РЕЗОНАТОРЫ, ЗЕРКАЛА

PACS 42.60.Da

Спектральные свойства кольцевого оптического резонатора с продольной неоднородностью произвольного вида

В.Ф.Судаков

Рассмотрен кольцевой оптический резонатор с произвольным, но непрерывным вдоль оси резонатора изменением диэлектрической проницаемости среды заполнения. Показано, что при малом отклонении диэлектрической проницаемости от ее среднего значения двукратное вырождение собственных частот, свойственное однородному резонатору, снимается и соответствующие моды приобретают характер стоячих волн. Найдены простые универсальные формулы для расчета собственных частот и коэффициентов распределения в модах. Указаны условия, при которых расщепление в спектре частот неоднородного резонатора отсутствует. Полученные результаты общего характера позволяют легко осуществить численный эксперимент.

***Ключевые слова**: кольцевой резонатор, собственная частота, мода, невзаимность.*

1. Для идеальных (однородное заполнение, отсутствие внутренних, выходных и дифракционных потерь) устойчивых оптических резонаторов (ОР) решение спектральной задачи известно в высокочастотном приближении. Неоднородность заполнения есть один из видов возмущения идеального ОР. На практике неоднородности могут создаваться встроенными элементами резонаторов. Обычно принимаются меры для устранения обратного рассеяния на подобных неоднородностях, но даже в качественно выполненных образцах нет гарантии полного отсутствия обратного рассеяния, а следовательно, и неоднородности как его причины. Кроме того, нельзя исключать возможность целенаправленного встраивания в резонатор частично отражающих (скорее всего, слабо отражающих) элементов для формирования нужных спектральных свойств сложного резонатора. Хотя неоднородность имеет обычно смешанный характер, целесообразно выделить чисто поперечную (зависящую только от координат сечений, нормальных к базовому контуру ОР) и чисто продольную (зависящую исключительно от координаты z вдоль оси базового контура) неоднородности. Подобное разделение видов неоднородности позволяет существенно упростить модель ОР и получить важные качественные результаты. Поперечная неоднородность определяет главным образом поперечную структуру мод и собственные частоты мод высшего порядка. Моды нулевого порядка (продольные) и их частоты перестраиваются при введении продольной неоднородности.

В настоящей работе сосредоточимся только на возмущении ОР продольной неоднородностью. В этом случае достаточно считать модель резонатора одномерной и исследовать наиболее сложную из спектральных задач, возникающих в теории кольцевых оптических резонаторов (КОР), когда идеальный резонатор имеет двукратно вырожденный спектр. Было установлено, что неоднородность может снять это вырождение и изменить характер продольных мод. Закономерности влияния возмущений подобного типа на спектр КОР сначала целесообразно было выявить на частных примерах. С этой целью в [1, 2] была приближенно решена спектральная задача для КОР с простейшими видами продольной неоднородности, оценено расщепление вырожденного спектра идеального резонатора, указаны особенности мод (там же приведены результаты других работ по данной теме). При наличии расщепления спектр становится простым, а моды являются стоячими волнами (в идеальном КОР для каждой собственной частоты они обычно считаются двумя встречно распространяющимися бегущими волнами). Были найдены условия, при которых расщепление отсутствует.

В [1, 2] предполагалось, что продольные неоднородности имеют разрывы непрерывности. Это позволяет использовать формулы Френеля и понятия коэффициентов отражения и пропускания в точках разрыва. Таким образом, можно свести спектральную задачу для дифференциальных операторов к алгебраической. Хотя методика работ [1, 2] остается пригодной в случае любой кусочно-однородной среды заполнения, недостатком такой модели неоднородности является громоздкий алгоритм расчета. В связи с этим целесообразно отказаться от модели «резких» неоднородностей (существенно изменяющихся на длине волны) и рассмотреть «мягкие» неоднородности. Во-первых, в резонаторе могут существовать неоднородности подобного типа. Во-вторых, заранее неясно, насколько адекватно «резкие» неоднородности могут быть описаны в рамках «мягкой» модели.

Цель данной работы – решение спектральной задачи для КОР с достаточно плавным и незначительным изменением неоднородности заполнения совершенно произвольного вида, а также определение характера спектра и структуры мод в зависимости от интегральных характеристик переменного коэффициента преломления. Общее решение этой задачи должно быть достаточно простым и легко воспроизводимым при конкретизации вида неод-

В.Ф.Судаков. Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5; e-mail: vvffss@rol.ru

Поступила в редакцию 5 августа 2008 г., после доработки – 28 ноября 2008 г.

нородности. Должны быть также указаны ограничения на степень гладкости неоднородности, при которых такое решение можно получить.

2. Сформулируем спектральную задачу для продольно неоднородного КОР и преобразуем ее к виду, удобному для получения приближенного решения. Поскольку оптические свойства среды заполнения изменяются только вдоль оси КОР, производными по поперечным координатам можно пренебречь и поле $E(z,t)$ считать одномерным ($0 \leqslant z \leqslant L$, где L – периметр КОР). Его поляризация для простоты считается линейной. Рассматривая стационарные во времени колебания с частотой ω, для амплитуды этих колебаний получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2} + k^2 Q^2(z) E = 0. \tag{1}$$

Волновое число k и коэффициент преломления $Q(z)$ введены соотношениями $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$ и $\varepsilon(z)/\varepsilon_0 = Q^2(z)$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость пустого резонатора; магнитная проницаемость μ постоянна, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ произвольно зависит от координаты. Будем считать, что $Q^2(z) = 1 + \delta(z)$, где $0 \leqslant \delta(z) \ll 1$. Для частот оптического диапазона k велико и решения (1) можно искать в асимптотическом приближении. Однако уравнение (1) малопригодно для такого рода приближений. Поэтому используем известное преобразование для приведения (1) к нормальной форме Лиувилля:

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + q(x) u = \chi^2 u. \tag{2}$$

Здесь введены новая переменная

$$x(z) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^z Q(z) \mathrm{d}z, \tag{3}$$

новая функция

$$u(x) = Q^{1/2}(z(x)) E(z(x)) \tag{4}$$

и постоянная

$$\Lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^L Q(z) \mathrm{d}z. \tag{5}$$

Интервал изменения z преобразуется в интервал $(0, \pi)$ изменения x. Параметр k уравнения (1) переходит в большой параметр $\chi = \Lambda k$. Переменный коэффициент $q(x)$ от k не зависит, что позволяет искать асимптотическое приближение решения уравнения (2) и с использованием выражений (3), (4) перейти от него к искомому решению уравнения (1).

Моды КОР должны удовлетворять граничным условиям

$$E(0) = E(L), \ \ \frac{\mathrm{d}E(0)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}E(L)}{\mathrm{d}z}.$$

В связи с этим следует искать собственные функции (СФ) и соответствующие им собственные значения (СЗ) уравнения (2) с граничными условиями также периодического типа:

$$u(0) = u(\pi), \ \ \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u(\pi)}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

3. Рассмотрим вспомогательную спектральную задачу, порожденную соотношениями (2), (6), где спектральный параметр χ связан с частотой и может считаться большим. Коэффициент $q(x)$ равномерно меньше χ, что накладывает определенные ограничения на степень гладкости функции $\delta(z)$ (см. ниже). Указанная спектральная задача (определение СЗ и СФ) будет решаться в явном виде, но приближенно, при $\chi \to \infty$.

Выберем в качестве фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения (2) два его решения – $\phi(x,\chi)$ и $\theta(x,\chi)$, удовлетворяющих начальным условиям (на левой границе $x = 0$)

$$\phi(0,\chi) = 1, \ \frac{\mathrm{d}\phi(0,\chi)}{\mathrm{d}x} = 0, \ \theta(0,\chi) = 0, \ \frac{\mathrm{d}\theta(0,\chi)}{\mathrm{d}x} = 1.$$

Очевидно, что эти решения удовлетворяют также интегральным уравнениям

$$\phi(x,\chi) = \cos(\chi x) + \frac{1}{\chi} \int_0^x \sin[\chi(x - x')] q(x') \phi(x',\chi) \mathrm{d}x', \tag{7}$$

$$\theta(x,\chi) = \frac{1}{\chi} \sin(\chi x) + \frac{1}{\chi} \int_0^x \sin[\chi(x - x')] q(x') \phi(x',\chi) \mathrm{d}x'. \tag{8}$$

Любое решение задачи (2), (6), т. е. СФ, и его производная могут быть представлены в виде линейных комбинаций функций из ФСР и их производных соответственно:

$$u(x,\chi) = c_1 \phi(x,\chi) + c_2 \theta(x,\chi),$$

$$\frac{\mathrm{d}u(x,\chi)}{\mathrm{d}x} = c_1 \frac{\mathrm{d}\phi(x,\chi)}{\mathrm{d}x} + c_2 \frac{\mathrm{d}\theta(x,\chi)}{\mathrm{d}x}.$$

Постоянные c_1, c_2 таковы, что приведенные разложения удовлетворяют граничным условиям (6):

$$c_1 = c_1 \phi(\pi,\chi) + c_2 \theta(\pi,\chi), \ \ c_2 = c_1 \frac{\mathrm{d}\phi(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x} + c_2 \frac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x}. \tag{9}$$

Ненулевое решение однородной системы (9) существует только при

$$\det \begin{pmatrix} \phi(\pi,\chi) - 1 & \theta(\pi,\chi) \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x} - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что СЗ должны быть корнями уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x} + \phi(\pi,\chi) - 2 = 0. \tag{10}$$

Чтобы получить асимптотические выражения для корней уравнения (10), найдем сначала асимптотические выражения для ФСР. С этой целью обратимся к интегральным уравнениям (7), (8). Поскольку интегральный член имеет порядок $O(1/\chi)$, можно перейти к первой итерации их решения:

$$\phi(x,\chi) \approx \cos(\chi x) + \frac{1}{\chi} \int_0^x \sin[\chi(x - x')] q(x') \cos(\chi x') \mathrm{d}x',$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x,\chi)}{\mathrm{d}x} \approx \cos(\chi\pi) + \int_0^x \cos[\chi(x - x')] q(x') \cos(\chi\pi) \mathrm{d}x'.$$

С помощью второй итерации можно получить приближения порядка $O(1/\chi^2)$ для $\phi(\pi,\chi)$ и $\mathrm{d}\theta(\pi,\chi)/\mathrm{d}x$:

$$\phi(\pi,\chi) \approx \cos(\chi\pi) + \frac{1}{\chi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x' \sin[\chi(\pi - x')]q(x')\cos(\chi x')$$
$$+ \frac{1}{\chi^2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x' \sin[\chi(\pi - x')]q(x')$$
$$\times \int_0^{x'} \mathrm{d}x'' \sin[\chi(x' - x'')]q(x'')\cos(\chi x''), \qquad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x} \approx \cos(\chi x) + \frac{1}{\chi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x' \cos[\chi(\pi - x')]q(x')\sin(\chi x')$$
$$+ \frac{1}{\chi^2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x' \cos[\chi(\pi - x')]q(x')$$
$$\times \int_0^{x'} \mathrm{d}x'' \sin[\chi(x' - x'')]q(x'')\sin(\chi x''). \qquad (12)$$

Если подставить (11), (12) в уравнение (10), из которого определяются СЗ, то после некоторых преобразований получим

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi)}{\mathrm{d}x} + \phi(\pi,\chi) - 2 = 2[\cos(\chi\pi) - 1] + \frac{A_{-1}}{\chi}\sin(\chi\pi)$$
$$+ \frac{A_{-2}(\chi)}{\chi^2}, \qquad (13)$$

где

$$A_{-1} = \int_0^{\pi} q(x')\mathrm{d}x';$$
$$A_{-2}(\chi) = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x' q(x') \int_0^{x'} \mathrm{d}x'' \sin[\chi(x' - x'')] \qquad (14)$$
$$\times \sin[\chi(\pi - x' + x'')]q(x'').$$

Порядок величины $A_{-2}(\chi)$ равен $O(1/\chi)$, что следует из свойств преобразования Фурье достаточно гладкой функции $q(x)$. Корни уравнения (10) с учетом (13) могут быть найдены в том же приближении: $\chi_n\pi = 2\pi n + \delta_n$ ($n = 0, 1, 2, ...$). Подстановка этого выражения в (10) дает возможность получить приближенное уравнение относительно δ_n:

$$0 = 2[\cos(\chi_n\pi) - 1] + \frac{A_{-1}}{\chi_n}\sin(\chi_n\pi) + \frac{A_{-2}(\chi_n)}{\chi_n^2}$$
$$\approx -\delta_n^2 + \frac{A_{-1}}{2\pi n}\delta_n + \frac{A_{-2}(2\pi n)}{(2\pi n)^2}.$$

Отсюда получим два значения малой поправки $\delta_n^{\pm}$:

$$\delta_n^{\pm} = \frac{1}{2\pi n}\left\{\frac{A_{-1}}{2} \pm \left[\left(\frac{A_{-1}}{2}\right)^2 + A_{-2}(2\pi n)\right]^{1/2}\right\}. \qquad (15)$$

Порядок этих поправок равен $O(1/\chi)$, но в них учтены и составляющие порядка $O(1/\chi^2)$. Из (15) следует, что СЗ образуют две серии дискретных действительных значений:

$$\chi_n^{\pm} = 2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\frac{A_{-1}}{2} \pm \delta_{n0},$$
$$\delta_{n0} = \frac{1}{2\pi n}\left[\left(\frac{A_{-1}}{2}\right)^2 + A_{-2}(2\pi n)\right]^{1/2}. \qquad (16)$$

Распадение спектрального множества на две серии СЗ находится в полном соответствии с известной теоремой общей спектральной теории (см., напр., [3]). В то же время найденная нами точность асимптотики выше, чем в известных работах общего характера, и достаточна для получения физически значимых результатов. Из представления (16) следует, что СЗ образуют дуплеты с центрами в точках

$$\chi_{n0} = 2\pi n + \frac{1}{2n}\frac{A_{-1}}{2\pi} \qquad (17)$$

при расщеплении в дуплете

$$\Delta\chi_n = \frac{2}{\pi}\delta_n = \frac{1}{\pi n}\left[\left(\frac{A_{-1}}{2}\right)^2 + A_{-2}(2\pi n)\right]^{1/2}. \qquad (18)$$

Формулы (17), (18) могут быть конкретизированы, если учесть явное выражение (14) для $A_{-2}(\chi)$. В приближении $\chi_n^{\pm} = 2\pi n$ получим

$$A_{-2}(2\pi n) = -\int_0^{\pi} \mathrm{d}x' q(x') \int_0^{x'} \mathrm{d}x'' \sin^2\left[2\pi n(x' - x'')\right]q(x'')$$
$$\approx -\frac{1}{4}A_{-1}^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(q_{2\mathrm{c}}^2 + q_{2\mathrm{s}}^2),$$

где

$$q_{2\mathrm{c}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q(x'')\cos(4\pi n x'')\mathrm{d}x'';$$
$$q_{2\mathrm{s}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q(x'')\sin(4\pi n x'')\mathrm{d}x''. \qquad (19)$$

Таким образом, расщепление в дуплете СЗ существенно зависит от амплитуд синусной (нечетной) и косинусной (четной) гармоник с пространственной частотой $4\pi n$ в разложении периодической функции $q(x)$ в ряд Фурье. Отсюда, используя (18), нетрудно получить, что

$$2\Delta\chi_n = \frac{1}{4\pi n}\left(q_{2\mathrm{c}}^2 + q_{2\mathrm{s}}^2\right)^{1/2}. \qquad (20)$$

В случае однородного резонатора $q(x) = \mathrm{const}$, амплитуды всех гармоник обращаются в нуль и расщепления во всех дуплетах (т. е. собственно дуплеты) исчезают, как это и должно быть в отсутствие невзаимности.

4. Найдем асимптотические выражения для СФ спектральной задачи (2), (6). В математической литературе (см., напр., [3]) предлагается вместо задачи с граничными условиями (6) решать две другие задачи с измененными нулевыми граничными условиями регулярного типа [4]. Такой путь достаточно сложен, поэтому здесь предложен другой, чисто формальный (без строгого математического обоснования) подход, вполне приемлемый для физических приложений. Он интуитивно понятен, легко воспроизводим и может применяться в других аналогичных ситуациях. Для дальнейшего достаточно искать СФ в приближении $O(1/\chi)$. Очевидно, что СФ, соответствующая $\chi_n^{\pm}$, определена с точностью до произвольной постоянной c_2:

$$u_n^{\pm}(x) = c_2\left[\frac{c_1}{c_2}\phi(x,\chi_n^{\pm}) + \chi_n^{\pm}\theta(x,\chi_n^{\pm})\right]. \qquad (21)$$

Отношение c_1/c_2, которое назовем коэффициентом распределения, однозначно находится из граничных условий, т. е. из системы уравнений (9) при нулевом определителе матрицы ее коэффициентов:

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_n^{\pm} = \frac{\chi_n^{\pm}\theta(\pi,\chi_n^{\pm})}{1-\phi(\pi,\chi_n^{\pm})}.$$

Вронскиан ФСР в точке $x = 0$ равен 1, поэтому он равен 1 тождественно. Отсюда следует возможность переписать последнее равенство в другой форме:

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_n^{\pm} = -\frac{\chi_n^{\pm}\theta(\pi,\chi_n^{\pm})}{1-\mathrm{d}\theta(\pi,\chi_n^{\pm})/\mathrm{d}x}. \tag{22}$$

Приведем необходимые для вычисления асимптотические оценки. Из (8) следует, что

$$\chi_n^{\pm}\theta(\pi,\chi_n^{\pm}) \approx \sin(\chi_n^{\pm}\pi) + \frac{1}{\chi_n^{\pm}}\int_0^{\pi}\sin\left[\chi_n^{\pm}(\pi-x')\right]q(x')\sin(\chi_n^{\pm}x')\mathrm{d}x'.$$

Использовав оценку (16), получим отсюда асимптотику

$$\chi_n^{\pm}\theta(\pi,\chi_n^{\pm}) \approx \pm\sin\delta_n + \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi}q(x')\sin(\pm\delta_n - 2\pi n x')\sin(2\pi n x')\mathrm{d}x'.$$

Последующие приближения и простые тригонометрические преобразования позволяют придать этому выражению окончательный вид:

$$\chi_n^{\pm}\theta(\pi,\chi_n^{\pm}) \approx \frac{1}{4\pi n}\frac{\pi}{2}\left[\pm\left(q_{2c}^2+q_{2s}^2\right)^{1/2}+q_{2c}\right]. \tag{23}$$

Из (12) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi_n^{\pm})}{\mathrm{d}x} = \cos(\chi_n^{\pm}\pi) + \frac{1}{\chi_n^{\pm}}\int_0^{\pi}\cos[\chi_n^{\pm}(\pi-x')]q(x')\sin(\chi_n^{\pm}x')\mathrm{d}x'.$$

Подстановка сюда использованного уже выше асимптотического представления (16) позволяет упростить это выражение:

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\pi,\chi_n^{\pm})}{\mathrm{d}x} = \cos\delta_n^{\pm} + \frac{1}{4\pi n}A_{-1}\left(\delta_n^{\pm}+\frac{\pi}{2}q_{2s}-\frac{\pi}{2}q_{2c}\delta_n^{\pm}\right) \approx 1+\frac{1}{4\pi n}A_{-1}\frac{\pi}{2}q_{2s}. \tag{24}$$

Подставив (23) и (24) в (22), получим

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_n^{\pm} = -\frac{1}{4\pi n}\left[\pm\frac{\pi}{2}\left(q_{2c}^2+q_{2s}^2\right)^{1/2}+\frac{\pi}{2}q_{2c}\right]\left(\frac{1}{4\pi n}\frac{\pi}{2}q_{2s}\right)^{-1} = -\frac{\pm\left(q_{2c}^2+q_{2s}^2\right)^{1/2}+q_{2c}}{q_{2s}}. \tag{25}$$

Для дальнейшего исследования коэффициента распределения (25) можно учесть специфику продольной неоднородности. Если можно выбрать такое опорное сечение $x = 0$, чтобы относительно него вспомогательная функция $q(x)$ была либо четной, либо мало отличалась от четной, то $|q_{2s}/q_{2c}| \ll 1$. В этом случае возможно дальнейшее упрощение (25):

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_n^{\pm} \approx -\frac{\pm q_{2c} \pm 2q_{2s}^2/q_{2c}+q_{2c}}{q_{2s}}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты распределения существенно различны для СЗ данного дуплета и различны также соответствующие СФ:

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_n^{-} = 2\frac{q_{2s}}{q_{2c}}, \quad u_n^{-}(x) = c_2\chi\theta(x,\chi) \equiv \sin(\chi_n^{-}x), \tag{26}$$

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_n^{+} = -2\left(\frac{q_{2c}}{q_{2s}}+\frac{q_{2s}}{q_{2c}}\right), \quad u_n^{+}(x) = c_2\phi(x,\chi_n^{+}) \equiv \cos(\chi_n^{+}x). \tag{27}$$

В (26) коэффициент распределения по модулю много меньше 1 (СФ близка к нечетной функции), а в (27) – много больше 1 (СФ близка к четной функции). Можно выписать и более точные выражения для СФ, что необходимо для их последующего использования:

$$u_n^{-}(x) \equiv 2q_{2s}(\cos\chi_n^{-}x)+q_{2c}\sin(\chi_n^{-}x),$$

$$u_n^{+}(x) \equiv -2q_{2c}\cos(\chi_n^{+}x)+q_{2s}\sin(\chi_n^{-}x). \tag{28}$$

Здесь СФ определены с точностью до постоянных, которые можно однозначно выбрать из условий обычной нормировки (на единицу) СФ. Нетрудно показать, что в обоих случаях эти постоянные равны $(2/\pi)^{1/2}$. Ортогональность действительных СФ понимается в обычном смысле. Она, как и вещественность СЗ, следует из общих теорем спектральной теории [3].

5. Из полученных результатов нетрудно сделать выводы о спектре собственных частот и модах КОР. Для этого достаточно использовать соотношения связи (3)–(5). Очевидно, что собственные частоты КОР образуют дискретную последовательность дуплетов

$$\omega_n^{\pm} = \frac{1}{\mu\varepsilon_0}\frac{1}{\Lambda}\chi_n^{\pm},$$

где СЗ $\chi_n^{\pm} = \chi_{n0} \pm \frac{1}{2}\Delta\chi_n$ определены формулами (17), (18), а оптическая длина резонатора Λ рассчитывается по формуле (5). Моды КОР представляют собой неоднородные стоячие (действительные) волны. Спектр простой, т.е. каждой собственной частоте соответствует только одна мода. Чтобы получить явное выражение для моды, используем подстановки (3), (4) в формулах (28) для СФ:

$$E_n^{\pm}(z) = Q^{-1/2}(z)u_n^{\pm}\left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^z Q(z)\mathrm{d}z\right). \tag{29}$$

Ортонормированность мод неоднородного КОР понимается не в том смысле, в каком понимается ортонормированность СФ. Пусть $E_{1,2}(z)$ – две моды, а $u_{1,2}(x)$ – соответствующие им СФ. С помощью выражений (3), (4) получим

$$\frac{1}{\Lambda}\int_0^L Q^2(z)E_1(z)E_2(z)\mathrm{d}z = \int_0^L u_1(x)u_2(x)\mathrm{d}x.$$

Следовательно, нормировка мод имеет вид

$$\frac{1}{\Lambda}\int_0^L q^2(z)E_{1,2}^2(z)\mathrm{d}z = 1,$$

а условие их ортогональности –

$$\int_0^L Q^2(z)E_1(z)E_2(z)\mathrm{d}z = 0.$$

6. Спектр частот одномерного КОР без потерь с произвольным неоднородным заполнением представляет собой дискретную последовательность дуплетов вещественных чисел, причем центры дуплетов с большой степенью точности соответствуют частотам однородного КОР с тем же периметром (скорректированным на средний коэффициент преломления). Получены асимптотические оценки собственных частот:

$$\omega_n^{\pm} = \frac{1}{\mu\varepsilon_0}\frac{1}{\Lambda}\chi_n^{\pm},$$

где $\chi_n^{\pm}$ определены формулами (16)–(18). Частотный интервал в каждом дуплете определяется формулой (18) и связан с амплитудой гармоники коэффициента преломления на безразмерной пространственной частоте, примерно равной $4\pi n$, где n – номер дуплета. Если основная частота (т. е. номер $n = n_0$) соответствует длине волны λ_0, то указанная комплексная амплитуда отвечает пространственной гармонике с длиной волны $\lambda_0/2$. Если стремиться приблизить неоднородный КОР к идеальному («просветление» резонатора), то желательно максимально подавить такую гармонику.

В том же приближении найден коэффициент распределения в моде неоднородного КОР (см. формулы (28), (29)). В некоторых частных случаях коэффициент распределения зависит только от отношения вещественной и мнимой частей указанной выше комплексной амплитуды, т. е. от ее фазы. Моды каждого дуплета в общем случае представляют собой стоячие волны, ортогональные в обобщенном смысле и почти ортогональные в обычном смысле (как синус и косинус). Если выполнены условия, при которых расщепление исчезает, спектр приближенно можно считать вырожденным, а соответствующие моды – бегущими волнами (хотя при точно вырожденном спектре их можно считать также ортогональными стоячими волнами или любой их линейной комбинацией).

Полученные в работе общие результаты достаточно универсальны и просты. Они без труда могут быть использованы при численных расчетах. Установлено, что найденные выражения справедливы, если наибольшее изменение диэлектрической проницаемости δ_{pl} происходит в переходном слое, размер которого

$$\Delta z > L\left(\frac{\delta_{\mathrm{pl}}}{\chi_{n_0}}\right)^{1/2} = \left(L\lambda_0\frac{\delta_{\mathrm{pl}}}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

В типичных условиях $\Delta z > 0.1$ мм, хотя это ограничение, на наш взгляд, можно сделать и менее жестким (полученные выражения будут справедливы и при меньших Δz).

Обычно численному эксперименту должен предшествовать качественный анализ. В рассматриваемом случае для подобного анализа можно использовать (и при этом даже обойтись без численного эксперимента) полученные в статье общие формулы. Существенным результатом является аналитическое определение условий, при которых расщепление спектра исчезает.

1. Судаков В.Ф. *Квантовая электроника*, **35** (12), 1146 (2008).
2. Судаков В.Ф. *Квантовая электроника*, **39** (2), 174 (2009).
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию* (М.: Наука, 1970, с. 34).
4. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* (М.: Наука,1969, гл. 1, § 1, 2).