

Улучшенная модель температуры газа в лазере на парах бромида меди

И.П.Илиев, С.Г.Гочева-Илиева, Н.В.Саботинов

Построена новая аналитическая модель для расчета температурного профиля газа в поперечном сечении разрядной трубки лазеров на бромиде меди с длинами волн излучения 510.6 и 578.2 нм. Модель описывается квазистационарным уравнением теплопроводности с граничными условиями третьего и четвертого рода с учетом переменной объемной электрической мощности по радиусу трубки. Получено точное решение задачи. Модель используется для расчета температурных профилей разряда в случаях охлаждения при естественной и принудительной конвекции. Полученные результаты сравниваются с ранее известными распределениями температуры. Построенную улучшенную модель можно применять как для анализа существующих, так и для разработки новых лазеров.

Ключевые слова: лазер на бромиде меди, температурная модель, уравнение теплопроводности, точное решение.

1. Введение

Несмотря на преимущественное применение полупроводниковых лазеров, лазеры на парах меди и ее соединений продолжают активно использоваться. Они являются самыми мощными источниками излучения в видимой области спектра (516.6 и 578.2 нм), имеют высокую когерентность и малую расходимость лазерного пучка, а также могут служить источниками УФ излучения (248.6, 259.2, 260.0 и 270.3 нм). По этим причинам данные лазеры продолжают быть объектом экспериментальных и теоретических исследований [1–7]. Экспериментальный и эксплуатационный опыт показывает, что температура газа в активной лазерной среде является одной из самых существенных рабочих характеристик лазеров этого типа. Таким образом, детальное изучение распределения температуры газа в поперечном сечении активной среды важно как для существующих лазерных источников, так и для разработки новых.

До сих пор во всех аналитических моделях лазеров на парах меди и ее соединений [8–10] для описания распределения температуры газа $T_g(r)$ в поперечном сечении лазерной трубки используется следующая формула:

$$T_g(r) = \left[T_1^{m+1} + \frac{q_v(m+1)}{4\lambda_0} (R_1^2 - r^2) \right]^{1/(m+1)}, \quad (1)$$

$$0 \leq r < R_1,$$

где R_1 и T_1 – радиус и температура кварцевой трубки; q_v [Вт·м⁻³] – объемная электрическая мощность, выделяемая в активной среде; λ_0 и m – константы, зависящие от рода газа.

Формула (1) применяется также для моделирования температуры лазеров и на других соединениях металлов [11]. Она справедлива при условии, что мощность q_v одинакова во всем объеме активной среды ($q_v = \text{const}$). Однако это предположение не отражает реального распределения q_v в поперечном сечении лазерной трубки. Как известно, q_v сильно изменяется вдоль ее радиуса, и при этом максимальная мощность локализована на оси разряда. Таким образом, применение формулы (1) при условии $q_v = \text{const}$ некорректно, и ее можно использовать только для получения качественных и сравнительных оценок температуры газа в сечении лазерной трубки. Для реальных расчетов температуры требуется более точный метод.

Предметом настоящей работы является аналитическое исследование температурного профиля в поперечном сечении лазерной трубки в случае, когда распределение объемной электрической мощности по радиусу трубки заранее задано: $q_v = q_v(r)$. Такой подход позволит более точно, чем с помощью (1), найти распределение температуры в активной среде лазера. По существу эта работа является продолжением и развитием нашей предыдущей работы [10]. По этой причине дадим сначала краткое описание основных результатов, полученных в [10].

2. Описание разработанной в [10] аналитической модели

Будем исследовать лазер на парах бромида меди [12]. Пусть общая потребляемая им электрическая мощность равна 5000 Вт. С учетом потерь в активный объем лазера поступает мощность $Q_1 = 4080$ Вт, а выходная мощность составляет 120 Вт. Геометрические размеры лазерной трубки показаны на рис.1. Она изготовлена из кварца, а в активной области снабжена дополнительным тепло-

I.P.Iliev. Department of Physics, Technical University, Plovdiv, 25 Tzanko Djustabanov St., 4000 Plovdiv, Bulgaria; e-mail: iliev55@abv.bg
S.G.Gочева-Илиева. Department of Applied Mathematics and Modelling, Faculty of Mathematics and Informatics, Paisii Hilendarski University of Plovdiv, 24 Tzar Assen St., 4000 Plovdiv, Bulgaria; e-mail: snow@uni-plovdiv.bg, snegocheva@yahoo.com
N.V.Sabotinov. Metal Vapour Lasers Department, Georgi Nadjakov Institute of Solid State Physics, Bulgarian Academy of Sciences, 72 Tzarigradsko Chaussee, 1784 Sofia, Bulgaria; e-mail: nsabotinov@issp.bas.bg

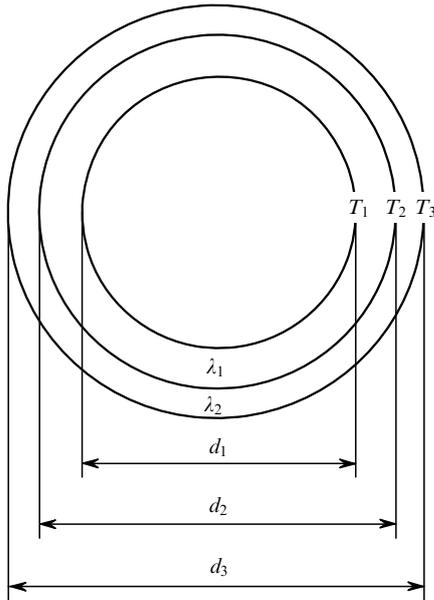


Рис.1. Геометрия поперечного сечения лазерной трубки лазера на бромиде меди в области активного объема. Внутренний диаметр кварцевой трубки $d_1 = 60$ мм, внешний диаметр $d_2 = 64$ мм, внешний диаметр теплоизоляционного покрытия $d_3 = 74$ мм.

золяционным покрытием из стекловаты, минеральной ваты или ваты из диоксида циркония.

Моделирование температурного профиля проводится при выполнении следующих предположений [10]: 1) температурный профиль разряда определяется в квазистационарном режиме работы лазера; 2) температура газа между импульсами возбуждения меняется незначительно; 3) вся поступающая в активный объем электрическая мощность (4080 Вт) трансформируется в нем в тепловую энергию, а мощность, передающаяся стенкам трубки в результате эмиссии разряда и дезактивации на них возбужденных и заряженных частиц, не учитывается.

В работе [10] при дополнительном предположении $q_v = \text{const}$ была построена следующая аналитическая модель. Температура газа T_g в поперечном сечении лазерной трубки была определена в результате решения двумерного стационарного уравнения теплопроводности

$$\text{div}(\lambda \text{grad} T_g) + q_v = 0, \tag{2}$$

где λ – коэффициент теплопроводности газа. Уравнение (2) решалось при следующих смешанных граничных условиях третьего и четвертого рода в цилиндрической конфигурации:

$$T_1 = T_2 + \frac{q_l \ln(d_2/d_1)}{2\pi\lambda_1}, \quad T_2 = T_3 + \frac{q_l \ln(d_3/d_2)}{2\pi\lambda_2}, \tag{3a}$$

$$Q_1 = \alpha F_3(T_3 - T_0) + F_3 \varepsilon c \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right], \tag{3b}$$

где T_1, T_2, T_3 – соответствующие температуры на стенках трубки и теплоизоляционного покрытия (см. рис.1); $q_l =$

Q_1/l_a – выделяемая тепловая мощность на единицу длины; $l_a = 2$ м – активная длина лазера; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности кварцевой трубки и теплоизоляции соответственно; $d_{1,2,3}$ – диаметры трубок (см. рис.1); $Q_1 = 4080$ Вт – суммарное тепловыделение, равное потребляемой электрической мощности (согласно третьему предположению); α – коэффициент теплопередачи от внешней поверхности теплоизоляции окружающей среде; F_3 – площадь внешней поверхности теплоизоляционного покрытия; $c = 5.67$ Вт·м⁻²·К⁻⁴ – коэффициент излучения абсолютно черного тела; $T_0 = 300$ К – температура воздуха; ε – интегральная степень черноты теплоизоляционного покрытия.

Значения параметров, использованных при расчетах, приведены в табл.1. Решение уравнений модели (2), (3a), (3b) было получено в [10] в предположении, что $q_v = \text{const}$, с помощью формулы (1).

3. Определение температуры газа с учетом радиального распределения объемной мощности

3.1. Определение радиального распределения $q_v = q_v(r)$

Поскольку у нас нет достаточно надежных экспериментальных данных о зависимости объемной мощности q_v от параметра r , будем использовать некоторые качественные теоретические зависимости. Из соотношений $q_v = jE$ и $j \approx \sigma E$, где j – плотность тока, а σ – проводимость, получаем $q_v \approx \sigma E^2$. Согласно [13] распределение напряженности E электрического поля в поперечном сечении трубки подчиняется закону $E(r) = E_0 J_0(2.4r/R_1)$, где $J_0(2.4r/R_1)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Тогда

$$q_v(r) = Q \left[J_0 \left(\frac{2.4}{R_1} r \right) \right]^2, \tag{4}$$

где Q – неизвестная константа, которую нужно определить. Функция $J_0(2.4r/R_1)$ достаточно хорошо известна и табулирована, например, в [14]. Поскольку в общем виде работать с функцией Бесселя неудобно, воспользуемся приближенным соотношением $[J_0(x)]^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$. Положим здесь для удобства $x = 2.4r/R_1 = \beta r$; $\beta = 2.4/R_1$. Далее, используя табличные данные из [14], методом наименьших квадратов находим $a = 1.0044$, $b = -0.01768$, $c = -0.5657$, $d = 0.1668$. Отсюда получаем

$$q_v(r) = Q[a + b\beta r + c(\beta r)^2 + d(\beta r)^3]. \tag{5}$$

Для определения константы Q используем равенство площадей под графиками функций $q_v = q_0 = \text{const}$ и $q_v = q_v(r)$ (рис.2):

$$2q_0 R_1 = 2Q \int_0^{R_1} (a + Br + Cr^2 + Dr^3) dr. \tag{6}$$

Табл.1. Данные, использованные для расчета температурного профиля [10].

Q_1 (Вт)	l_a (м)	q_v (Вт·см ⁻³)	q_l (Вт·м ⁻¹)	$\lambda_g = \lambda_0 T^m$ (Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹)	λ_1 (Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹)	λ_2 (Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹)	ε
4080	2	0.7219	2040	$\lambda_0 = 5.8935 \times 10^{-5}$ ($m = 1.091, p_{Ne} = 15$ Тор, $p_{H_2} = 0.3$ Тор)	1.96 ($T = 800 - 1100$ К)	0.12 ($T = 800 - 1100$ К, минеральная изоляция)	0.72

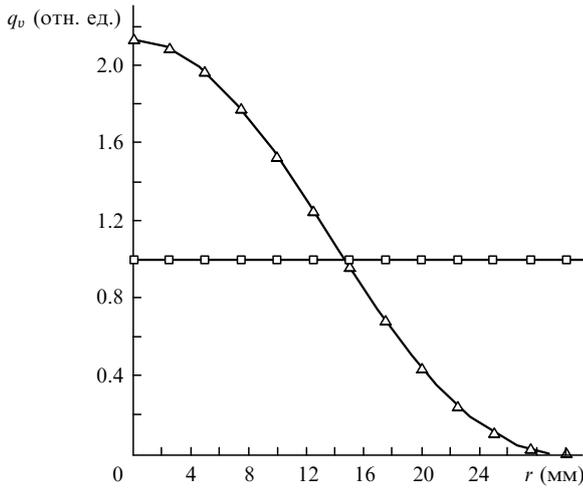


Рис.2. Распределение объемной плотности мощности в поперечном сечении лазерной трубки: $\square - q_v = q_0 = 1$, $\triangle - q_v = q_v(r)$ (формула (5)).

Здесь для простоты положено

$$B = b \frac{2.4}{R_1}, \quad C = c \left(\frac{2.4}{R_1} \right)^2, \quad D = d \left(\frac{2.4}{R_1} \right)^3. \quad (7)$$

После интегрирования в (6) получаем

$$Q = q_0 \left(a + \frac{b}{2} 2.4 + \frac{c}{3} 2.4^2 + \frac{d}{4} 2.4^3 \right)^{-1}. \quad (8)$$

Теперь, подставляя в (8) значения констант a, b, c и d , находим

$$Q = 2.131 q_0. \quad (9)$$

Для сравнения на рис.2 показаны в относительных единицах распределения $q_v = q_0 = \text{const}$ и $q_v = q_v(r)$ в соответствии с (5) и (9) (условно принято $q_0 = 1$). Из рис.2 и (9) видно, что в центре разряда локальная выделяемая электрическая мощность в случае распределения (5) в два раза больше, чем при $q_v = \text{const}$. Это предполагает существенное различие в распределениях температуры разряда $T_g(r)$ в двух рассматриваемых случаях ($q_v = \text{const}$ и $q_v = q_v(r)$).

3.2. Определение температуры разряда $T_g(r)$

Точное решение модели (2), (3) с радиальным распределением (5) дается формулой

$$T_g(r) = \left\{ T_1^{m+1} + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left[\frac{a}{4} (R_1^2 - r^2) + \frac{B}{9} (R_1^3 - r^3) + \frac{C}{16} (R_1^4 - r^4) + \frac{D}{25} (R_1^5 - r^5) \right] \right\}^{1/(m+1)}, \quad (10)$$

где $B = b(2.4/R_1)$, $C = c(2.4/R_1)^2$, $D = d(2.4/R_1)^3$. Решение (10) получено в Приложении.

4. Применение модели для определения температурного профиля в поперечном сечении разрядной трубки и анализ результатов

По аналогии с работой [10] будем искать распределение температуры $T_g(r)$ с помощью аналитической модели

(2), (3), для случаев охлаждения разряда путем естественной и принудительной конвекции. Для этой цели используем дополнительные данные из табл.1 [10].

Применение формулы (10) возможно, если известна температура T_1 внутренней стенки кварцевой трубки (см. рис.1). Возможны два случая.

1. Известна температура внешней стенки кварцевой трубки T_2 (внутри слоя изоляции). Для реально существующих лазеров ее можно измерить (например, при помощи термопары), после чего из (3а) определить T_1 .

2. Температуры T_2 и T_3 неизвестны. В частности это имеет место при разработке новых лазеров. В таком случае можно применить модель (2), (3) с граничным условием (3б), где задается температура окружающей среды, обычно $T_0 = 300$ К. Решая нелинейное уравнение (3б), находим T_3 , а из (3а) определяем T_2 и T_1 .

В работе [10] был рассмотрен второй случай. Здесь мы рассмотрим тот же случай и сравним полученные результаты с данными [10].

Для определения T_3 из граничного условия (3б) нужно предварительно найти коэффициент теплопередачи α . Рассмотрим случаи охлаждения путем естественной и принудительной конвекции.

4.1. Естественная конвекция

Для случая естественной конвекции в [10] условие (3б) записано в следующем виде:

$$q_l = 0.46\pi\lambda_{\text{air}} \left(g\beta_{\text{air}} d_3^3 \frac{T_3 - T_0}{\nu_{\text{air}}^2} \right)^{0.25} (T_3 - T_0) + \pi d_3 \varepsilon c \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right], \quad (11)$$

где g – ускорение свободного падения; β – коэффициент объемного теплового расширения газа (для воздуха $\beta_{\text{air}} = 3.41 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$); ν – кинематическая вязкость ($\nu_{\text{air}} = 15.7 \times 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$); λ – коэффициент теплопроводности ($\lambda_{\text{air}} = 0.0251 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$).

В (11) неизвестна только величина T_3 . Она находится как решение этого нелинейного уравнения, после чего из (3а) вычисляются T_2 и T_1 и далее из (10) определяется $T_g(r)$.

На рис.3 приведены распределения температуры $T_g(r)$ при $q_v = q_0 = \text{const}$ и $q_v = q_v(r)$. Полученные значения температуры в характерных точках T_3, T_2, T_1 и максимальная температура $T(0)$, достигаемая в центре трубки, даны в табл.2.

Из табл.2 видно, что при $q_v = q_0 = \text{const}$ и $q_v = q_v(r)$ температуры T_3, T_2, T_1 одинаковы. Их значения определяются общей электрической мощностью, выделяемой в активном объеме, и не зависят от ее радиального распределения. В двух рассматриваемых случаях эта мощность имеет одинаковые значения – 4080 Вт. Из табл.2 и рис.3 видно также, что $T(0)$ для распределения $q_v = q_v(r)$

Табл.2. Температура в характерных точках (см. рис.1) при естественной конвекции.

Распределение мощности	T_3 (К)	T_2 (К)	T_1 (К)	$T(0)$ (К)
$q_v = q_0 = \text{const}$	617	1010	1021	1967
$q_v = q_v(r)$	617	1010	1021	2070

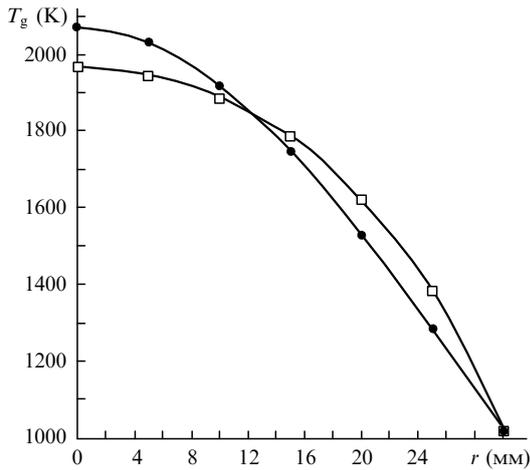


Рис.3. Распределение температуры газа в поперечном сечении трубки при естественной конвекции и вложенной мощности $Q_1 = 4080$ Вт: $\square - q_v = q_0 = \text{const}$, $\bullet - q_v = q_v(r)$.

на 100°C больше, чем соответствующее значение $T(0)$ при $q_v = \text{const}$.

4.2. Принудительная конвекция

В этом случае, как было показано в [10], граничное условие (3б) можно записать в следующем виде:

$$q_l = 0.615\pi\lambda_{\text{air}}\left(\frac{vd_3}{v_{\text{air}}}\right)^{0.466} (T_3 - T_0) + \pi d_3 \varepsilon c \left[\left(\frac{T_3}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100}\right)^4 \right], \quad (12)$$

где v – скорость охлаждающего (принудительно) потока воздуха.

Из уравнения (12) можно определить T_3 и далее последовательно, с использованием (3а) и (10), найти температурный профиль в поперечном сечении разрядной трубки.

В табл.3 приведены значения характерных температур T_3, T_2, T_1 . Распределение $T_g(r)$ показано на рис.4. В обоих случаях расчеты проводились при скорости потока $v = 20 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$.

Табл.3. Температура в характерных точках (см. рис.1) при принудительной конвекции.

Распределение мощности	T_3 (К)	T_2 (К)	T_1 (К)	$T(0)$ (К)
$q_v = q_0 = \text{const}$	466	858	881	1903
$q_v = q_v(r)$	466	858	881	2009

Здесь, как и в случае естественной конвекции и по тем же причинам, температуры T_3, T_2 и T_1 соответственно одинаковы. Отметим, что и в рассматриваемом случае принудительной конвекции $T(0)$ для распределения $q_v = q_v(r)$ на 100°C больше, чем $T(0)$ при $q_v = \text{const}$.

4.3. Анализ результатов моделирования

Хотя, согласно рис.2, максимальная электрическая мощность в центре трубки в два раза больше для случая $q_v = q_v(r)$, чем для $q_v = q_0 = \text{const}$, соответствующие температуры $T(0)$ как при естественной, так и при принудительной конвекции различаются только на 100°C . Таким

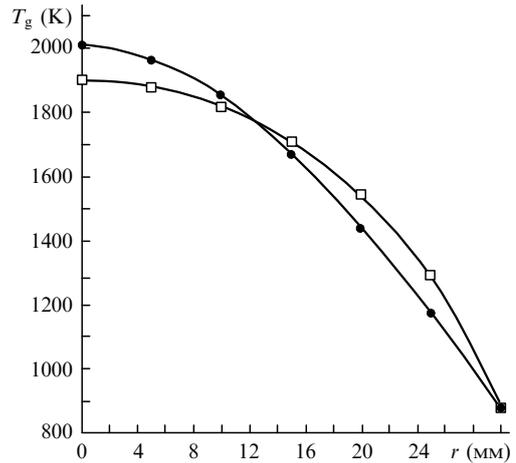


Рис.4. Распределение температуры газа в поперечном сечении лазерной трубки при принудительной конвекции ($v = 20 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$) и вложенной мощности $Q_1 = 4080$ Вт: $\square - q_v = q_0 = \text{const}$, $\bullet - q_v = q_v(r)$.

образом, в обоих случаях отношение $\Delta T(0)/T_{q_v(r)}(0)$ в среднем составляет 5.1 %, а следовательно, решение (1) можно успешно применять для анализа температурного режима лазерных источников.

Однако абсолютной разностью температур в центре разряда, равной 100°C , пренебрегать нельзя. С помощью формулы (10) можно лучше объяснить и предсказать возникновение ряда отрицательных явлений, связанных с перегревом лазерной среды. Повышение температуры в центре трубки на 100°C может привести к сжатию газового разряда, к термоионизационной неустойчивости и термохимической деградации газа, а также к дополнительному термическому заселению нижних лазерных уровней. В конечном счете это приведет к снижению мощности лазерного излучения и ухудшению его модового состава. В некоторых случаях перегрев разряда в центре трубки может провоцировать прекращение лазерной генерации и появление темных пятен в центре лазерного пучка. По этой причине, несмотря на сложность формулы (10), можно рекомендовать ее применение.

5. Заключение

Для аналитического определения температуры газа впервые предложена модель, которая учитывает неравномерное распределение электрической мощности в поперечном сечении лазерной трубки.

На базе самых общих теоретических зависимостей предлагается распределение объемной плотности электрической мощности в поперечном сечении трубки вида $q_v = q_v(r)$ (формула (5)).

Решено уравнение теплопроводности при естественной и принудительной конвекции и получены явные аналитические формулы, описывающие распределения температуры газа $T_g(r)$ в этих условиях.

Показано, что полученное ранее распределение $T_g(r)$ в предположении $q_v = \text{const}$ дает ошибку определения $T_g(r)$ в центре трубки $\sim 5\%$. Проведено сравнение полученных температурных профилей при $q_v = \text{const}$ и $q_v = q_v(r)$. Установлено, что в центре трубки при $q_v = q_v(r)$ температура на 100°C выше, чем соответствующая температура при $q_v = \text{const}$. Анализ результатов показал, что такая повышенная температура может оказать существенное влияние на поведение разряда. На этом основа-

нии рекомендована новая формула для определения $T_g(r)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФНИ Болгарского министерства образования и науки, проект ВУ-МИ-205/2006, и НПД Пловдивского университета им. Паисия Хилендарского, проект № 2 – 10.04.09.

Приложение

Получим решение уравнения теплопроводности

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T_g) + q_v = 0, \quad (\text{П1})$$

где λ – коэффициент теплопроводности газа; q_v – объемная плотность выделяемой мощности.

Граничными условиями заданы температура стенки кварцевой трубки и осевая симметрия распределения температуры в активной среде:

$$T_g(R_1) = T_w, \quad (\text{П2})$$

$$\left. \frac{dT_g}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (\text{П3})$$

В цилиндрических координатах, при осевой и продольной симметрии, уравнение (П1) записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT_g}{dr} \right) + q_v = 0. \quad (\text{П4})$$

Обычно коэффициент теплопроводности λ задается выражением

$$\lambda(r) = \lambda_0 T_g^m,$$

где λ_0 и m – константы, зависящие от рода газа. Таким образом, уравнение (П4) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda_0 T_g^m \frac{dT_g}{dr} \right) + q_v = 0. \quad (\text{П5})$$

После замены переменной

$$U(r) = T_g^{m+1} \quad (\text{П6})$$

уравнение (П5) принимает вид

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{q_v(m+1)}{\lambda_0} = 0, \quad (\text{П7})$$

а граничные условия –

$$U(R_1) = T_w^{m+1}, \quad (\text{П8})$$

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (\text{П9})$$

При $q_v = q_0 = \text{const}$ решение уравнения (П7) дается формулой

$$U(r) = U_w + \frac{q_0(m+1)}{4\lambda_0} (R_1^2 - r^2).$$

Учитывая (П6) и (П8), получаем известную формулу (1) ([8]–[11]):

$$T_g(r) = \left[T_w^{m+1} + \frac{q_0(m+1)}{4\lambda_0} (R_1^2 - r^2) \right]^{1/(m+1)}.$$

Для решения уравнения (П7) при $q_v = q_v(r)$ введем новую переменную

$$\tau = \frac{dU}{dr}. \quad (\text{П10})$$

Уравнение (П7) преобразуется к виду

$$d(r\tau) + \frac{m+1}{\lambda_0} q_v r dr = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом (5) и (7), получаем

$$\tau + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left(a \frac{r}{2} + B \frac{r^2}{3} + C \frac{r^3}{4} + D \frac{r^4}{5} \right) = \frac{C_1}{r},$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Возвращаясь согласно (П10) к переменной U , находим

$$\frac{dU}{dr} + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left(a \frac{r}{2} + B \frac{r^2}{3} + C \frac{r^3}{4} + D \frac{r^4}{5} \right) = \frac{C_1}{r}.$$

Граничное условие (П9) дает $C_1 = 0$ и

$$dU + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left(a \frac{r}{2} + B \frac{r^2}{3} + C \frac{r^3}{4} + D \frac{r^4}{5} \right) dr = 0.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$U + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left(a \frac{r^2}{4} + B \frac{r^3}{9} + C \frac{r^4}{16} + D \frac{r^5}{25} \right) = C_2, \quad (\text{П11})$$

где C_2 – константа. Далее из граничного условия (П8) определяем константу

$$C_2 = U_w + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left(a \frac{R_1^2}{4} + B \frac{R_1^3}{9} + C \frac{R_1^4}{16} + D \frac{R_1^5}{25} \right)$$

и, подставляя C_2 в (П11), находим

$$U(r) = U_w + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left[\frac{a}{4} (R_1^2 - r^2) + \frac{B}{9} (R_1^3 - r^3) + \frac{C}{16} (R_1^4 - r^4) + \frac{D}{25} (R_1^5 - r^5) \right].$$

После замены из (П6) получаем искомое решение (10):

$$T_g(r) = \left\{ T_w^{m+1} + \frac{(m+1)Q}{\lambda_0} \left[\frac{a}{4} (R_1^2 - r^2) + \frac{B}{9} (R_1^3 - r^3) + \frac{C}{16} (R_1^4 - r^4) + \frac{D}{25} (R_1^5 - r^5) \right] \right\}^{1/(m+1)}. \quad (10)$$

1. Суханов В.Б., Федоров В.Ф., Губарев Ф.А., Троицкий В.О., Евтушенко Г.С. *Квантовая электроника*, **37**, 603 (2007).
2. Шиянов Д.В., Евтушенко Г.С., Суханов В.Б., Федоров В.Ф. *Квантовая электроника*, **37**, 49 (2007).
3. Vuchkov N.K., Temelkov K.A., Sabotinov N.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **41**, 62 (2001).
4. Vuchkov N.K., in *New Development in Lasers and Electric-Optics Research*. Ed. by W.T.Arkin (New York: Nova Sci. Publ. Inc., 2007, pp. 41–74).
5. Carman R.J., Brown D.J.W., Piper A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 1876 (1994).
6. Яковленко С.И. *Квантовая электроника*, **30**, 501 (2000).
7. Бойченко А. М., Евтушко Г.С., Жданев О.В., Яковленко С.И. *Квантовая электроника*, **33**, 1047 (2003).
8. Kushner M. J., Warner В.Е. *J. Appl. Phys.*, **54**, 2970 (1983).
9. Astadjov D.N., Vuchkov N.K., Sabotinov N.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **24**, 1926 (1988).
10. Илиев И.П., Гочева-Илиева С.Г., Саботинов Н.В. *Квантовая электроника*, **38**, 338 (2008).
11. Temelkov K.A., Vuchkov N.K., Pan B. L., Sabotinov N.V., Ivanov B., Lyutov L. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **6604**, 660410-1 (2007).
12. Astadjov D.N., Dimitrov K.D., Jones D.R., Kirkov V.K., Little C.E., Sabotinov N.V., Vuchkov N.K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **33**, 705 (1997).
13. Blau P., in *Pulsed Metal Vapour Lasers, NATO Science Partnership Sub-Series: 1, Vol. 5*. Ed. by C.E.Little, N.V.Sabotinov (New York: Springer, 1996, pp. 215-220).
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции* (М.: Наука, 1977).