gamma + \cos^2\phi - \delta^2 - d) \\ &\quad \times [1 + it(2\gamma|\cos\phi|)^{-1}]. \end{aligned}$$

Выполнение соотношения подобия (6), связывающего матрицы $H(L)$ и H_- , проверяется непосредственно.

Домножив знаменатель (23) на комплексно-сопряжённое выражение, можно выделить вещественную и мнимую части матрицы $H(z)$. Эти формулы мы не выписываем ввиду их громоздкости; приведём только выражения для углов наклона полуосей эллипсов интенсивности и фазы $\theta_{\operatorname{Im}}$ и $\theta_{\operatorname{Re}}$ (т. е. собственных векторов матриц $\operatorname{Im} H(z)$ и $\operatorname{Re} H(z)$):

$$\theta_{\operatorname{Im}}(\kappa) = \frac{1}{2} \left\{ -\phi \right. \quad (24)$$

$$\left. - \arctan \frac{(2\kappa - 1) \sin\phi \cos\phi w_-}{[1 - 2\kappa(1 - \kappa)] \cos^2\phi w_- + 2\kappa(1 - \kappa)\gamma w_+} + n\pi \right\},$$

$$\theta_{\operatorname{Re}}(\kappa) = \frac{1}{2} \left\{ -\phi \right. \quad (25)$$

$$\left. - \operatorname{arccot} \frac{(2\kappa - 1) \cot\phi (\cos^2\phi w_- - w_+)}{[1 - 2\kappa(1 - \kappa)] \cos^2\phi w_- + 2\kappa(1 - \kappa)\gamma w_+} + n\pi \right\},$$

где

$$\kappa = z/L; \quad w_{\pm} = \cos^2\phi - \gamma^2 - d \pm \delta^2$$

(формулы приведены для $\gamma\delta \cos\phi \neq 0$).

Углы (24), (25) определяются с точностью до слагаемого $n\pi/2$ (полуоси эллипсов ортогональны) и отсчитываются от первоначального направления оси x или от направления, в которое оно переходит после одного или нескольких отражений от плоских зеркал; направление отсчёта определяется ориентацией системы координат, т. е. числом отражений. Переход к другим системам координат приводит к добавлению постоянного слагаемого и (при смене ориентации) к изменению знака в (24), (25). Отметим, что при выводе формул (24), (25) нами был использован такой переход к системе координат, повернутой на угол $\phi/2$ относительно исходной (для четырёхзвенного резонатора, приведённого на рис.6, это система координат, связанная с плоскостью ВСD). Между прочим, в этой системе сравнительно простой вид имеет матрица квадратичной формы, вычисленная при $z = L/2$, $\kappa = 1/2$ (точка С на рис.6):

$$\begin{aligned} &U_{\phi/2} H(L/2) U_{-\phi/2} \\ &= \frac{it(2\gamma|\cos\phi|)^{-1} \operatorname{diag}[u + v \cos\phi, u - v \cos\phi] + (v \sin\phi)\sigma}{L\delta[(\gamma + 1)(\gamma + \cos^2\phi) - \delta^2]}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

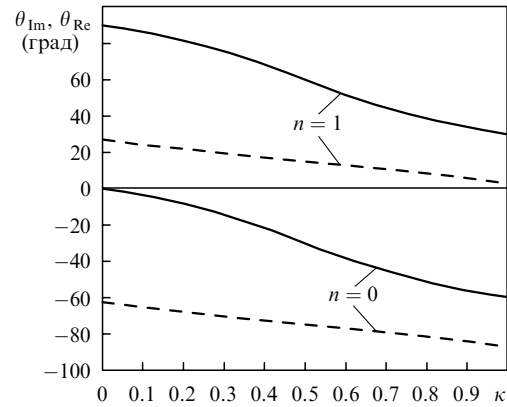


Рис.13. Зависимости углов наклона полуосей эллипса интенсивности $\theta_{\operatorname{Im}}$ (сплошные кривые) и фазы $\theta_{\operatorname{Re}}$ (штриховые кривые) от $\kappa = z/L$ для $\gamma \approx 0.7531$, $\delta \approx -0.0353$, $\phi = \pi/3$.

$$u = \delta[w_- + 2\gamma(\gamma + \cos^2\phi)]; \quad v = -\gamma w_+ - w_-,$$

что с точностью до обозначений совпадает с результатами работы [20].

Легко убедиться в том, что при некотором n угол $\theta_{\operatorname{Im}}(0) = 0$ (в частности, $n = 0$ при $|\phi| < \pi/2$): полуоси эллипса интенсивности расположены на координатных осях. Для этого значения n угол $\theta_{\operatorname{Im}}(1) = -\phi + n\pi$ (он отсчитывается в системе координат, повернутой на угол $+\phi$ в результате обхода контура). Несколько сложнее проверить, что для некоторого n выполняется равенство $\theta_{\operatorname{Re}}(0) = \theta_+$; для этого, в частности, достаточно убедиться в том, что $\tan[2\theta_{\operatorname{Re}}(0)] = \tan(2\theta_+)$. Для такого n также справедливо равенство $\theta_{\operatorname{Re}}(1) = -\phi + (n - 1/2)\pi + \theta_-$. В средней точке осевого контура $\theta_{\operatorname{Im}}(1/2) = (-\phi + n\pi)/2$, $\theta_{\operatorname{Re}}(1/2) = [-\phi + (n - 1/2)\pi]/2$ (для произвольного n), полуоси эллипса фазы расположены вдоль биссектрис между полуосями эллипса интенсивности. Последнее обстоятельство согласуется с видом матрицы (26), мнимая часть которой диагональна, а вещественная – антидиагональна. Зависимости $\theta_{\operatorname{Im}}$ и $\theta_{\operatorname{Re}}$ от κ для резонатора с выбранными параметрами приведены на рис.13.

13. Рассмотрим теперь вопрос о поведении собственных чисел матрицы $\operatorname{Im} H(z)$, равных $2/(k\omega_{1,2}^2)$, где $\omega_{1,2}$ – значения полуосей эллипса интенсивности, и собственных чисел матрицы $\operatorname{Re} H(z)$, равных $R_{1,2}^{-1}$, где $R_{1,2}$ – главные радиусы кривизны волнового фронта. Аналитические выражения для них при попытке выписать их «в

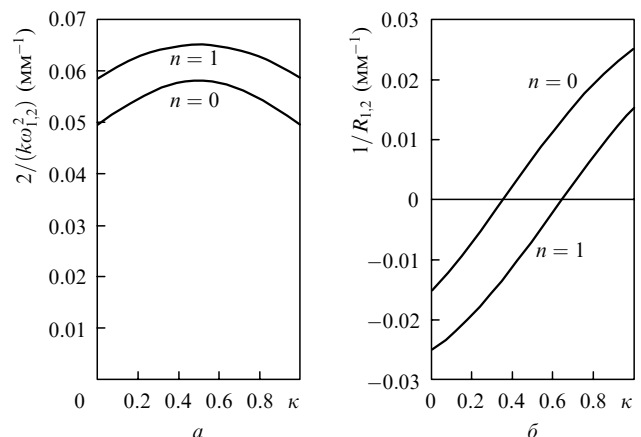


Рис.14. Зависимости собственных чисел матриц $\operatorname{Im} H(a)$ и $\operatorname{Re} H(b)$ от $\kappa = z/L$ для $\gamma \approx 0.7531$, $\delta \approx -0.0353$, $\phi = \pi/3$.

лоб» оказываются крайне громоздкими, что, однако, не мешает проведению численных расчётов, результаты которых для резонатора с выбранными параметрами представлены на рис.14. Видно, что в середине трассы собственные числа матрицы $\text{Im } H(z)$ принимают максимальные значения; значения $\omega_{1,2}$ оказываются, следовательно, минимальными. Собственные числа матрицы $\text{Re } H(z)$ в этой точке совпадают по модулю и различаются знаком, волновой фронт имеет форму седла. В симметрично расположенных относительно середины трассы точках, в которых одно из собственных чисел обращается в нуль, форма волнового фронта оказывается цилиндрической.

14. Полезно сопоставить наши результаты с альтернативным представлением для симметричного пучка [10]. С точностью до обозначений

$$U_{\phi/2}H(z)U_{-\phi/2} = \frac{(z - L/2)E + i \text{diag}[b_1 \sinh^2 \Phi - b_2 \cosh^2 \Phi, -b_1 \cosh^2 \Phi + b_2 \sinh^2 \Phi] - [(b_1 - b_2) \sinh \Phi \cosh \Phi] \sigma}{(z - L/2 - ib_1)(z - L/2 - ib_2)}. \quad (27)$$

Сравнивая эту формулу с (26), получаем, что $\tanh(2\Phi) = 2\gamma \sin \phi | \cos \phi | / t$, собственные числа матрицы $U_{\phi/2}H(L/2) \times U_{-\phi/2}$

$$\frac{i}{b_{1,2}} = \frac{i \left[tu \pm v \cos \phi \sqrt{t^2 - (2\gamma \sin \phi)^2} \right]}{2\gamma | \cos \phi | L \delta [(\gamma + 1)(\gamma + \cos^2 \phi) - \delta^2]},$$

а знаки при радикалах определяются, например, из условия совпадения знаков коэффициентов при σ в (26) и (27). Использование обозначений формулы (27) позволяет в достаточно компактном виде выписать аналитические выражения для $R_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$, а также формулы для углов поворота осей эллипсов, аналогичные (24), (25) (см., напр., [10]).

15. Скажем несколько слов о возможных обобщениях наших результатов. До сих пор мы говорили об идеальном резонаторе без потерь, для которого матрица монодромии вещественна. Однако формулы, описывающие поперечное распределение поля, легко преобразуются для случая, когда величины γ и δ имеют ненулевую мнимую часть, т. е. матрица T_ψ описывает уже не фазовый, а амплитудно-фазовый квадратичный корректор; иными словами, коэффициент отражения (прохождения) для фокусирующего элемента зависит от поперечных координат по гауссову закону. Разумеется, выражения (9), (10) (точнее, их аналоги) не будут уже иметь смысл вещественной и мнимой частей матрицы H_0 : сохранит силу лишь выражение для самой этой матрицы как линейной комбинации матриц (9) и (10) с коэффициентами 1 и i ; то же самое замечание справедливо и относительно других аналогичных формул.

На этом пути могут возникнуть проблемы, связанные с выбором ветви корня в формулах, подобных (11), (12), и с преобразованием формул, содержащих модули некоторых величин: в комплексном случае вместо них будут стоять сами эти величины со знаком «+» или «-». Правильный выбор должен обеспечивать сосредоточенность решения в окрестности оптической оси, т. е. положительную определённую мнимой части матрицы, описывающей поперечное распределение поля.

Разумеется, в случае, когда мнимые части γ и δ малы, а вещественные лежат глубоко внутри области (4), осо-

бых сложностей возникнуть не должно, однако в окрестности границы (4) может потребоваться специальный анализ. Отметим, что условия, обеспечивающие существование решения уравнения (1) с положительно определённой мнимой частью (т. е. условия устойчивости) в случае комплексной матрицы монодромии весьма отличаются от условий, к которым мы привыкли в вещественном случае [15, 16].

Второе возможное обобщение – это упомянутая выше задача о резонаторе с нечётным числом зеркал. В этом случае блок B матрицы монодромии оказывается симметричным, что сильно облегчает решение уравнения (1), позволяя воспользоваться упрощённой методикой [23]. В остальном по объёму и уровню сложности эта задача приблизительно эквивалентна рассмотренной в настоящей работе.

Более сложной в техническом плане представляется рассмотренная в [11] задача о неплоском кольцевом резонаторе с симметрично расположенными неплоским зеркалом и гауссовой диафрагмой (или двумя неплоскими зеркалами). В то же время исследуемый в этой работе частный случай $\phi = \pi/2$ допускает достаточно простое аналитическое решение.

В настоящей работе мы ограничились изучением формы поперечного распределения фундаментальной моды в скалярной постановке задачи, оставив без внимания такие важные вопросы, как связанные с поворотом координатной системы поляризационные эффекты, учёт высших мод, спектр собственных частот, оценка погрешности нулевого приближения, построение полного асимптотического разложения и т. д. Все эти задачи несомненно заслуживают отдельного рассмотрения.

16. Сформулируем основные результаты проведённого исследования.

Для резонаторов с неплоским осевым контуром, обеспечивающих пространственный поворот изображения и имеющих чётное число зеркал, одно из которых неплоское, подробно изучена геометрия области устойчивости в пространстве безразмерных параметров, характеризующих свойства резонатора. Приведены явные выражения для матрицы квадратичной формы, описывающей поперечное распределение поля фундаментальной моды, при всех допустимых значениях параметров. Исследованы особые точки и поверхности из области устойчивости, для которых матрица квадратичной формы определяется неоднозначно, а также поведение матрицы в окрестности этих точек и поверхностей. Изучена зависимость поперечного распределения поля от продольной координаты z , в частности, приведены явные выражения для углов наклона полуосей эллипсов интенсивности и фазы в зависимости от этой координаты.

Результаты конкретизированы для случая, когда неплоское зеркало имеет сферическую форму. Для таких резонаторов исследованы зависимости характеристик пучка от радиуса кривизны и угла поворота изображения. Для частного случая четырёхзвенного резонатора установлен характер связи угла поворота изображения и геометрических характеристик контура.

В качестве тестового примера мы использовали резо-

натор с параметрами, взятыми из работы [9]. Сравнение результатов расчётов и построенных на их основе зависимостей с результатами, приведёнными в указанной работе и полученными на основе традиционной методики, выявило как сходство, так и некоторые различия количественного и качественного характера.

1. Попов М.М. *Вестник ленингр. ун-та*, **22**, 42 (1969).
2. Arnaud J.A. *Appl. Opt.*, **8**, 189 (1969).
3. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972).
4. Панкратова Т.Ф. В сб. *Записки научных семинаров ЛОМИ* (Л.: Наука, 1969, т. 15, с. 122).
5. Панкратова Т.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **36**, 969 (1974).
6. Савельев И.И., Хромых А.М. *Квантовая электроника*, **3**, 1517 (1976).
7. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990).
8. Кравцов Н.В., Наний О.Е. *Квантовая электроника*, **20**, 322 (1993).
9. Головнин И.В., Ковригин А.И., Коновалов А.Н., Лаптев Г.Д. *Квантовая электроника*, **22**, 461 (1995).
10. Быков В.П., Силичев О.О. *Лазерные резонаторы* (М.: Физматлит, 2004).
11. Брославец Ю.Ю., Зайцева Т.Ф., Казаков А.А., Фомичёв А.А. *Квантовая электроника*, **36**, 447 (2006).
12. Arnaud J.A., Kogelnik H. *Appl. Opt.*, **8**, 1687 (1969).
13. Гончаренко А.М. *Гауссовы пучки света* (М.: КомКнига, 2005).
14. Бабич В.М. В сб. *Записки научных семинаров ЛОМИ* (Л.: Наука, 1968, т. 9, с. 15).
15. Кудашов В.Н., Плаченнов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **93**, 851 (2002).
16. Кудашов В.Н., Плаченнов А.Б., Радин А.М. *ЖТФ*, **73**, 111 (2003).
17. Plachenov A.B., Kudashov V.N., Radin A.M. *Proc. Int. Conf. «Days on Diffraction 2008»* (SPb, Faculty of Physics SPbU, 2008, p. 157).
18. Berry M.V. *Proc. Roy. Soc. London A*, **392**, 45 (1984).
19. Монастырский М.И. *Труды Годичной научной конференции, 1998* (М.: изд-е ИИЕТ им. С.И.Вавилова, 1999, с. 424).
20. Плаченнов А.Б., Кудашов В.Н., Радин А.М. *Квантовая электроника*, **37**, 290 (2007).
21. Plachenov A.B., Kudashov V.N., Radin A.M. *Proc. Int. Conf. «Days on Diffraction 2006»* (SPb, Faculty on Physics SPbU, 2006, p. 243).
22. Кудашов В.Н., Плаченнов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 130 (2000).
23. Кудашов В.Н., Плаченнов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 127 (2000).