

Исследование тепловой линзы в тонких дисках из лазерной керамики

И.Л.Снетков, А.А.Соловьев, Е.А.Хазанов

Теоретически исследованы тепловые искажения фазы излучения в лазерной керамике. Особое внимание уделено свойственной керамике мелкомасштабной модуляции фазы, связанной с произвольной ориентацией составляющих ее монокристаллических зерен. Получены формулы, описывающие среднее искажение фазы и его дисперсию в дисковых элементах в двух приближениях – тонкого диска при его охлаждении через оптические поверхности и слабого теплообмена. Численный расчет подтвердил высокую точность этих формул. Предложенные приближенные решения уравнений теплопроводности и упругости имеют самостоятельную ценность. В частности, полученные решения могут быть использованы для описания фазовых и поляризационных искажений излучения в произвольно ориентированном монокристаллическом диске.

Ключевые слова: лазерная керамика, тепловые искажения излучения, случайная мелкомасштабная модуляция фазы, дисковые оптические элементы.

1. Введение

Существующие технологии производства лазерной керамики позволяют изготавливать оптические элементы, не уступающие монокристаллам по таким свойствам, как чистота химического состава, теплопроводность, линейное расширение и т. п. Вместе с тем керамические элементы можно изготавливать с большей апертурой [1], лучшего качества, быстрее и, что немаловажно, существенно дешевле, чем монокристаллические. Более того, вязкость разрушения керамики [2] и параметр теплового разрушения в ней больше, чем в монокристалле [3]. Кроме того, существует возможность создания керамики из материалов, монокристаллы из которых на текущем уровне технологий вырастить невозможно (Y_2O_3 , TAG, TSAG и т. д.). Все это во многом объясняет постоянное расширение области применения лазерной керамики, а также сопутствующий динамичный рост технологической и производственной базы для ее изготовления.

Как было отмечено ранее в работах [4–7], при нагревании керамика обнаруживает ряд специфических свойств, проявляющихся в мелкомасштабной неоднородности в распределении по сечению пучка фазовых и поляризационных искажений, которые особенно заметны в тонких (дисковых) оптических элементах.

При рассмотрении тепловых искажений характеристик излучения в дисковых оптических элементах из керамики существует ряд особенностей. Во-первых, теплообмен с окружающей средой происходит, в основном, через торцевые поверхности, в результате чего распределение температуры в диске существенно отличается от ее распределения в стержне. Во-вторых, заметный вклад в

суммарные фазовые искажения излучения начинает вносить искривление поверхности элемента. В-третьих, из-за небольшой толщины дискового керамического элемента на пути луча обычно находится мало керамических зерен, что приводит к более заметной неоднородности искажений фазы [7].

Мелкомасштабная модуляция искажения фазы и поляризации излучения в керамике обусловлена произвольной ориентацией монокристаллических зерен. Поэтому при наличии механического напряжения, связанного с приложением сторонних сил или с градиентом температуры, возникает фотоупругий эффект, который для конкретной точки апертуры определяется еще и ориентациями всех зерен, находящихся на пути луча. Заметим, что при поперечном смещении на расстояние порядка размера зерна набор зерен, пронизываемых лучом, сменяется другим случайным набором, что определяет поперечный масштаб модуляции фазы и поляризации.

В [7] была рассмотрена керамика в форме длинного цилиндра (стержня) и получены аналитические выражения для искажения фазы и его статистических характеристик – математического ожидания и дисперсии. При этом учитывался поток тепла, направленный к образующей, а потоком через торцы пренебрегалось. Кроме того, вклад деформации торцевых поверхностей считался малым, что при стержневой геометрии вполне оправданно.

В настоящей работе исследуются тепловые эффекты в керамических элементах в виде дисков. Мы использовали два упрощенных аналитических решения для уравнения теплопроводности – в случае тонкого диска и при слабом теплообмене с окружающей средой. Оба этих решения в совокупности с решением для уравнения деформации в диске позволяют аналогично [7] получить выражения для искажения фазы и его статистических характеристик. Кроме того, мы учли искривление поверхности оптического элемента, что дает возможность определить искажение характеристик излучения, отраженного, например, от одной из граней.

И.Л.Снетков, А.А.Соловьев, Е.А.Хазанов. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: snetkov@appl.sci-nnov.ru, so_lo@appl.sci-nnov.ru, khazanov@appl.sci-nnov.ru

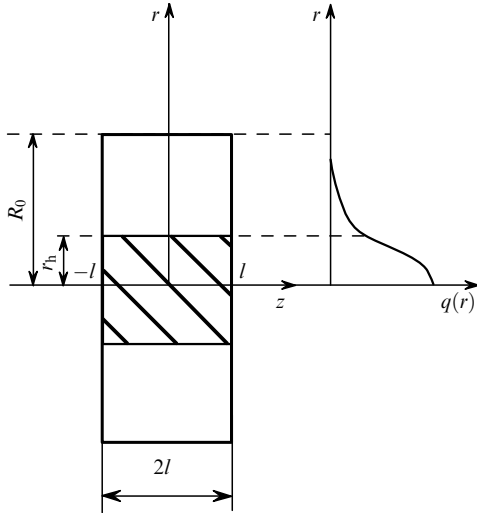


Рис.1. Дискковый оптический элемент, нагреваемый объемным источником тепла $q(r)$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тепловые искажения фазы в цилиндре из лазерной керамики с размерами R_0 и $2l$ (рис.1). При решении уравнений деформаций и теплопроводности будем считать, что теплопроводность κ , коэффициент Пуассона ν и коэффициент теплового линейного расширения α_T керамической среды и монокристалла совпадают. Это предположение сделано на основании работ [8, 9].

Ограничимся случаем, когда плотность мощности тепловыделения q зависит не от координаты z и полярного угла φ , а только от координаты r :

$$q(r) = \frac{P_h}{2\pi r_h^2} \int_0^r F(u) du \quad (1)$$

где P_h – мощность тепловыделения во всем образце; r_h и F – радиус и форма источника тепла; $u = (r/r_h)^2$; $\rho = (R_0/r_h)^2$. Симметрия задачи относительно поворотов вокруг оси цилиндра позволяет в стационарном уравнении теплопроводности пренебречь производной от температуры T по координате φ :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q(r)}{\kappa} \quad (2)$$

Решение (2) в виде рядов в общем случае известно (найти его можно, например, в [10]), но оно не всегда удобно для вычисления конкретного значения температуры, а тем более соответствующих температурных деформаций. Поэтому особый интерес представляют приближенные решения, учитывающие симметрию задачи и вид граничных условий.

Неоднородное распределение температуры (решение уравнения (2)) приводит к деформациям, которые в изотропном случае описываются уравнением для вектора смещения \mathbf{u} [11]:

$$\frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \text{rot rot } \mathbf{u} = 3\alpha_T \nabla T \quad (3)$$

Решение уравнения (3) для диска в плосконапряженном состоянии при отсутствии зависимости температу-

ры от z подробно рассмотрено в [12], где получены выражения для компонентов тензора деформации в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \alpha_T(1+\nu) \left[-\tilde{T}(r) + T(r) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \tilde{T}(R_0) \right], \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \alpha_T(1+\nu) \left[\tilde{T}(r) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \tilde{T}(R_0) \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha_T(1+\nu) \left[T(r) - \frac{2\nu}{1+\nu} \tilde{T}(R_0) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\tilde{T}(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \quad (5)$$

Информации о распределениях температуры и тензора напряжения достаточно, чтобы определить искажения оптического пути Ψ_{ph} , а также изменение поляризации в произвольно ориентированном зерне керамики [4, 5, 13] и, следовательно, во всем керамическом элементе.

Будем рассматривать каждое зерно керамики как фазовую пластинку, в которой как направление собственных поляризаций, так и набег фазы для «быстрой» и «медленной» волн зависят от температуры T , деформаций ε и углов Эйлера α , β и φ , задающих направление кристаллографических осей.

Направление кристаллографических осей в каждом зерне будем считать случайным со следующими функциями плотности вероятности для углов Эйлера:

$$P_\alpha = \frac{1}{2\pi}, \quad P_\beta = \frac{1}{\pi} \cos \alpha, \quad P_\varphi = \frac{1}{2\pi} \quad (6)$$

Будем считать, что ε и T слабо меняются на длине зерна и могут быть заменены их средними значениями. Тогда в отсутствие поглощения матрица Джонса j -го зерна M_j имеет следующий вид [14]:

$$M_j = e^{i\Psi_j} \times \begin{pmatrix} \cos(\delta_j/2) + i \cos(2\Theta_j) \sin(\delta_j/2) & i \sin(\delta_j/2) \sin(2\Theta_j) \\ i \sin(\delta_j/2) \sin(2\Theta_j) & \cos(\delta_j/2) - i \cos(2\Theta_j) \sin(\delta_j/2) \end{pmatrix} \quad (7)$$

где $\delta_j = (\Psi_o - \Psi_e)$ – разность фаз «быстрой» и «медленной» волн поляризации; Θ_j – угол между направлением «быстрой» волны поляризации и осью x лабораторной системы координат; $\Psi_j = (\Psi_o + \Psi_e)/2$ – средний набег фазы. Величины δ_j и Ψ_j выражаются через компоненты тензора диэлектрической непроницаемости ΔB_j следующим образом [4, 13]:

$$\begin{aligned} \delta_j &= \pm k n_0^3 \left[(\Delta B_{11} - \Delta B_{22})^2 + 4\Delta B_{12}^2 \right]^{1/2} = \frac{-k n_0^3}{2} \frac{2\Delta B_{12}}{\sin 2\Theta_j}, \\ \tan(2\Theta_j) &= \frac{2\Delta B_{12}}{\Delta B_{11} - \Delta B_{22}}, \\ \Psi_j &= \frac{k n_0^3 l}{4} (\Delta B_{11} + \Delta B_{22}) + \beta T k l + \varepsilon_{zz} (n_0 - 1) k l, \end{aligned} \quad (8)$$

где k – волновое число; n_0 – показатель преломления; индекс j в компонентах тензора ΔB_{mn} опущен. Выражения для $\Delta B_{11} - \Delta B_{22}$, $\Delta B_{11} + \Delta B_{22}$ и ΔB_{12} через компоненты тензора деформации получены в [4].

Матрица Джонса M_{tot} для всего керамического элемента получается перемножением N матриц Джонса отдельных зерен, находящихся на пути луча:

$$M_{\text{tot}} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1 = M \exp\left(i \sum_j \Psi_j\right). \quad (9)$$

В керамике не существует выделенных направлений, поэтому, не нарушая общности, будем считать, что поле на входе E_0 линейно поляризовано вдоль оси x лабораторной системы координат. Тогда

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = M_{\text{tot}} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где E_x и E_y – компоненты вектора Джонса на выходе из керамики. Набег фазы Ψ_{tot} для излучения, поляризованного вдоль оси x , можно найти через матрицу M_{tot} :

$$\Psi_{\text{tot}} = \arg(M_{\text{tot}11}) = \sum_j \Psi_j + \arg(M_{11}) = \Psi_{\text{ph}} + \Psi_{\text{pol}}. \quad (11)$$

Таким образом, набег фазы Ψ_{tot} разбивается на два слагаемых – фазовые (Ψ_{ph}) и поляризационные (Ψ_{pol}) искажения. Слагаемое $\Psi_{\text{ph}} = \sum_j \Psi_j$ имеет смысл среднего искажения фазы для двух любых взаимно перпендикулярных поляризаций. Для керамики с произвольной ориентацией зерен среднее значение этого слагаемого не зависит от угла φ . Если мы хотим получить искажение фазы излучения с линейной поляризацией, совпадающей с поляризацией на входе в керамический элемент, то необходимо учитывать второе слагаемое, зависящее от угла φ даже после усреднения по зернам керамики. При аналитическом рассмотрении статистических характеристик искажений фазы учет этого слагаемого довольно проблематичен, поэтому его удобнее рассматривать численно (см. разд.5). Величину дисперсии и среднего значения для слагаемого Ψ_{ph} можно найти аналитически в двух приближениях (см. разд.3 и 4).

Локальная деполаризация $\Gamma = (|E_y|/|E_0|)^2$ (доля мощности в поляризации, перпендикулярной исходной) определяется матрицей M_{tot} :

$$\Gamma = |M_{\text{tot}21}|^2. \quad (12)$$

Для количественной оценки поляризационных искажений обычно используется интегральная по поперечному сечению деполаризация

$$\gamma_d = \frac{\int_S \Gamma(r, \varphi) E_0^2(r) ds}{\int_S E_0^2(r) ds}, \quad (13)$$

где интегрирование производится по апертуре S оптического элемента.

Таким образом, выражения (7)–(13) позволяют полностью описать тепловые искажения характеристик излучения в керамике, если известны температура и деформации в оптическом элементе. Для дисковой геометрии эти величины можно найти аналитически в рамках двух приближений, рассмотренных ниже.

3. Тонкий диск при охлаждении через оптические плоскости

При рассмотрении очень тонкого диска в уравнении теплопроводности (2) можно пренебречь слагаемым

$d^2 T/dz^2$. В совокупности с граничными условиями, например конвективного теплообмена,

$$\mp \kappa \frac{dT}{dz} \Big|_{z=\pm l} = \alpha_{\text{conv}} T \Big|_{z=\pm l} \quad (14)$$

(α_{conv} – коэффициент конвективного теплообмена), это приводит к следующему решению:

$$T(r, z) = q(r) \left[\frac{l}{\alpha_{\text{conv}}} + \frac{1}{2\kappa} (l^2 - z^2) \right]. \quad (15)$$

На практике распределение температуры типа (15) реализуется в довольно тонких дисках при интенсивном охлаждении через оптические поверхности [15].

Оценим область применимости данного решения. Рассмотрим ширину перепада температуры, соответствующего источнику тепла вида $q(r) = \Theta(r)$, где функция

$$\Theta(r) = \begin{cases} \text{const} & r \leq r_h \\ 0 & r > r_h \end{cases}.$$

Тогда при $r \gg r_h$ температура будет нулевой, а при $r \ll r_h$ – равной ΔT . Размер переходной области a задается выражением

$$\kappa l \frac{\Delta T}{a} = \frac{a}{2} \Delta T \alpha_{\text{conv}}, \quad (16)$$

имеющим смысл равенства средних потоков тепла, уходящего с торцевой поверхности переходной области вследствие теплообмена с окружающей средой, и потока тепла, уходящего вдоль координаты r из-за теплопроводности. Для выполнения приближения тонкого диска необходимо иметь $r_h \gg a$:

$$\left(\frac{2\kappa l}{\alpha_{\text{conv}}} \right)^{1/2} \ll r_h. \quad (17)$$

Сравнение с результатами численного расчета, о которых подробнее будет рассказано ниже (см. разд.5), показало, что рассмотренное приближение хорошо описывает (ошибка не превышает 10 %) тепловые искажения в случае, когда r_h более чем в четыре раза превышает левую часть выражения (17).

При решении уравнения (3) для распределения температуры вида (15) простых выражений для компонентов деформации получить не удастся, поэтому аналогично работе [15] рассмотрим случай, когда зависимость от координаты z считается слабой. Это позволяет нам в выражении (15) произвести усреднение по этой координате:

$$T(r, z) = T(r) = q(r) \left(\frac{l}{\alpha_{\text{conv}}} + \frac{l^2}{3\kappa} \right). \quad (18)$$

Процедура нахождения среднего значения и дисперсии набега фазы описана в [7]. Аналогично из (11) получаем формулы для математического ожидания искажения фазы (Ψ_{ph}) и ее дисперсии D_{Ψ_1} :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi_{\text{ph}} \rangle}{2\kappa l} &= \text{const}_{\text{disk}} + P_{\text{disk}} T(r) - Q_{\text{disk}} (1 - \xi) \\ &\times \frac{11}{64} [T(r) - 2\tilde{T}(R_0)] + (n_0 - 1) \alpha_T (1 + \nu) T(r), \end{aligned} \quad (19)$$

$$D_{\Psi_1} = 4Q_{\text{disk}}^2 (1 - \xi)^2 l^2 \left\{ \left[\frac{265}{2^{15}} [T(r) - 2\tilde{T}(r)]^2 + \frac{330}{2^{15}} [-T(r) + 2\tilde{T}(R_0)]^2 \right] N_g \langle l_g \rangle^2 \left(1 + \frac{D_{l_g}}{\langle l_g \rangle^2} \right) + \left(\frac{11}{64} \right)^2 N_g D_{l_g} [-T(r) + 2\tilde{T}(R_0)]^2 \right\}, \quad (20)$$

где

$$Q_{\text{disk}} = \alpha_T \frac{n_0^3}{4} (1 + \nu)(p_{11} - p_{12});$$

$$P_{\text{disk}} = \frac{dn_0}{dT} - \alpha_T \frac{n_0^3}{4} (1 + \nu)(p_{11} + 3p_{12});$$

$\langle l_g \rangle$ – средняя длина гранулы; D_{l_g} – дисперсия длины гранулы; Q_{disk} и P_{disk} – термооптические характеристики среды (Q характеризует термонаведенную анизотропию, а P – изотропные искажения); ξ – параметр оптической анизотропии, введенный в соответствии с [4]. В (19) распределение температуры задается выражением (18).

4. Диск при слабом теплообмене

В условиях слабого (например, конвективного с воздухом) теплообмена будем искать приближенное решение уравнения (2) в виде

$$T(r, z) = T_r(r) + az^2. \quad (21)$$

Подстановка (21) в (2) приводит к уравнению для $T_r(r)$, которое легко интегрируется. Для нахождения констант интегрирования будем использовать предположение, согласно которому тепло отводится одинаково со всех точек поверхности цилиндрического образца:

$$\left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\text{surf}} = \text{const}, \quad (22)$$

где η – нормаль к поверхности. В этом случае производные от температуры в образце определяются следующими выражениями:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{4\pi\kappa l} \left[\frac{P_h r}{R_0(R_0 + 2l)} - \frac{P_{\text{in}}(r)}{r} \right], \quad (23)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{P_h z}{2\pi\kappa R_0 l (R_0 + 2l)}, \quad (24)$$

где $P_{\text{in}}(r) = 4\pi l \int_0^r xq(x)dx$ – мощность тепловыделения в цилиндре радиусом r . Граничные условия вида (14) и предположение (22) могут быть удовлетворены при одновременном выполнении двух неравенств:

$$\left| \frac{\Delta T_r}{T_{\text{surf}}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta T_z}{T_{\text{surf}}} \right| \ll 1, \quad (25)$$

где ΔT_r и ΔT_z – перепады температуры на торцах и обтекающей соответственно; T_{surf} – средняя температура поверхности образца. Величина T_{surf} определяет суммарную мощность теплоотвода с поверхности, равную в стационарном случае мощности выделения тепла P_h внутри образца. Отсюда следует, что

$$T_{\text{surf}} = \frac{P_h}{2\pi\alpha_{\text{conv}} R_0 (R_0 + 2l)}. \quad (26)$$

Величину ΔT можно найти из (23) и (24):

$$\Delta T_r = \frac{\alpha_{\text{conv}} R_0}{2\kappa l} \left(\frac{R_0}{2} - \frac{R_0 + 2l}{P_h} \int_0^{R_0} \frac{P_{\text{in}}}{r} dr \right), \quad (27)$$

$$\Delta T_z = \frac{P_h l^2}{4\pi\kappa R_0 l (R_0 + 2l)}.$$

Условия (25) с учетом (26) и (27) принимают следующий вид:

$$\left| \frac{\alpha_{\text{conv}} R_0}{4\kappa l} [R_0 - (R_0 + 2l)I] \right| \ll 1, \quad \frac{l\alpha_{\text{conv}}}{2\kappa} = \text{Bi} \ll 1, \quad (28)$$

где Bi – критерий подобия Био, а I определяется формой источника тепла:

$$I = \int_0^{R_0} \left(\frac{P_{\text{in}}(r)}{r} \right) dr. \quad (29)$$

Легко показать, что если источник тепла имеет гауссову форму с шириной r_h , то при $R_0 = 2r_h$ интеграл I близок к двум. Заметим, что для дисковой геометрии ($R_0 > l$) при $I > 1$ достаточно потребовать выполнения только первого неравенства в (28), т. к. второе будет выполняться автоматически. Решение (23), (24) может быть использовано для цилиндрических образцов с произвольным при выполнении (28) соотношением длины и радиуса.

Рассмотрим возникающие деформации. Как уже было отмечено, в случае диска деформация, обусловленная $T(r, z) = T_r(r)$, задается выражением (4). Подстановка $T(r, z) = az^2$ в уравнение (3) в случае тонкого диска приводит к следующему решению:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \alpha_T \frac{al^2}{3}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{zz} = \alpha_T \frac{1 + \nu}{1 - \nu} az^2 + \alpha_T \frac{al^2}{3} \frac{2\nu}{\nu - 1}.$$

Решение (30) в сумме с решением (4) дает решение уравнения (3) для диска с температурой в виде (21). Отметим, что в работах [14, 15] при рассмотрении дисков с $R_0 < 1$ зависимость температуры от координаты z не учитывалась.

В приближении слабого теплообмена выражение (19) для $\langle \Psi_{\text{ph}} \rangle$ останется справедливым, т. к. добавка к деформации (30) не влияет на $\langle \Psi_{\text{ph}} \rangle$. Выражение (20) для D_{Ψ_1} при учете зависимости от z дополнится двумя слагаемыми:

$$D_{\Psi_2} = D_{\Psi_1} + 4Q_{\text{disk}}^2 (1 - \xi)^2 l^2 \left\{ \frac{4}{(1 - \nu)^2} \frac{1298}{2^{15}} \times \left\langle \sum_{j=1}^N \left[\int_{l_j} \left(\frac{4l^2}{3} - z^2 \right) dz \right]^2 \right\rangle_{l_g} + \frac{4}{1 - \nu} \frac{1298}{2^{15}} [-T_r(r) + 2\tilde{T}_r(R_0)] \left\langle \sum_{j=1}^N l_n \int_{l_j} \left(\frac{4l^2}{3} - z^2 \right) dz \right\rangle_{l_g} \right\}, \quad (31)$$

где интегрирование ведется по j -й грануле. Сравнение с результатами численного моделирования показало, что вклад этих слагаемых в рассматриваемом приближении незначителен.

5. Произвольный цилиндр (численное моделирование)

Для промежуточных случаев, когда описанные приближения, а также приближение стержневого элемента [7] не работают, мы использовали программный код [16, 17], который позволяет рассчитать температуру и деформацию цилиндрического оптического элемента при произвольном соотношении R_0 и l . Для нахождения среднего искажения фазы и ее дисперсии использовался следующий алгоритм. На пути луча с полярными координатами r, φ находился случайный набор монокристаллических зерен со случайными длинами l_j и углами Эйлера α, β, γ . При этом число зерен на пути луча также являлось случайной величиной с математическим ожиданием, равным N . Далее для каждого зерна в соответствии с выражениями (7) и (8) рассчитывалась матрица Джонса M_j . Деформации ε_{ij} внутри одного зерна считались постоянными. Из (9) находилась итоговая матрица M_{tot} , из которой с использованием выражения (11) определялся набег фазы Ψ_{tot} . Среднее значение и дисперсия фазы находились методом Монте-Карло.

6. Анализ результатов

Наличие как численного, так и аналитического решений позволяет нам, с одной стороны, взаимно проверить полученные результаты, а с другой – найти области применения использованных при аналитическом решении приближений тонкого диска (см. разд.3) и диска в случае слабого теплообмена с окружающей средой (см. разд. 4).

Для уравнения теплопроводности приближение тонкого диска хорошо выполняется в случае выполнения неравенства (17). Например, в дисковом элементе из YAG толщиной $2l = 4$ мм при $\alpha_{\text{conv}} = 1000 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$ (такой теплообмен соответствует охлаждению водой [18, 19]) отличие от численного решения не превышает 10%, если радиус r_h греющего гауссова пучка больше 4 см. При снижении α_{conv} до $100 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$, что соответствует, например, обдуву воздухом [18, 19], приближение тонкого диска хорошо работает при $r_h > 13$ см.

Применимость приближения слабого теплообмена требует выполнения условий (32). Например, для элемента из YAG при $R_0 = 2$ см и конвективном теплообмене с воздухом ($\alpha_{\text{conv}} = 20 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$) необходимо, чтобы длина l находилась в промежутке 0.5 мм – 10 см. При уменьшении радиуса образца R_0 , ограничения на длину l ослабляются.

В уравнении деформации плосконапряженное состояние соответствует нашему случаю, когда $R > 5l$. Это же можно сказать и про адекватность добавки к деформации (30), учитывающей зависимость от координаты z . Отметим, что для реализации плосконапряженного состояния, согласно [12], зависимость температуры в образце от координаты z должна быть слабой.

Для примера рассмотрим керамику из YAG в двух случаях. В первом случае $R_0 = 10$ мм, $2l = 4$ мм, $r_h = 4$ мм, $P_h = 100$ Вт и $\alpha_{\text{conv}} = 100 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$; во втором случае $R_0 = 50$ мм, $2l = 4$ мм, $r_h = 20$ мм, $P_h = 100$ Вт и $\alpha_{\text{conv}} = 1000 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$. На рис.2 приведена температура, усредненная по координате z . Поскольку для последних расчетов важны лишь градиенты температуры, построены зависимости $T(r) - T(0)$.

Из рисунка видно, что в первом случае (рис.2,а) решение (27), полученное в приближении слабого теплообмена, очень близко к численному решению. Решение же, полученное для усиленного теплоотвода через оптические поверхности, напротив, дает большую ошибку – для данных параметров оно неприменимо. Во втором случае (рис.2,б) наблюдается обратная ситуация – более подходящим является приближение охлаждения через оптические поверхности, в рамках которого получено решение (18).

Рассмотрим зависимости для компонентов тензора деформации (рис.3). Для сопоставления формы они построены за вычетом максимального значения. Исходно кривые, приведенные на одном рисунке, находились на разной высоте, что соответствует различному однородному тепловому расширению без возникновения напряжений. Учет такого расширения на окончательный результат не влияет.

Как и для температуры, в первом случае деформации более точно описываются в приближении слабого теплообмена, а во втором – в приближении охлаждения через оптические поверхности. Отметим, что это утверждение справедливо также для линейных комбинаций компонентов тензора деформации.

На рис.4 и 5 приведены зависимости для среднего значения (рис.4) и среднеквадратичного отклонения (рис.5) теплового искажения фазы излучения, прошедшего через керамический элемент. В усредненное по углу φ математическое ожидание искажения фазы, кроме зависимости показателя преломления от температуры и фотоупругого эффекта, вносит вклад также геометрическое искривление торцевых поверхностей. Вклад в дисперсию фазы дает лишь фотоупругий эффект.

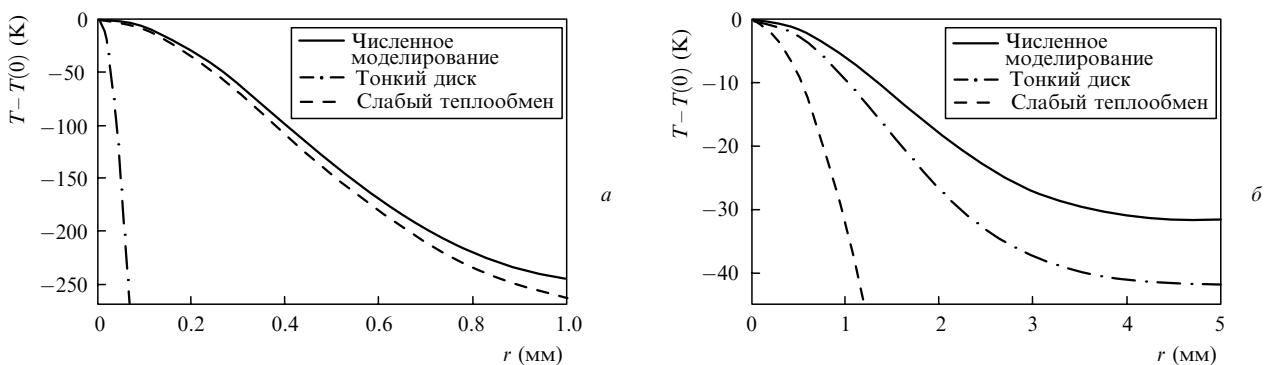


Рис.2. Усредненная по координате z температура T в зависимости от r , полученная в рамках различных приближений для первого (а) и второго (б) случаев теплообмена.

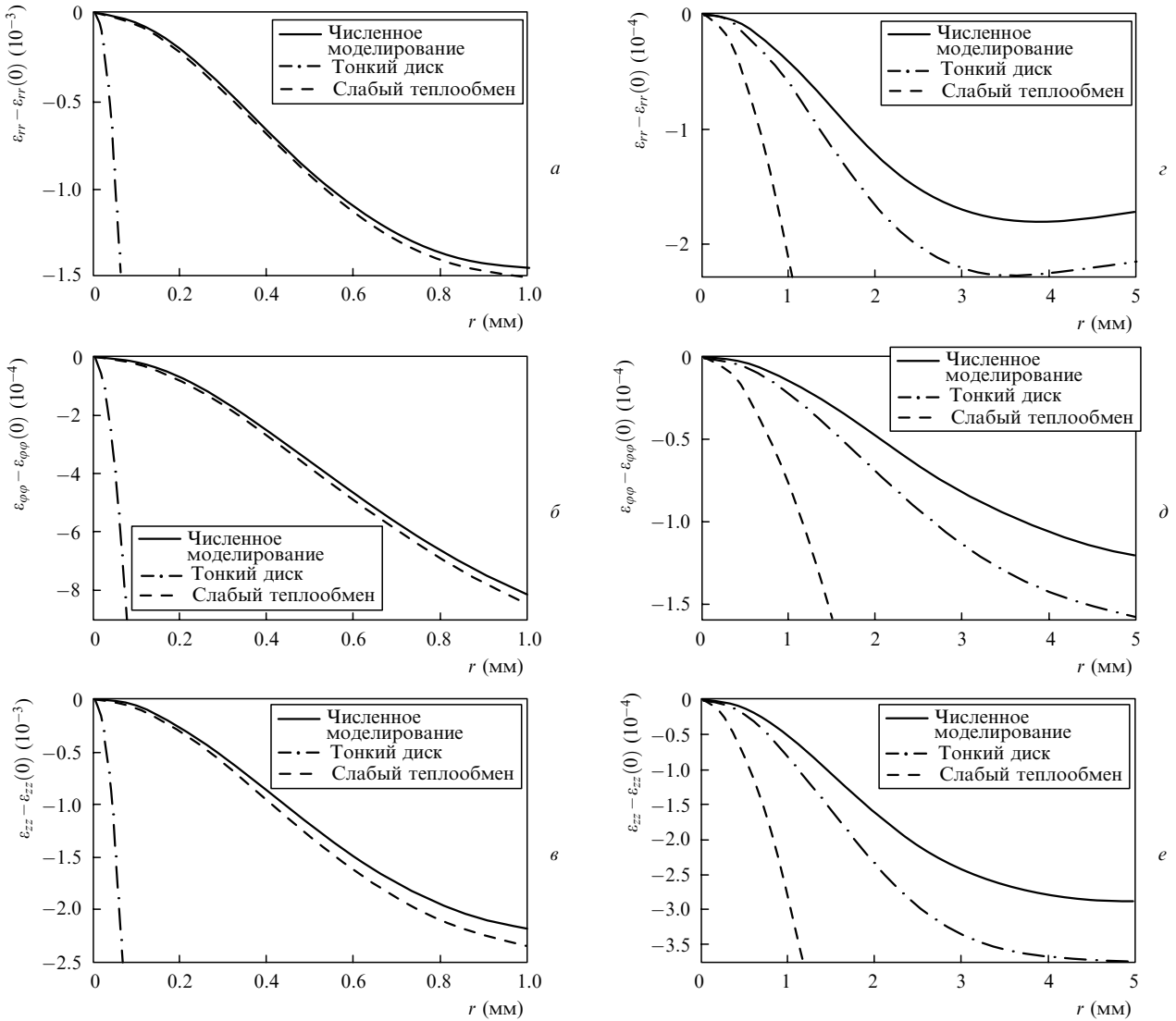


Рис.3. Усредненные по координате z компоненты тензора деформации ϵ , полученные численно (сплошные кривые) и аналитически в приближении слабого теплообмена (штриховые кривые), и плосконапряженного состояния (штрих-пунктир) в первом ($a-e$) и втором ($z-e$) случаях теплообмена.

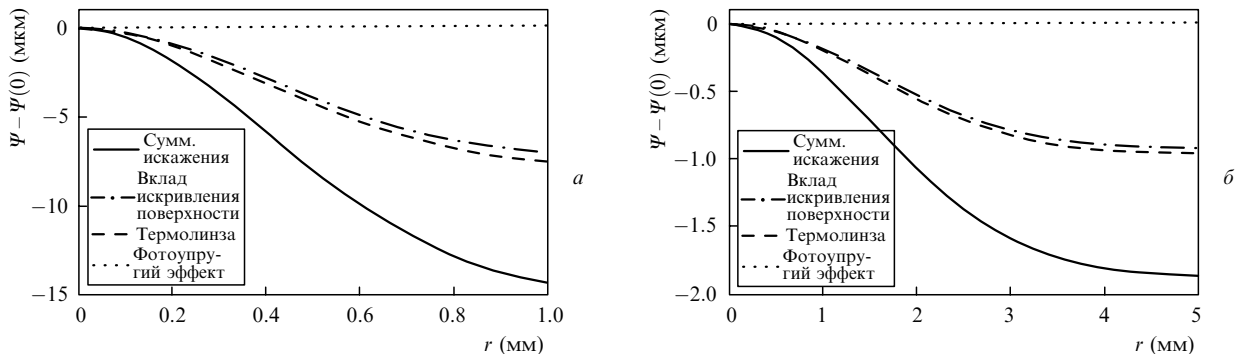


Рис.4. Усредненное по углу ϕ искажение фазы проходящего излучения в первом (a) и втором (b) случаях. Сплошная кривая – суммарные искажения, штрих-пунктир – искажения, связанные с искривлением поверхности, штриховая кривая – вклад dn/dT , пунктир – фотоупругий эффект.

Как было отмечено ранее, вклад Ψ_{pol} в левую часть выражения (11) в среднее значение и дисперсию искажения фазы не поддается аналитическому рассмотрению, поэтому он был найден численно. В этом случае как среднее значение искажения фазы, так и его дисперсия приобретают зависимость от угловой координаты ϕ .

Для сравнения на рис.5 приведены не только кривые для среднеквадратичного отклонения, полученного численно и аналитически в рамках исследуемых приближений, но и кривые, соответствующие вертикальному и горизонтальному сечениям, при учете Ψ_{pol} . Как и ранее, для первого случая более подходит приближение слабого

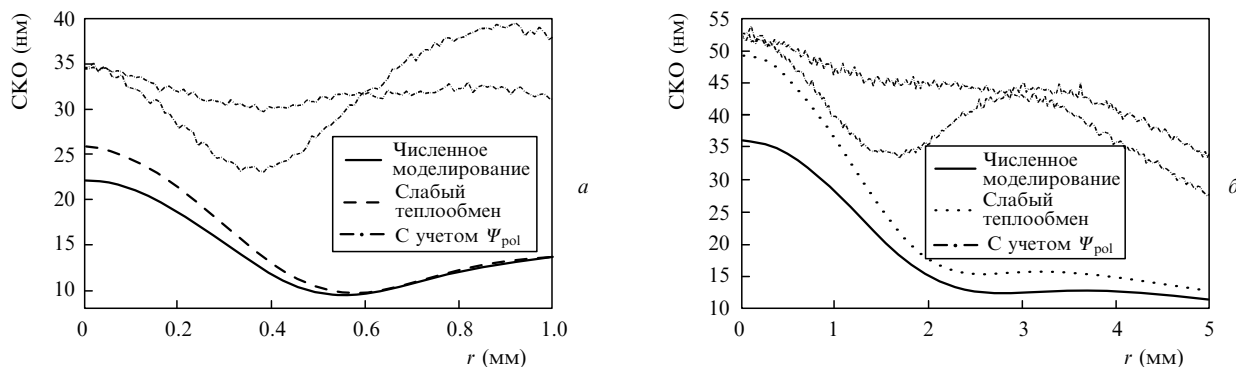


Рис.5. Среднеквадратичные отклонения искажения фазы (СКО) от среднего значения в зависимости от координаты r , полученные численно (сплошная кривая) и аналитически в приближении слабого теплообмена (штриховая кривая) (а) и тонкого диска при охлаждении через оптические поверхности (пунктир) (б) для первого (а) и второго (б) случаев. Штрих-пунктирными кривыми изображены вертикальное и горизонтальное сечения поверхности СКО, полученной при учете Ψ_{pol} .

теплообмена, для второго – приближение тонкого диска при охлаждении через оптическую поверхность.

Из рис.5 видно, что учет Ψ_{pol} в выражении (11) для керамики из YAG вносит дополнительную дисперсию, зависящую как от радиуса, так и от полярного угла, и сопоставимую с дисперсией Ψ_{ph} . Тем не менее характерную величину мелкомасштабной модуляции фазы можно получить из аналитических выражений (19) и (31).

7. Заключение

В настоящей работе получены аналитические формулы для искажения фазы в дисковых керамических элементах с учетом случайной мелкомасштабной неоднородности, связанной с произвольностью ориентации монокристаллических гранул в керамике. Найдены выражения для среднего значения и дисперсии искажения фазы.

В частности получены аналитические решения уравнения теплопроводности в двух различных приближениях, а также найдены условия их применимости. Эти решения позволяют также аналитически рассчитать деформацию и получить выражения для среднего искажения фазы и его дисперсии. Данные выражения и область их применения проверены численно. В совокупности с формулами, полученными ранее для стержневых элементов, они позволяют аналитически описать среднее значение и дисперсию тепловых искажений фазы излучения в обширной области параметров как для керамических,

так и для монокристаллических оптических элементов из кубических кристаллов цилиндрической формы.

1. Lu J. et al. *Appl. Phys.*, **39** (10), 1048 (2000).
2. Каминский А.А. и др. *Кристаллография*, **48** (3), 562 (2003).
3. Ueda K., in *Intern. Conf. on Lasers, Applications, and Technologies* (St. Petersburg, 2005, p. LWG2).
4. Khazanov E.A. *Opt. Lett.*, **27** (9), 716 (2002).
5. Каган М.А., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **33** (10), 876 (2003).
6. Mukhin I.V. et al. *Opt. Express*, **13** (16), 5983 (2005).
7. Снетков И.Л., Мухин И.Б., Палашов О.В., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **37** (7), 633 (2007).
8. Попов П.А. и др. *Докл. РАН*, **412** (2), 1 (2007).
9. Bisson J.F. et al. *Opt. Review*, **14** (1), 1 (2007).
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики* (М.: Мир, 1985).
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости* (М.: Наука, 2004).
12. Тимошенко С.П., Гудьир Д. *Теория упругости* (М.: Наука, 1975).
13. Хазанов Е.А. *Докт. дисс.* (ИПФ РАН, Н. Новгород, 2005).
14. Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И. *Термооптика твердотельных лазеров* (М.: Машиностроение, 1986).
15. Мухин И.Б., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **34** (10), 973 (2004).
16. Zelenogorsky V.V. et al. *Appl. Opt.*, **45** (17), 4092 (2006).
17. Soloviev A.A et al. *Quantum Electron.*, **36** (10), 939 (2006).
18. Уонг. Х. *Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров* (М.: Атомиздат, 1979).
19. http://www.engineeringtoolbox.com/heat-transfer-coefficients-exchangers-d_450.html.