

# Прохождение эванесцентных мод через субволновую апертуру цилиндрического волновода.

## 1. Приближение идеального металла

Т.И.Кузнецова, В.С.Лебедев

*Исследовано прохождение эванесцентной электромагнитной волны через субволновую апертуру диэлектрического цилиндрического волновода с металлическим покрытием. В приближении идеального металла разработан теоретический подход к описанию структуры поля в нановолноводе, учитывающий трансформацию первоначальной волны при ее отражении от выходной апертуры. Рассчитан комплексный коэффициент отражения закрытой волноводной моды от субволновой апертуры. Установлена зависимость структуры полей на выходе волновода от отношения его радиуса к длине световой волны и от диэлектрических проницаемостей сердцевины волновода и окружающей среды. Указаны условия возникновения плазмонного резонанса при наличии перед выходным отверстием нановолновода среды с отрицательной диэлектрической проницаемостью.*

**Ключевые слова:** эванесцентная электромагнитная волна, цилиндрический нановолновод, субволновая апертура, идеальный металл.

### 1. Введение

Интенсивное развитие нанооптики тесно связано с разработкой эффективных способов создания световых полей с субволновой локализацией [1, 2]. При работе с локализованными полями обнаруживаются новые аспекты ряда представлений, которые казались устоявшимися в традиционной оптике. Так, при рассмотрении взаимодействия оптических полей с наноструктурами новые оттенки приобретают такие понятия, как отражение света, пропускание, комплексный световой поток, импеданс. Выясняется также, что для анализа этих характеристик зачастую необходима разработка специальных методов исследования.

В данной работе изучаются особенности локализованных полей на примере следующей модельной задачи: полубесконечный цилиндрический волновод с круглым наноразмерным выходным отверстием, ведущим в открытое полупространство (рис. 1). Близкие задачи, связанные с прохождением света через отверстие субволнового размера, в течение многих лет обсуждались в литературе. Начало строгому исследованию данной проблемы было положено в работе [3], где рассматривалось падение плоской волны на бесконечно тонкий, идеально проводящий экран с малым круглым отверстием. Более полное решение этой задачи приведено в [4]. Позднее появились работы, в которых изучалась несколько иная геометрия. Рассматривалось падение световой волны извне на торец цилиндрического волновода круглого сечения [5] и на ко-

нический волновод [6]. Исследовалось прохождение волны по открытому двумерному волноводу, представляющему собой щель, которая сужается к выходу, ведущему в свободное пространство [7], прохождение излучения по волноводу пирамидальной формы [8] и выход света из конического волновода в открытое пространство [9]. Рассматривалось падение волны на экран конечной толщины, соединенный с волноводом [10], а также прохождение света через заполненную рефрактивной средой субволновую круглую апертуру в металлической пленке [11–15]. В серии наших работ изучалась структура поля и эффективность пропускания света сужающимися до нанометровых размеров волноводами, заполненными диэлектрической [16–18] или полупроводниковой [19–22] средой.

Напомним, что ранние работы [3, 4], значимые с общетеоретической точки зрения, были важны и в прикладном аспекте для задач, связанных с СВЧ резонаторами. Что же касается более поздних работ по «просачиванию» излучения через малое отверстие, то они были нацелены на моделирование оптических зондов, применяемых в микроскопии ближнего поля. При этом в разных работах моделировались варианты как локального облучения ис-



Рис. 1. Схематическое изображение поперечного сечения цилиндрического волновода с металлическим покрытием:  $2a$  – диаметр выходной апертуры,  $\epsilon$ ,  $\epsilon_m$  и  $\epsilon_0$  – диэлектрические проницаемости сердцевины волновода, металлических стенок и окружающей среды.

Т.И.Кузнецова. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: tkuzn@sci.lebedev.ru

В.С.Лебедев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9; email: vlebedev@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 12 августа 2008 г.

следуемого объекта (illumination mode), так и регистрации локального отклика, возникающего при облучении объекта протяженным источником (collection mode). Разные способы осуществления того или иного варианта приводили к исследованию разных геометрических схем; существенно различной была и применяемая математическая техника.

С точки зрения теории наиболее сложным моментом в таких задачах является анализ поведения полей на стыке области субволновой локализации и макроскопической области. В указанных выше работах, за исключением [3, 4], этому вопросу либо не уделялось внимания, либо, если он исследовался, как в [7], то рассмотрение проводилось на основе отдельных численных расчетов для волновода с конкретными параметрами и при определенной длине световой волны. Поэтому не было возможности оценить роль и масштаб эффектов, возникающих на границе, при варьировании геометрических и диэлектрических характеристик схемы.

Прежде чем перейти к изложению материала, следует напомнить об исследованиях открытых волноводов, выполненных Л.А.Вайнштейном [23]. На первый взгляд, эти исследования представляются очень близкими по постановке к задачам по оптическим зондам. Однако работа [23] относится к распространяющимся, а не эванесцентным волнам в волноводе. В связи с этим результаты [23] нельзя напрямую перенести на закритические волноводы, а именно такие волноводы представляют интерес для нанооптики.

Ниже будет изложен подход, основанный на разработанной технике сопряжения полей на границе волновода и свободного пространства. Предлагаемый метод демонстрирует возможность введения удобной характеристики, учитывающей роль указанной границы, – коэффициента отражения исходного поля от апертуры. Будет показано, что, по существу, достаточно вычислить единственный коэффициент, для того чтобы с хорошей точностью описать все основные характеристики электромагнитного поля внутри и снаружи волновода.

## 2. Характеристики полей в бесконечном волноводе и в свободном пространстве

Приведем основные выражения, определяющие структуру монохроматического электромагнитного поля в цилиндрическом круглом волноводе. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  мы будем опускать и везде в дальнейшем будем использовать цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, z$ . Основные формулы для поперечно-магнитных (ТМ<sub>mn</sub>) и поперечно-электрических (ТЕ<sub>mn</sub>) мод цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками можно найти в монографиях [24, 25]. В общем случае удобно выражать поля через электрический и магнитный потенциалы Герца. Однако в данной статье мы будем рассматривать только поперечно-магнитные моды ТМ<sub>0n</sub> с азимутальным волновым числом  $m = 0$ . При этом лишь три компоненты поля,  $\tilde{E}_\rho, \tilde{E}_z$  и  $\tilde{H}_\varphi$ , отличны от нуля, и можно записать компактные выражения для полей, не прибегая к использованию потенциала Герца. Поля выражаются через функцию Бесселя нулевого порядка  $J_0(x)$  и ее производную  $J_1(x)$ :

$$\tilde{E}_\rho = CJ_1(q\rho) \exp\left[-z\left(q^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right], \quad (1)$$

$$\tilde{E}_z = q\left(q^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{-1/2} CJ_0(q\rho) \exp\left[-z\left(q^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varphi = & -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\left(q^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{-1/2} CJ_1(q\rho) \\ & \times \exp\left[-z\left(q^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $q \equiv q_n = \xi_n/a$  – поперечное волновое число;  $\xi_n$  –  $n$ -й корень, при котором функция Бесселя  $J_0(x)$  обращается в нуль ( $\xi_1 = 2.4048, \xi_2 = 5.5201, \xi_3 = 8.6537, \dots$ );  $a$  – радиус сердцевинного волновода;  $C$  – константа;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость сердцевинного волновода. В свободном пространстве мы также будем рассматривать поля поперечно-магнитного типа с такой же угловой структурой, как и в волноводе. При этом выражения для полей остаются прежними (формулы (1)–(3)), только отсутствуют ограничения на поперечные волновые числа (они могут быть произвольными).

## 3. Поля в полубесконечном цилиндрическом волноводе и в открытом пространстве

Чтобы дать строгое описание полей в полубесконечном волноводе, сопряженном с открытым полупространством, мы должны «сшить» поля в волноводе и в свободном пространстве на апертуре, т.е. добиться равенства тангенциальных компонент электрического и магнитного полей при  $z = 0$ . Для этого потребуются включить в рассмотрение все поперечно-магнитные волноводные моды (с  $m = 0, n = 1, 2, 3, \dots$ ), а в свободном пространстве использовать интеграл по непрерывному набору волновых чисел. При этом компоненты поля внутри волновода будут задаваться формулами

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\rho = & C\left\{J_1(q_1\rho) \exp\left[-z\left(q_1^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_1(q_n\rho) \exp\left[z\left(q_n^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z = & C\left\{J_0(q_1\rho)\left(q_1^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{-1/2} \exp\left[-z\left(q_1^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q_n J_0(q_n\rho)\left(q_n^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{-1/2} \right. \\ & \left. \times \exp\left[z\left(q_n^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varphi = & -i\frac{\omega}{c}\varepsilon C\left\{J_1(q_1\rho)\left(q_1^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{-1/2} \right. \\ & \times \exp\left[-z\left(q_1^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_1(q_n\rho)\left(q_n^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{-1/2} \\ & \left. \times \exp\left[z\left(q_n^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha_n$  – коэффициент трансформации исходной моды в моду с индексом  $n$ . Выражения для полей вне волновода имеют вид интегралов по поперечным волновым числам  $\kappa$ :

$$E_\rho = \int_0^\infty \exp \left[ iz \left( \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} - \kappa^2 \right)^{1/2} \right] J_1(\kappa \rho) B(\kappa) \kappa d\kappa, \quad (7)$$

$$E_z = \int_0^\infty \exp \left[ iz \left( \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} - \kappa^2 \right)^{1/2} \right] \frac{\kappa J_0(\kappa \rho) B(\kappa)}{\gamma(\kappa)} \kappa d\kappa, \quad (8)$$

$$H_\varphi = -i \frac{\omega \varepsilon_0}{c} \int_0^\infty \exp \left[ iz \left( \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} - \kappa^2 \right)^{1/2} \right] \frac{J_1(\kappa \rho) B(\kappa)}{\gamma(\kappa)} \kappa d\kappa. \quad (9)$$

Здесь

$$\gamma(\kappa) = \begin{cases} -i \left( \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} - \kappa^2 \right)^{1/2} & \text{при } \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} > \kappa^2, \\ \left( \kappa^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \right)^{1/2} & \text{при } \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \leq \kappa^2; \end{cases} \quad (10)$$

$B(\kappa)$  – коэффициент разложения. Таким образом, мы имеем два набора выражений для полей: для внутренней области волновода и для внешней. Эти формально различные выражения должны быть согласованы так, чтобы в плоскости выходного отверстия выполнялись стандартные граничные условия.

#### 4. Согласование полей на границе волновода и свободного пространства

Для рассматриваемого типа мод граничные условия имеют вид

$$E_\rho(\rho, 0) = \tilde{E}_\rho(\rho, 0), \quad H_\varphi(\rho, 0) = \tilde{H}_\varphi(\rho, 0) \quad (\rho < a). \quad (11)$$

Будем предполагать, что к выходному отверстию волновода примыкает идеально проводящий фланец, который простирается от  $\rho = a$  до  $\rho = \infty$ , и считать, что  $E_\rho = 0$  на поверхности фланца.

Подставим теперь  $z = 0$  в выражения (4) и (7) для компонент  $\tilde{E}_\rho(\rho, z)$  и  $E_\rho(\rho, z)$  и потребуем выполнения первого из граничных условий (11). При этом получим следующее выражение для коэффициентов разложения Фурье – Бесселя полей во внешнем пространстве:

$$B(\kappa) = C \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n1} + \alpha_n) b_n(\kappa). \quad (12)$$

Здесь использована формула

$$J_1(q_n \rho) \theta(a - \rho) = \int_0^\infty b_n(\kappa) J_1(\kappa \rho) \kappa d\kappa, \quad (13)$$

где коэффициенты  $b_n$  выражаются через интегралы:

$$b_n(\kappa) = \int_0^a J_1(q_n \rho) J_1(\kappa \rho) \rho d\rho = J_1(q_n a) \frac{\kappa a J_0(\kappa a)}{q_n^2 - \kappa^2}; \quad (14)$$

$\theta(a - \rho)$  – ступенчатая функция Хевисайда ( $\theta(a - \rho) = 0$  при  $a > \rho$  и  $\theta(a - \rho) = 1$  при  $\rho \leq a$ ). С учетом выбранных значений  $q_n$  интегрирование в (14) дает приведенное выражение для  $b_n(\kappa)$ . Теперь можно записать выражение (9) для  $H_\varphi$  в виде

$$H_\varphi(\rho, 0) = -i \frac{\omega \varepsilon_0}{c} C \int_0^\infty \frac{1}{\gamma(\kappa)} \times \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n1} + \alpha_n) b_n(\kappa) J_1(\kappa \rho) \kappa d\kappa. \quad (15)$$

Подставляя (15) во второе из граничных условий (11), получаем

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n1} - \alpha_n) \left( q_n^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{-1/2} J_1(q_n \rho) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \frac{1}{\gamma(\kappa)} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n1} + \alpha_n) b_n(\kappa) J_1(\kappa \rho) \kappa d\kappa. \quad (16)$$

Далее умножаем обе части равенства (16) на множитель  $J_1(q_p \rho)$  и интегрируем по  $\rho d\rho$  в пределах от 0 до  $a$ . Отметим, что бесселевы функции для неравных значений  $n$  и  $p$  оказываются ортогональными, поскольку они являются собственными функциями краевой задачи третьего рода (удовлетворяют уравнению Бесселя первого порядка и условию на границе  $\partial \psi / \partial \rho + a^{-1} \psi = 0$  при  $\rho = a$ ). С учетом ортогональности функций после интегрирования получаем

$$\varepsilon (\delta_{p1} - \alpha_p) \left( q_p^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{-1/2} \int_0^a J_1^2(q_p \rho) \rho d\rho \quad (17)$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n1} + \alpha_n) \int_0^a J_1(q_p \rho) \rho d\rho \int_0^\infty b_n(\kappa) J_1(\kappa \rho) \frac{\kappa}{\gamma(\kappa)} d\kappa.$$

Изменим порядок интегрирования в правой части формулы (17), затем воспользуемся соотношением (14) для коэффициентов  $b_n$ , а также следующим выражением для интеграла в левой части (17):

$$\int_0^a J_1^2(q_n \rho) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} J_1^2(q_n a), \quad (18)$$

которое справедливо в силу того, что в нашем случае выполняется условие  $J_0(q_n a) = 0$ . В итоге получаем точную систему уравнений для определения коэффициентов  $\alpha_p$  при эванесцентных модах, возникающих вследствие трансформации исходной волны  $\text{TM}_{01}$ :

$$\varepsilon (\delta_{p1} - \alpha_p) \left( q_p^2 a^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{-1/2} = 2\varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n1} + \alpha_n) \frac{J_1(q_n a)}{J_1(q_p a)} I_{np}. \quad (19)$$

Вещественная и мнимая части интеграла  $I_{np} = \text{Re } I_{np} + i \text{Im } I_{np}$  в (19) даются формулами

$$\text{Re } I_{np} = \int_{\varepsilon_0^{1/2} \omega a / c}^{\infty} \frac{[x J_0(x)]^2}{(q_n^2 a^2 - x^2)(q_p^2 a^2 - x^2)} \times x \left( x^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \right)^{-1/2} dx, \quad (20)$$

$$\text{Im } I_{np} = \int_0^{\varepsilon_0^{1/2} \omega a / c} \frac{[x J_0(x)]^2}{(q_n^2 a^2 - x^2)(q_p^2 a^2 - x^2)} \times x \left( a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} - x^2 \right)^{-1/2} dx. \quad (21)$$

Величины (20) и (21) играют ключевую роль при расчете отражения и пропускания волн в волноводе с выходным отверстием субволнового размера. Отметим, что при  $ka < 1$  ( $k = \omega \varepsilon_0^{1/2}/c$  – волновое число), абсолютные значения интегралов  $I_{np}$  удовлетворяют соотношению  $|I_{np}| \ll |I_{nn}|$  при  $n \neq p$ . Кроме того, мнимые части интегралов  $I_{np}$  значительно меньше вещественных частей ( $\text{Im } I_{np} \ll \text{Re } I_{np}$ ). При  $n = p$  имеют место асимптотические формулы

$$\text{Im } I_{nn} = \frac{2}{3\xi_n^4} (ka)^3 \quad (ka \ll 1), \quad (22)$$

а для абсолютного значения интеграла  $I_{nn}$  можно дать приближенную оценку:

$$|I_{nn}| \approx \left[ 2 \left( q_n^2 a^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (23)$$

Точные значения  $\text{Re } I_{nn}$  и  $\text{Im } I_{nn}$  рассчитывались численно, и именно они использовались для получения последующих результатов.

### 5. Построение решения

Перейдем к построению решения системы уравнений (19). Для получения первого приближения к решению возьмем такую систему уравнений, в которой все недиагональные коэффициенты  $I_{np}$  ( $n \neq p$ ) заменены нулями. Из такой системы следует, что

$$(1 - \alpha_1)\varepsilon \left( q_1^2 a^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{-1/2} = 2\varepsilon_0(1 + \alpha_1)I_{11}, \quad (24)$$

$$-\alpha_p \varepsilon \left( q_p^2 a^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{-1/2} = 2\varepsilon_0 \alpha_p I_{pp}. \quad (25)$$

Таким образом, в первом приближении коэффициент отражения  $\alpha_1$  имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{1 - G}{1 + G}, \quad G = 2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} I_{11} \left( q_1^2 a^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

тогда как все остальные коэффициенты обращаются в нуль:

$$\alpha_n = 0 \quad (n \neq 1). \quad (27)$$

Нами также было построено второе приближение к решению системы уравнений (19) для коэффициентов  $\alpha_p$ . Показано, что коэффициент  $\alpha_1$  во втором приближении получает лишь малые поправки. Расчеты проводились в широком интервале значений отношения радиуса апертуры к длине волны ( $0 \leq ka \leq \xi_1 = 2.4048$ ). Установлено, что относительные погрешности при вычислении вещественной,  $(\text{Re } \alpha_1^{(2)} - \text{Re } \alpha_1^{(1)})/\text{Re } \alpha_1^{(2)}$ , и мнимой,  $(\text{Im } \alpha_1^{(2)} - \text{Im } \alpha_1^{(1)})/\text{Im } \alpha_1^{(2)}$ , частей коэффициента отражения, найденных в первом приближении, не превышают соответственно 6% и 5%. Что же касается модулей коэффициентов при высших модах, то они оказываются значительно меньше модуля  $\alpha_1$ . В связи с этим можно считать, что полученная в первом приближении формула (26) для коэффициента  $\alpha_1$  дает хорошее приближение к точному решению задачи. На этом приближении будет основываться дальнейшее изучение проблемы. Здесь отметим,

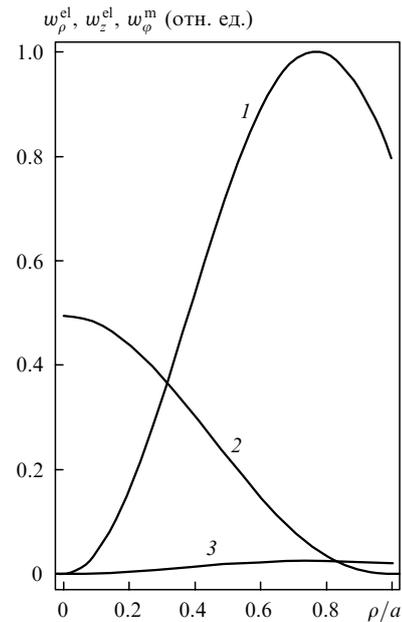


Рис.2. Плотности энергии компонент поля  $w_\rho^{\text{el}}$  (1),  $w_z^{\text{el}}$  (2),  $w_\phi^{\text{m}}$  (3) на выходе ( $z = 0$ ) цилиндрического волновода в зависимости от безразмерной поперечной координаты  $\rho/a$ . Расчеты выполнены для волноводной моды  $\text{TM}_{01}$  при  $\omega a \varepsilon_0^{1/2}/c = \pi/5$ ,  $\varepsilon = 2.25$  и  $\varepsilon_0 = 1$ .

что согласно общим формулам (4)–(6) в указанном приближении усредненные по времени плотности энергии различных компонент электрического ( $w^{\text{el}} = (\varepsilon/16\pi)|\mathbf{E}|^2$ ) и магнитного ( $w^{\text{m}} = (\mu/16\pi)|\mathbf{H}|^2$ ,  $\mu = 1$ ) полей на выходе волновода ( $z = 0$ ) в зависимости от поперечной координаты  $\rho$  определяются для моды  $\text{TM}_{01}$  выражениями

$$w_\rho^{\text{el}} = \frac{\varepsilon}{16\pi} |C|^2 |1 + \alpha_1|^2 J_1^2(q_1 \rho), \quad (28)$$

$$w_z^{\text{el}} = \frac{\varepsilon |C|^2 |1 - \alpha_1|^2 q_1^2 J_0^2(q_1 \rho)}{16\pi(q_1^2 - \omega^2 \varepsilon/c^2)},$$

$$w_\phi^{\text{m}} = \left( \frac{\omega \varepsilon^{1/2}}{c} \right)^2 \frac{\varepsilon |C|^2 |1 - \alpha_1|^2 J_1^2(q_1 \rho)}{16\pi(q_1^2 - \omega^2 \varepsilon/c^2)}. \quad (29)$$

Зависимости  $w_\rho^{\text{el}}$ ,  $w_z^{\text{el}}$  и  $w_\phi^{\text{m}}$  от отношения  $\rho/a$  приведены на рис.2.

### 6. Коэффициент отражения

Напомним, что коэффициент  $\alpha_1$ , полученный в предыдущем разделе, соответствует преобразованию первоначальной затухающей моды  $\text{TM}_{01}$  в отраженную моду (имеющую ту же поперечную структуру и инвертированную зависимость поля от координаты  $z$ ). При этом коэффициенты преобразования во все прочие моды оказываются пренебрежимо малыми. Естественно поэтому называть коэффициент  $\alpha_1$  коэффициентом отражения. Отметим некоторые его свойства. Мы сосредоточим внимание на случае, когда диэлектрические проницаемости  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$  являются вещественными и положительными. Очевидно, что при  $\text{Re } \alpha_1 \approx 1$  имеется пучность тангенциальной компоненты  $E_\rho$  электрического поля на выходе волновода ( $z = 0$ ) и узел для компонент  $E_z$  и  $H_\phi$  (см. (4)–(6)). Напротив, значение  $\text{Re } \alpha_1 \approx -1$  соответствовало бы пучности компонент  $H_\phi$  и  $E_z$  и узлу для компоненты  $E_\rho$ . Мнимая часть коэффициента отражения  $\text{Im } \alpha_1$  непосред-

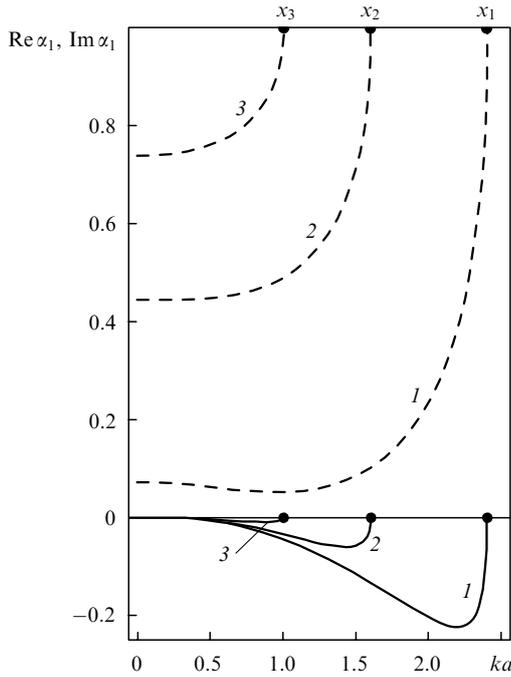


Рис.3. Действительная (штриховые кривые) и мнимая (сплошные кривые) части амплитудного коэффициента отражения  $\alpha_1$  эванесцентной волны от выходной апертуры нановолновода в зависимости от величины  $ka$  при  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2} = 1$  (1), 1.5 (2), 2.4 (3) и  $\varepsilon_0 = 1$ . Номера точек  $x_j$  ( $j = 1 - 3$ ) соответствуют номерам кривых.

ственно связана с потоком энергии в волноводе и, следовательно, с потоком в дальнюю зону (см. разд.7). Отметим, что из (22), (26) следует простая асимптотическая формула для коэффициента отражения при малых значениях  $ka$ . В частности, для полого волновода при  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$  и  $ka \ll 1$  получаем

$$\operatorname{Re} \alpha_1 = 0.0724, \quad \operatorname{Im} \alpha_1 = -0.0551(ka)^3. \quad (30)$$

Характерный вид зависимостей действительной и мнимой частей коэффициента отражения  $\alpha_1$  эванесцентной волны ( $0 \leq ka \leq \xi_1$ ) от величины  $ka$  показаны на рис.3 (кривые 1). Видно, что при  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$  действительная часть коэффициента отражения слабо зависит от  $ka$  во всей субволновой области вплоть до  $ka \sim 1$ . Сильные изменения начинаются только при  $ka \approx 1.5$ , когда аргумент начинает приближаться к собственному значению  $\xi_1 = q_1 a$  моды  $\text{TM}_{01}$ . В отличие от этого мнимая часть  $\alpha_1$  сильно изменяется с ростом  $ka$  уже в окрестности нулевого значения аргумента, достигает минимума при  $ka = 2.2$ , затем возрастает и обращается в нуль при  $ka = \xi_1$ .

Рассмотренный здесь коэффициент отражения эванесцентной волны  $\text{TM}_{01}$  от субволновой апертуры полого волновода будет использоваться в разд.8 при обсуждении зависимости характеристик полей от диэлектрической проницаемости сердцевины волновода.

## 7. Комплексный поток и поток энергии в закритическом открытом волноводе

Закритическая мода в бесконечном цилиндрическом волноводе, очевидно, не несет энергетического потока. В затухающей волноводной моде комплексные амплитуды тангенциальных компонент электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ , так что электромаг-

нитный поток оказывается чисто мнимой величиной. Вместе с тем в случае усеченного волновода исходная мода на его выходе частично трансформируется в отраженную, что меняет фазовые соотношения компонент суммарного поля.

Выразим комплексный электромагнитный поток  $j$  на выходном отверстии через найденный коэффициент отражения  $\alpha_1$ . Для рассматриваемого нами поля (монохроматическое поле с компонентами, не зависящими от угловой переменной) поток через площадку размером  $\pi a^2$  выражается через усредненный по времени комплексный вектор Пойнтинга  $\mathbf{P}$ , проинтегрированный по поверхности (см., напр., [24, 25]):

$$j = 2\pi \int_0^a P_z \rho d\rho, \quad \mathbf{P} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (31)$$

Возьмем выражения для полей (4), (6) и, в соответствии с результатами разд.5, положим в них  $\alpha_n = 0$  при  $n \neq 1$ . Подставляя эти выражения в (31) и проводя интегрирование с учетом (18), получаем формулу для потока. Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что при вычислении используются компоненты поля  $\tilde{E}_\rho$  и  $\tilde{H}_\varphi$  внутри волновода, ниже мы обозначим соответствующий комплексный поток через  $\tilde{j}$ . Формула для  $\tilde{j}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{j} &= \frac{c}{4} \int_0^a \tilde{E}_\rho(\rho, 0) \tilde{H}_\varphi^*(\rho, 0) \rho d\rho = i\omega\varepsilon |C|^2 (1 + \alpha_1)(1 - \alpha_1^*) \\ &\times a^3 J_1^2(\xi_1) \left[ 8 \left( \xi_1^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Поток энергии определяется вещественной частью комплексного потока (32) и выражение для него имеет вид

$$\operatorname{Re} \tilde{j} = -\omega\varepsilon \frac{a^3}{4} |C|^2 J_1^2(\xi_1) \left( \xi_1^2 - a^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)^{-1/2} \operatorname{Im} \alpha_1. \quad (33)$$

Формула (33) показывает, что в усеченном волноводе энергетический поток отличен от нуля только при отличной от нуля мнимой части коэффициента отражения. Итак, поток энергии в волноводе и, следовательно, поток в дальнюю зону пропорциональны мнимой части коэффициента  $\alpha_1$ . Напомним, что для определения плотности энергии поля в ближней зоне существенна реальная часть  $\alpha_1$ . Таким образом, коэффициент  $\alpha_1$  является весьма информативной характеристикой задачи. Он может служить основой для изучения других типов нановолноводов и других волноводных мод, а также для последующего обобщения теории на случай стенок волновода из реального металла.

## 8. Зависимость коэффициента отражения от диэлектрической проницаемости и величины $ka$

Обсудим теперь характеристики амплитудного коэффициента отражения в зависимости от диэлектрических констант сердцевины волновода ( $\varepsilon$ ) и окружающей среды ( $\varepsilon_0$ ), а также от отношения диаметра апертуры к длине волны излучения. Результаты наших расчетов зависимости  $\alpha_1$  от  $ka$  при различных  $\varepsilon$  представлены на рис.3. Диэлектрическая проницаемость свободного простран-

ства вне волновода полагалась равной единице ( $\varepsilon_0 = 1$ ), а показатель преломления сердцевины волновода  $n_w = \varepsilon^{1/2}$  составлял 1, 1.5 и 2.4. Последние два значения  $n_w$  соответствуют показателям преломления оптоволокна (или кристаллического кварца) и нитрида кремния. Поэтому проведенные расчеты связаны с прикладными задачами по ближнепольным оптическим зондам.

Приведенные на рис.3 кривые показывают, что зависимости вещественной и мнимой частей коэффициента отражения от величины  $ka$  для разных  $\varepsilon$  имеют качественное сходство. Однако конкретные значения  $\text{Re } \alpha_1$  и  $\text{Im } \alpha_1$  существенно отличаются от полученных для  $\varepsilon = 1$ . Иными словами, отношение  $\varepsilon/\varepsilon_0$  сильно влияет на  $\text{Re } \alpha_1$  и  $\text{Im } \alpha_1$ . Из сопоставления кривых следует, что величина  $\text{Re } \alpha_1$  при заданном  $ka$  сильно возрастает с увеличением отношения  $\varepsilon/\varepsilon_0$ . Например, в области малых значений  $ka$  для оптоволокна и нитрида кремния вещественная часть амплитудного коэффициента отражения превышает ту же величину, относящуюся к пустому волноводу, в 6.1 и 10.2 раза соответственно. Заметим также, что положение точек на оси  $ka$ , в которых  $\text{Re } \alpha_1$  достигает единицы, а  $\text{Im } \alpha_1$  обращается в нуль, определяется величинами  $x = ka = \xi_1(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}$ , где  $\xi_1 = 2.4048$ . При данном значении  $x$  происходит трансформация эванесцентной моды в распространяющуюся. На рис.3 отмечены такие точки ( $x_1, x_2, x_3$ ) для трех значений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ .

Из рис.3 видно, что при больших значениях  $\varepsilon/\varepsilon_0$  вещественная часть коэффициента отражения становится близкой к единице. Это по-разному влияет на плотность энергии на выходе волновода, связанную с различными компонентами поля. Для рассматриваемой здесь моды  $\text{TM}_{01}$  плотность энергии  $w_\rho^{\text{el}}$  (см. (28)), связанная с поперечной компонентой электрического поля  $E_\rho$  и пропорциональная  $|1 + \alpha_1|^2$ , может увеличиться приблизительно в четыре раза по сравнению с ее значением в невозмущенном волноводу. Вместе с тем плотности энергии магнитного поля  $H_\phi$  и продольной компоненты электрического поля  $E_z$ , которые пропорциональны  $|1 - \alpha_1|^2$  (см. (28) и (29)), стремятся к нулю при  $\alpha_1 \rightarrow 1$ . Указанные особенности в поведении различных компонент плотности энергии поля иллюстрирует рис.4, на котором приведены результаты расчетов зависимостей  $|1 + \alpha_1|^2$  и  $|1 - \alpha_1|^2$  от  $ka$  для полого волновода ( $n_w = 1$ ), для волноводов с сердцевиной из плавяного кварца ( $n_w = 1.5$ ) и сердцевиной из нитрида кремния ( $n_w = 2.4$ ), а также для волноводов из такого высокорепрактивного полупроводникового материала как кремний ( $n_w = 3.5$ ). Из этих расчетов следует, что на основной (при  $ka \ll 1$ ) вклад в интегральную плотность энергии ( $W_\rho = 2\pi \int_0^a w_\rho^{\text{el}} \rho d\rho$ ) отражение от выходной апертуры влияет так же, как и уменьшение затухания в закрытом волноводу при большой диэлектрической проницаемости его сердцевины [19–21]. На рис.4 указаны точки  $x_1 - x_4$ , в которых происходит трансформация эванесцентной моды в распространяющуюся, для четырех значений  $\varepsilon$ .

Отметим, что наш подход остается в силе и для отрицательных значений диэлектрической проницаемости внешней среды ( $\varepsilon_0 < 0$ ). В этом случае появляется интересная особенность в поведении коэффициента отражения  $\alpha_1$ . С физической точки зрения отрицательное значение  $\varepsilon_0/\varepsilon$  соответствует металлической среде на выходе волновода при положительном значении диэлектрической проницаемости его сердцевины ( $\varepsilon > 0$ ). Согласно

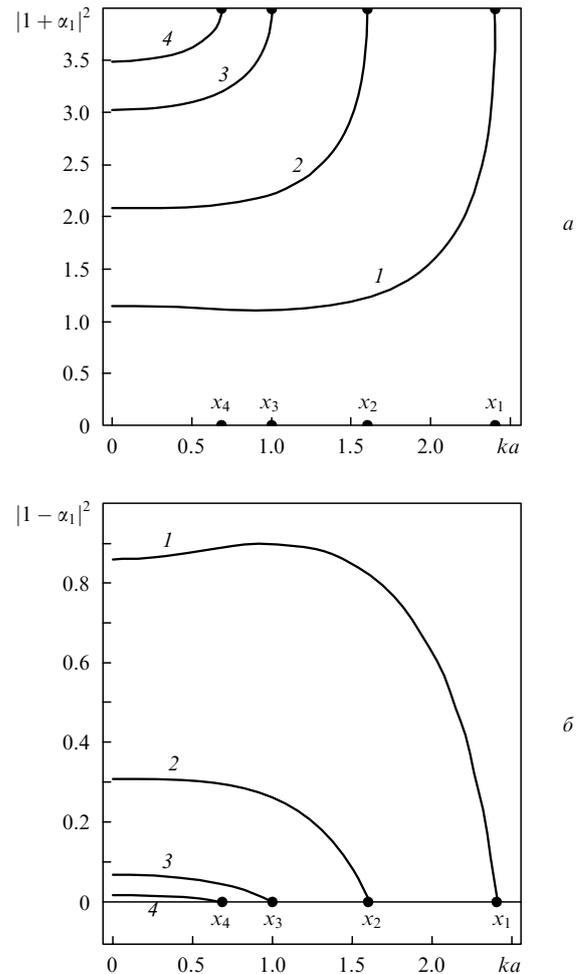


Рис.4. Зависимости от величины  $ka$  фактора  $|1 + \alpha_1|^2$ , определяющего отношение квадрата модуля поперечной компоненты электрического поля  $|E_\rho|^2$  (возмущенного отражением от субволновой апертуры усеченного волновода) к соответствующему значению  $|E_\rho^{(0)}|^2$  в волноводу бесконечной длины (а), а также фактора  $|1 - \alpha_1|^2$ , определяющего влияние субволновой апертуры на квадраты модулей продольной компоненты электрического поля и поперечной компоненты магнитного поля ( $|E_z/E_z^{(0)}|^2, |H_\phi/H_\phi^{(0)}|^2 \propto |1 - \alpha_1|^2$ ) (б) при  $(\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2} = 1$  (1), 1.5 (2), 2.4 (3) и  $\varepsilon_0 = 1$ . Номера точек  $x_j$  ( $j = 1 - 4$ ) соответствуют номерам кривых.

общей формуле (26), при условии  $G = -1$  в поведении величины  $\alpha_1$  возникает сингулярность. Это явление продемонстрировано на рис.5, где приведены результаты расчетов действительной части коэффициента отражения  $\alpha_1$  в зависимости от отношения  $\varepsilon_0/\varepsilon$ . Расчеты проведены для фиксированного положительного значения диэлектрической проницаемости сердцевины волновода  $\varepsilon$  и заданного отношения  $a\omega\varepsilon^{1/2}/c = \pi/5$ . Напомним, что действительная часть коэффициента  $\alpha_1$  не связана с энергетическим потоком. Увеличение  $\text{Re } \alpha_1$  означает увеличение плотности энергии поперечной компоненты электрического поля  $E_\rho$  в ближней зоне на выходе волновода. Мнимая часть  $\alpha_1$  равна нулю при  $\varepsilon_0/\varepsilon < 0$ . Следовательно, в рассматриваемом случае энергетический поток и коэффициент пропускания света в дальнюю зону равны нулю, поскольку обе эти величины пропорциональны  $\text{Im } \alpha_1$ .

Из рис.5 видно, что сингулярность в поведении  $\text{Re } \alpha_1$  возникает при  $\varepsilon_0/\varepsilon = -1.274$ . Эта сингулярность приводит к резкому возрастанию амплитуды (и, следовательно,

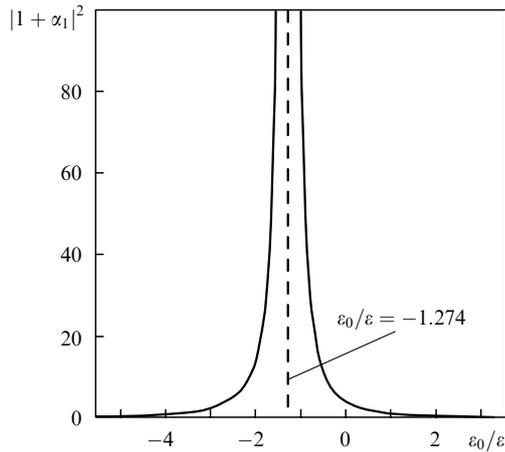


Рис.5. Зависимость квадрата модуля поперечной компоненты электрического поля при отражении от субволновой апертуры усеченного волновода ( $|E_\rho/E_\rho^{(0)}|^2 \propto |1 + \alpha_1|^2$ ) от отношения диэлектрических констант окружающей среды и сердцевинки волновода  $\epsilon_0/\epsilon$ , рассчитанная при фиксированном значении параметра  $\omega a \epsilon^{1/2}/c = \pi/5$ .

но, плотности энергии) поперечной компоненты электрического поля  $E_\rho \propto (1 + \alpha_1)$  по мере приближения  $\epsilon_0/\epsilon$  к указанному резонансному значению. Для волновода со стекловолоконной сердцевиной ( $n_w = 1.5$ ) резонанс возникает при диэлектрической проницаемости внешней среды  $\epsilon_0 = -2.866$ . Принимая во внимание конкретный вид зависимостей диэлектрических проницаемостей Ag и Au от длины волны в вакууме [26], получаем, что резонансное увеличение поля для Ag и Au происходит при  $\lambda = 370$  и  $505$  нм соответственно.

Отметим, что в нашем примере действительная часть коэффициента отражения  $\text{Re } \alpha_1$  стремится к бесконечности, поскольку мы рассматриваем бездиссипативную среду на выходе волновода. При учете мнимой части диэлектрической проницаемости металла на выходе волновода мы просто получим резкое (резонансное) возрастание амплитуды поля вместо сингулярности. Этот эффект аналогичен другим эффектам плазмонного резонанса (возникающим на границе металлической и диэлектрической сред), которые в последние годы активно обсуждались во многих работах по нанооптике (см. обзор [27]). Детальный анализ эффектов резонансного отражения эванесцентных волн от металлической подложки на выходе нановолновода будет предметом отдельной работы.

## 9. О применении граничного условия для комплексного потока в волноводных задачах

Исследование поставленной задачи проводилось выше на основе уравнений Максвелла и точных граничных условий для полей. При выводе системы уравнений (19) не использовались какие-либо приближения. После того как система (19) была получена, мы построили ее решение в первом и во втором приближениях и показали, что эти решения мало различаются. На этом основании мы оставили в качестве рабочей формулы равенство (26). Напомним, что этот результат непосредственно следовал из равенства (24), представляющего собой исходное уравнение в первом приближении. Покажем, какую интерпретацию можно дать этому равенству. Умножим обе части

(24) на множитель  $-i\omega c C^*(1 + \alpha_1^*)J_1^2(q_1 a)a^3/8$ , а затем перейдем к комплексно-сопряженным величинам. После этого окажется, что левая часть равенства в точности равна произведению множителя  $c/4$  на интеграл

$$\int_0^a \tilde{E}_\rho(\rho, 0) \tilde{H}_\phi^*(\rho, 0) \rho d\rho,$$

а правая часть – произведению  $c/4$  на интеграл

$$\int_0^a E_\rho(\rho, 0) H_\phi^*(\rho, 0) \rho d\rho.$$

Эти произведения совпадают с выражениями для комплексного светового потока, проинтегрированного по апертуре (см. определение (31)). При этом в левой части стоит интегральный поток, выраженный через поля, относящиеся к волноводу, а в правой – через поля во внешнем пространстве (эти потоки мы будем обозначать  $\tilde{j}$  и  $j$ ). Таким образом, уравнение (24) представляет собой равенство интегральных комплексных потоков, вычисленных при  $z = -0$  и  $z = +0$ :

$$\tilde{j} = j. \quad (34)$$

Очевидно, что если обеспечено выполнение условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе  $z = 0$ , то равенство (34) с необходимостью выполняется. Однако из непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля и условия (34) не следует непрерывность тангенциальной компоненты магнитного поля во всех точках выходной апертуры, т.е. условие (34) является более слабым, чем точное граничное условие для магнитного поля. Эквивалентность соотношений (24) и (34) означает, что если бы в исследуемом случае мы с самого начала заменили точное граничное условие для тангенциальной компоненты магнитного поля приближенным условием (34), то пришли бы к такому же результату, какой дает решение точной системы уравнений в первом приближении. Отсюда мы делаем вывод, что во многих более сложных волноводных задачах (другие типы волноводных мод, открытый волновод переменного сечения, случай неидеального металла на стенках) можно использовать условие равенства интегральных комплексных потоков на границе вместо условия непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля в каждой точке. Этот прием обещает существенное упрощение процедуры построения решения для указанных задач.

## 10. Выводы

В заключение кратко сформулируем результаты работы.

1. Разработан теоретический подход к исследованию пространственной структуры эванесцентных полей в усеченном волноводе и примыкающем к нему открытом пространстве. Показано, что в закритическом волноводном исходная волноводная мода преобразуется главным образом в моду с той же поперечной структурой и инвертированной зависимостью от продольной координаты.

2. Введен коэффициент отражения исходной эванесцентной волны. Получена его зависимость от радиуса волновода, длины волны и диэлектрических проницае-

мостей волновода и свободного пространства. Показано, что коэффициент отражения является очень малой величиной, если диэлектрическая проницаемость непрерывна на границе волновода и свободного пространства. Скачок диэлектрической проницаемости сильно увеличивает амплитуду отраженной волны и поле вблизи выходного отверстия волновода.

3. Рост отношения  $\varepsilon/\varepsilon_0$  диэлектрических проницаемостей сердцевин волновода ( $\varepsilon$ ) и внешней среды ( $\varepsilon_0$ ) приводит (при  $\varepsilon, \varepsilon_0 > 0$ ) к увеличению вещественной части коэффициента отражения  $\alpha_1$  и росту плотности энергии поля в ближней зоне. Величина  $\alpha_1$  приближается к единице при больших значениях  $\varepsilon/\varepsilon_0$ , что обеспечивает четырехкратное увеличение плотности энергии поперечной компоненты электрического поля  $\omega_p^{\text{el}} \propto |1 + \alpha_1|^2$  по сравнению со случаем невозмущенного волновода бесконечной длины. Это указывает на дополнительное преимущество использования ближнеполюсных оптических зондов с большой диэлектрической проницаемостью сердцевин, т. е. эффект действует так же, как и уменьшение длины затухания эванесцентных волн в закритическом сужающемся волноводе [19–22].

4. Показано, что в случае среды с отрицательной диэлектрической проницаемостью на выходе волновода при определенных частотах происходит резонансное увеличение амплитуды отраженной волны. Это является следствием возбуждения поверхностных плазмонов и может служить эффективным инструментом для измерения металлических свойств изучаемого объекта, расположенного на выходе зонда.

5. Основные расчеты были выполнены для поперечно-магнитных мод. Однако теория допускает обобщение на случай поперечно-электрических мод и на случай сужающихся волноводов, представляющих особый интерес для микроскопии ближнего поля. Важный момент состоит в возможности обобщения предлагаемого подхода на случай нановолноводов с покрытием из реального металла, что является предметом нашей следующей статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-02-01024 и 07-02-00873), РНПВШ (проект № 2.1.1/4294), а также программ «Оптическая спектроскопия и стандарты частоты» и «Когерентное оптическое излучение полупроводниковых соединений и структур» Отделения физических наук РАН.

1. Pohl D.W. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, **362**, 701 (2004).
2. Garcia de Abajo F.J. *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 1267 (2007).
3. Bethe H.A. *Phys. Rev.*, **66**, 163 (1944).
4. Bouwkamp C.J. *Rep. Prog. Phys.*, **17**, 35 (1954).
5. Roberts A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1970 (1987).
6. Roberts A. *J. Appl. Phys.*, **70**, 4045 (1991).
7. Novotny L., Pohl D.W., Regli P. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1768 (1994).
8. Knoll B., Keilmann F. *Opt. Commun.*, **162**, 177 (1999).
9. Drezet A., Woehl J.C., Huan S. *Phys. Rev. E*, **65**, 046611 (2002).
10. Alvarez L., Saucedo A., Xiao M. *Opt. Commun.*, **219**, 9 (2003).
11. Garcia de Abajo F.J. *Opt. Express*, **10**, 1475 (2002).
12. Lezec H.J., Thio T. *Opt. Express*, **12**, 3629 (2004).
13. Olkkonen J., Kataja K., Howe D.G. *Opt. Express*, **13**, 6980 (2005).
14. Garcia-Vidal F.J., Moreno E., Porto J.A., Martin-Moreno L. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 103901 (2005).
15. Webb K.J., Li J. *Phys. Rev. B*, **73**, 033401 (2006).
16. Кузнецова Т.И., Лебедев В.С. *Квантовая электроника*, **32**, 727 (2002).
17. Кузнецова Т.И., Лебедев В.С. *Квантовая электроника*, **33**, 931 (2003).
18. Kuznetsova T.I., Lebedev V.S., Tselvik A.M. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, 338 (2004).
19. Кузнецова Т.И., Лебедев В.С. *Письма в ЖЭТФ*, **79**, 70 (2004).
20. Кузнецова Т.И., Лебедев В.С. *Квантовая электроника*, **34**, 361 (2004).
21. Kuznetsova T.I., Lebedev V.S. *Phys. Rev. B*, **70**, 035107 (2004).
22. Лебедев В.С., Кузнецова Т.И., Витухновский А.Г. *Докл. РАН*, **410**, 749 (2006).
23. Вайнштейн Л.А. *Теория дифракции и метод факторизации* (М.: Сов. радио, 1966).
24. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988).
25. Джексон Дж. *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965).
26. Johnson P.B., Christy R.W. *Phys. Rev. B*, **6**, 4370 (1972).
27. Barnes W.L. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **8**, 87 (2006).